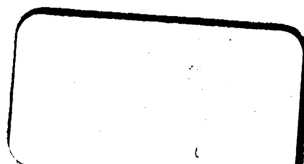

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907993 1

OEF

Budisavljevic

LEITFADEN FÜR DEN UNTERRICHT

IN DER

HÖHEREN MATHEMATIK

VON

EMANUEL v. BUDISAVLJEVIĆ UND ALFRED MIKUTA

MAJOR DES ARMEESTANDES HAUPTMANN DES DIV.-ART.-REGTS. NR. 33.

LEHRER AN DER K. UND K. TECHNISCHEN MILITÄR-AKADEMIE.

I. BAND.

GRUNDZÜGE

DER

DETERMINANTEN-THEORIE UND DER PROJECTIVISCHEN GEOMETRIE.

ANALYTISCHE GEOMETRIE

VON

MAJOR E. v. BUDISAVLJEVIĆ.

MIT 108 TEXTFIGUREN.

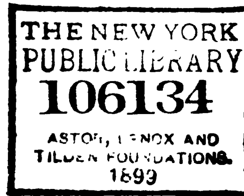


WIEN UND LEIPZIG.

WILHELM BRAUMÜLLER

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTS-BUCHHÄNDLER

1898.



Druck von Friedrich Jasper in Wien.

VORWORT.

Die Begrenzung des Lehrstoffes in dem vorliegenden Leitfaden entspricht den Bestimmungen des »Lehrplanes für die k. und k. technische Militär-Akademie«. Bezüglich der Behandlungsart waren die Verfasser bemüht, jene Richtung einzuhalten, welche von Professor Karl Schmitt begründet und während seiner vieljährigen ausgezeichneten Thätigkeit an dieser Anstalt gepflegt worden war.

Als Quellen wurden für den I. Band die Werke von Baltzer, Clebsch-Lindemann, Gordan, Günther, Hesse, Reye, Rudio, Salmon-Fiedler, Schmitt, Staudt, Steiner-Schrötter; für den II. Band die Werke von Herr, Kleyer, Matthiessen, Stegemann, Weber und die Vorlesungen der o. ö. Professoren Emanuel Czuber, Dr. Gustav R. v. Escherich, Dr. Leopold Gegenbauer benützt.

Wien, im April 1898.

INHALT.

I. Theil.

Grundzüge der Determinantentheorie.

II. Theil.

Grundzüge der projectivischen Geometrie.

III. Theil.

Analytische Geometrie.

I. Abtheilung. Analytische Geometrie der Ebene.

Berichtigungen.

Seite 8, Zeile 1 und 2 des Schemas links. Statt die Elemente a_{12} und a_{23} soll ein Strich die Elemente a_{22} und a_{13} verbinden.

» 28, » 2 von unten. Statt $b_k{}^1$ soll stehen b_{k1}.

» 31, Beispiel γ. Statt a_2 soll stehen α_2.

» 34, letzte Zeile des Textes. Statt $(n-1)^{ten}$ soll stehen $(n-2)^{ten}$.

» 36, Zeile 6 von unten. Statt $a_{in}\,\alpha_{kn}\sqrt{\alpha_{ii}\,\alpha_{kk}}$ soll stehen $a_{in}\,a_{kn}\sqrt{\alpha_{ii}\,\alpha_{kk}}$.

» 39, erste Determinante von unten. Man streiche die 5. Colonne von Punkten.

» 40, zweite Gleichung von oben. Statt $A_{n+1,n+1}\,x^k =$ soll stehen $A_{n+1,n+1}\,x_k =$.

» 46, Zeile 3 von unten. Statt $= A_{n1} : A_{n1} : \ldots$ soll stehen $= A_{n1} : A_{n2} : \ldots$

» 80, » 13 von oben. Man streiche den Beistrich nach x_2.

» 82, Fig. 21. Zum Strahl UX_1 setze man x.

» 98, Fig. 31. Statt $C = C_1$ soll stehen $C = C_2$.

» 104, Zeile 6 von oben. Statt 29 soll stehen 27.

» 132, Beispiel *c*). Statt $\alpha = \cos\varphi : \beta =$ soll stehen $\alpha = \cos\varphi;\ \beta =$.

» 149, Zeile 14 von unten. Statt A B soll stehen A P.

» — » 3 von unten. Statt und $= -5$ soll stehen und $1 = -5$.

» 159, » 15 von unten. Statt S P soll stehen O S.

» 162, » 10 von unten (Nenner). Statt b soll stehen 2b.

» 196, » 16 von unten. Statt (Art. 16, II) soll stehen (Art. 17, II).

» 220, » 2 von unten. Statt $\frac{2\,a_{12}}{a_{11}}$ soll stehen $\frac{-2\,a_{12}}{a_{11}}$.

» 239, » 11 von unten. Statt (Art. 32) soll stehen (Art. 30).

» 270, » 12 von oben. Statt a_k soll stehen α_k.

» 282, » 8 von oben. Statt $\frac{x-x_0}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)} - \frac{y-y_0}{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)}$ soll stehen $\frac{x-x_0}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)}$.

» 286, Fig. 78. Am Schnittpunkte der Radien r_1 und r_2 soll statt P_2 stehen P_c.

» 296, Zeile 6 von unten. Statt P_0 soll stehen H_0.

» 324, » 1 von unten. Statt $\sin^2 g_0\, g =$ soll stehen $r^2 \sin^2 g_0\, g$.

» 420, Gleichungen 68 Statt $z_c = \frac{A_{43}}{A_{43}}$ soll stehen $z_c = \frac{A_{43}}{A_{44}}$.

» 425, Zeile 6 von unten. Statt $a_{ik} = 0$ soll stehen $\alpha_{ik} = 0$.

» 437, » 11 von oben. Statt 79 in die soll stehen 79 über in die.

» 444, » 13 von unten. Statt Az = soll stehen $Az_s =$.

» 452, » 6 von oben. Statt (Art 51) in die soll stehen (Art 51) über in die.

» 481, » 1 von unten (Nenner). Statt c_2 soll stehen c^2. Statt b_2 soll stehen b^2.

» 486, » 8 von oben. Statt welche soll stehen vor, welche.

ERSTER THEIL.

Grundzüge der Determinantentheorie.

I. Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der Determinanten.

1. Matrix. Ein System von n^2 Größen

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

in quadratförmiger Anordnung heißt eine Matrix. Die einzelnen Größen als Bestandtheile der Matrix werden Elemente genannt. An der Matrix unterscheidet man n Horizontal-, n Vertical- und zwei Diagonalreihen. Die ersten nennt man auch Zeilen, die zweiten Colonnen. Bei den Diagonalreihen unterscheidet man die erste oder Hauptdiagonale, die von links oben nach rechts unten und die zweite oder Nebendiagonale, welche von links unten nach rechts oben läuft. Um die Stelle sofort zu erkennen, welche ein Element in der Matrix einnimmt, bezeichnet man zweckmäßig alle Elemente mit demselben Buchstaben, dem aber zwei Weiser angehängt sind, wovon der erste die Zeile, der zweite die Colonne angibt, welcher das Element angehört. Eine solche Matrix ist normal geordnet. Würde jedoch die normale Anordnung der Matrix durch beliebig oft wiederholte Vertauschungen paralleler Reihen aufgehoben; wäre infolge einer bereits gegebenen Bezeichnung der Elemente oder aus einem anderen Grunde deren Stellung nicht direct erkennbar, so kann man sich der Vermittlung einer daneben angesetzten oder gedachten, normal geordneten Hilfsmatrix bedienen.

2. Vorläufige Definition der Determinante. Die zwischen zwei Verticalstriche angesetzte Matrix von n^2 Elementen bedeutet in

der mathematischen Zeichensprache einen nach bestimmten Regeln aus diesen Elementen zu bildenden algebraischen Ausdruck, welcher den Namen »**Determinante n^{ten} Grades**« führt. Lässt man ein einzelnes Element als Determinante ersten Grades gelten, so gibt es also Determinanten 1., 2., 3., ... n^{ten} Grades:

$$a_{11}\,;\;\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\,;\;\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\,;\;\ldots\;\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Unterdeterminante eines Elementes. Unterdrückt man in einer Determinante n^{ten} Grades Zeile und Colonne des Elementes a_{ik}, so lässt sich aus den übrigbleibenden Elementen (ohne Änderung ihrer Reihenfolge) eine Determinante $(n-1)^{ten}$ Grades bilden. Dieser setzt man das positive oder negative Vorzeichen vor, je nachdem die Summe $i+k$ von Zeilen- und Colonnenweiser des Elementes a_{ik} eine gerade oder ungerade Zahl ist und nennt sie dann die **Unterdeterminante** (Subdeterminante) dieses Elementes. Sie wird mit A_{ik} oder α_{ik} bezeichnet. Im allgemeinen Falle kann ihr Vorzeichen durch den »Vorzeichenfactor« $(-1)^{i+k}$ bestimmt werden.

Ist demnach

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die gegebene Determinante, so ist

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Jedem Element einer Determinante kommt eine Unterdeterminante zu. Wenn die Matrix nicht normal geordnet, aus beliebig bezeichneten Elementen oder aus Zahlen zusammengesetzt ist, so wird der Vorzeichen-

factor mittelst einer Hilfsmatrix gewonnen oder es wird das Vorzeichen dem leicht auf seine Richtigkeit zu prüfenden Schema

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & + & - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

entnommen.

Beispiele.

α) In der Determinante 2. Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ mit dem Vorzeichenschema } \begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

ist

$$A_{11} = a_{22}; \quad A_{12} = -a_{21};$$
$$A_{21} = -a_{12}; \quad A_{22} = a_{11}.$$

β) In der Determinante 3. Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ mit dem Vorzeichenschema } \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ist

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

u. s. w.

γ) In der Determinante 4. Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ mit dem Vorzeichenschema } \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

ist

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

u. s. w.

δ) In der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{ mit der Hilfsmatrix } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

entspricht dem Elemente h das Element b_{32} der Hilfsmatrix. Nach dem letzteren kann man die Unterdeterminante jenes Elementes mit B_{32} bezeichnen und hat

$$B_{32} = - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}; \text{ analog}$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

4. Unterdeterminanten der Elemente einer Unterdeterminante. Es sei nun die Determinante n^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{is} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rk} & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gegeben. Es soll die Unterdeterminante A_{ik} des Elementes a_{ik} und in dieser wieder die Unterdeterminante des Elementes a_{rs} bestimmt werden, die mit $A_{\substack{ik \\ rs}}$ bezeichnet werden möge und vom $(n-2)^{ten}$ Grade sein wird. Vorausgesetzt sei: $i < r$; $k < s$. Um zunächst A_{ik} zu bestimmen, hat man die Zeile i und die Colonne k zu unterdrücken, sodann der aus den übrigen Elementen gebildeten Determinante $(n-1)^{ten}$ Grades den Factor $(-1)^{i+k}$ vorzusetzen. Um jetzt die Unterdeterminante des Elementes a_{rs} der Determinante A_{ik} zu bilden, hat man darin Zeile und Colonne dieses Elementes zu unterdrücken, und aus den übrigen Elementen eine Determinante $(n-2)^{ten}$ Grades zusammenzustellen. Dieser darf aber nicht etwa ohneweiters der Factor $(-1)^{r+s}$ vorgesetzt werden, weil man es nun mit einer nicht normal geordneten Matrix zu thun hat, in welcher nämlich Zeile i und Colonne k fehlen, so dass darin die ursprüngliche Zeile r und Colonne s nur mehr Zeile $r-1$ und Colonne $s-1$ sind. Der Vorzeichenfactor ist daher $(-1)^{r+s-2}$, der wohl in diesem Falle gleich ist dem Factor $(-1)^{r+s}$, aber demselben nicht immer gleich sein muss. Dieses hängt, wie bald gezeigt werden

wird, von der gegenseitigen Lage der Elemente a_{ik} und a_{rs} ab. Die beiden Factoren $(-1)^{i+k}$ und $(-1)^{r+s}$ ergeben, wie hiemit festgesetzt wird, für die Determinante $A_{\substack{ik\\rs}}$ den Vorzeichenfactor

$(-1)^{i+k} \cdot (-1)^{r+s} = (-1)^{i+k+r+s}$ und man hat

$$A_{\substack{ik\\rs}} = (-1)^{i+k+r+s} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot & \cdot & a_{1\,s-1} & a_{1,s+1} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ a_{i-1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i+1,n} \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ a_{r-1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r+1,n} \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sollen auch die Unterdeterminanten $A_{\substack{rs\\ik}}$, $A_{\substack{rk\\is}}$, $A_{\substack{is\\rk}}$ gebildet werden, so ist vor allem klar, dass in jedem dieser Fälle immer die Zeilen i und r, die Colonnen k und s zu unterdrücken sein werden; alle diese Determinanten haben also dieselbe Matrix. Die Vorzeichenfactoren müssen aber in jedem Falle besonders ermittelt werden.

Bei $A_{\substack{rs\\ik}}$ hat A_{rs} den Factor $(-1)^{r+s}$. Da $r > i$, $s > k$, so zeigen in A_{rs} die Weiser i und k richtig die Lage des Elementes a_{ik} an; der vorzusetzende Factor ist also $(-1)^{i+k}$; daher resultiert für $A_{\substack{rs\\ik}}$ der Vorzeichenfactor $(-1)^{i+k+r+s}$ und es ist demnach

$$A_{\substack{ik\\rs}} = A_{\substack{rs\\ik}}.$$

Bei $A_{\substack{rk\\is}}$ hingegen hat A_{rk} den Factor $(-1)^{r+k}$. Hierin ist die nun zu unterdrückende ursprüngliche Zeile i wieder Zeile i, während die ursprüngliche Colonne s jetzt nur Colonne $s-1$ ist. Demnach ist in diesem Falle der Factor $(-1)^{i+s-1}$ anzuwenden, so dass sich für $A_{\substack{rk\\is}}$ der Factor $(-1)^{i+k+r+s-1} = -(-1)^{i+k+r+s}$ ergibt.

Für $A_{\substack{is\\rk}}$ findet man durch eine ähnliche Betrachtung denselben Factor $-(-1)^{i+k+r+s}$, demnach ist

$$A_{\substack{rk\\is}} = A_{\substack{is\\rk}}$$

und es besteht daher die Beziehung:

$$A_{\substack{ik\\rs}} = A_{\substack{rs\\ik}} = -A_{\substack{rk\\is}} = -A_{\substack{is\\rk}}.$$

$$+ a_{i4}\left[a_{k1}A_{\substack{i4\\k1}} + a_{k2}A_{\substack{i4\\k2}} + a_{k3}A_{\substack{i4\\k3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{kn}A_{\substack{i4\\kn}}\right] +$$

. . . .

. . . .

$$+ a_{in}\left[a_{k1}A_{\substack{in\\k1}} + a_{k2}A_{\substack{in\\k2}} + a_{k3}A_{\substack{in\\k3}} + \ldots + a_{k,n-1}A_{\substack{in\\k,n-1}}\right].$$

Beachtet man, dass die in einer Verticalreihe befindlichen Glieder der einzelnen Summen dieser Entwicklung je das Element a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, . . . insgesammt zum Factor haben, dass ferner (Art. 4) $A_{\substack{ik\\rs}} = A_{\substack{rs\\ik}}$ so lässt sich diese Entwicklung auch in der Form

$$a_{k1}\left[\qquad a_{i2}A_{\substack{k1\\i2}} + a_{i3}A_{\substack{k1\\i3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}A_{\substack{k1\\in}}\right] +$$

$$+ a_{k2}\left[a_{i1}A_{\substack{k2\\i1}} + \qquad + a_{i3}A_{\substack{k2\\i3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}A_{\substack{k2\\in}}\right] +$$

$$+ a_{k3}\left[a_{i1}A_{\substack{k3\\i1}} + a_{i2}A_{\substack{k3\\i2}} + \qquad + a_{i4}A_{\substack{k3\\i4}} + \ldots\ldots\ldots + a_{in}A_{\substack{k3\\in}}\right] +$$

. . . .

. . . .

$$+ a_{kn}\left[a_{i1}A_{\substack{kn\\i1}} + a_{i2}A_{\substack{kn\\i2}} + a_{i3}A_{\substack{kn\\i3}} + \ldots + a_{i,n-1}A_{\substack{kn\\i,n-1}}\right]$$

geben, worin die einzelnen Summen offenbar die Entwicklungen der Unterdeterminanten A_{k1}, A_{k2}, A_{k3} . . . nach den in ihnen befindlichen Elementen der (ursprünglichen) Zeile i vorstellen, so dass man diese Entwicklung auch schreiben kann

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + a_{k3}A_{k3} + \ldots + a_{kn}A_{kn},$$

in welcher Form sie die Entwicklung der Determinante nach der Zeile k darstellt; damit ist bewiesen, dass man zu demselben Resultat kommt, ob man zuerst nach der Zeile i und dann weiter nach der Zeile k oder zuerst nach der Zeile k und dann nach der Zeile i entwickelt.

Der Beweis für zwei beliebige Colonnen wäre analog durchzuführen, also bloß eine Wiederholung des vorstehenden.

Bei den Determinanten 2. und 3. Grades wurde gezeigt, dass der bei der Entwicklung eingeschlagene Weg auf das Ergebnis ohne Einfluss bleibt, daher gilt — bezüglich der Zeilen oder Colonnen — dasselbe auch für die Determinanten 4., 5., . . . n^{ten} Grades.

d) Es muss aber noch bewiesen werden, dass die Entwicklung nach Zeilen dasselbe Resultat liefert, wie die Entwicklung nach Colonnen. Dazu genügt, zu zeigen, dass die Entwicklung nach irgend einer Zeile

gleich ist jener nach irgend einer Colonne, sobald dasselbe für die Determinanten bis zum $(n-1)^{ten}$ Grade als giltig angenommen wird. Der Zweckmäßigkeit wegen soll der Beweis für die letzte Zeile und die letzte Colonne geführt werden.

Entwickelt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots\dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

zunächst nach der letzten Zeile und bezeichnet mit A' das Ergebnis, so wird

$$A' = a_{n1} A_{n1} + a_{n2} A_{n2} + \dots + a_{nk} A_{nk} + \dots + a_{nn} A_{nn}.$$

Die Unterdeterminanten $A_{n1}, A_{n2}, \dots A_{n,n-1}$ enthalten alle die Elemente $a_{1n}, a_{2n}, \dots a_{n-1,n}$ der letzten Colonne und dürfen, ebenso wie A_{nn}, weil sie vom Grade $n-1$ sind, laut Voraussetzung beliebig, daher auch nach den bezeichneten Elementen entwickelt werden. Es ist z. B.

$$A_{nk} = (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & \dots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \dots & a_{in} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n-1,1} & \cdot & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \cdot & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

und hierin die Unterdeterminante des Elementes a_{in} (Art. 4)

$$\underset{in}{A_{nk}} = -\underset{ik}{A_{nn}}$$

oder wenn man nach und nach $i = 1, 2, 3, \dots n-1$ setzt:

$$\underset{1n}{A_{nk}} = -\underset{1k}{A_{nn}};\ \underset{2n}{A_{nk}} = -\underset{2k}{A_{nn}};\ \underset{3n}{A_{nk}} = -\underset{3k}{A_{nn}}; \dots \underset{n-1,n}{A_{nk}} = -\underset{n-1,k}{A_{nn}},$$

so dass

$$A_{nk} = -\left[a_{1n} \underset{1k}{A_{nn}} + a_{2n} \underset{2k}{A_{nn}} + \dots + a_{in} \underset{ik}{A_{nn}} + \dots + a_{n-1,n} \underset{n-1,k}{A_{nn}}\right]$$

wird. Hiernach erscheint A_{nk} durch die Unterdeterminanten der Elemente der Colonne k in der Unterdeterminante A_{nn} ausgedrückt. Führt man für $\underset{ik}{A_{nn}}$ der Kürze und Zweckmäßigkeit wegen die Bezeichnung α_{ik} ein, setzt ferner nach und nach $k = 1, 2, \dots n-1$, so erhält man auch $A_{n1}, A_{n2}, \dots A_{n,n-1}$ in derselben Form dargestellt und es wird nun

$$A' = -a_{n1}\left[a_{1n}\alpha_{11} + a_{2n}\alpha_{21} + \ldots + a_{in}\alpha_{i1} + \ldots + a_{n-1,n}\alpha_{n-1,1}\right] -$$
$$-a_{n2}\left[a_{1n}\alpha_{12} + a_{2n}\alpha_{22} + \ldots + a_{in}\alpha_{i2} + \ldots + a_{n-1,n}\alpha_{n-1,2}\right] -$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-a_{nk}\left[a_{1n}\alpha_{1k} + a_{2n}\alpha_{2k} + \ldots + a_{in}\alpha_{ik} + \ldots + a_{n-1,n}\alpha_{n-1,k}\right] -$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-a_{n,n-1}\left[a_{1n}\alpha_{1,n-1} + a_{2n}\alpha_{2,n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1,n}\alpha_{n-1,n-1}\right] +$$
$$+ a_{nn}A_{nn}$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$A' = a_{nn}A_{nn} - \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{\substack{k=n-1\\i=n-1}} a_{nk}\, a_{in}\,\alpha_{ik}.$$

Nach der Voraussetzung liefert die weitere Entwicklung der Unterdeterminanten A_{nn} und α_{ik} unabhängig von dem eingeschlagenen Wege immer dasselbe Ergebnis.

Entwickelt man die gegebene Determinante nach der letzten Colonne und bezeichnet mit A'' das Ergebnis, so wird

$$A'' = a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \ldots + a_{kn}A_{kn} + \ldots + a_{nn}A_{nn},$$

worin wieder die Unterdeterminanten $A_{1n}, A_{2n} \ldots A_{kn} \ldots A_{n-1,n}$ insgesammt die Elemente $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \ldots a_{n,n-1}$ enthalten und nach denselben entwickelt werden dürfen. Es ist z. B.

$$A_{kn} = (-1)^{k+n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & & & & \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,i} & \ldots & a_{k-1,n-1} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,i} & \ldots & a_{k+1,n-1} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix};$$

ferner (Art. 4)

$$A_{\substack{kn\\ni}} = -A_{\substack{nn\\ki}} = -\alpha_{ki}$$

und

$$A_{kn} = -\left[a_{n1}\alpha_{k1} + a_{n2}\alpha_{k2} + \ldots + a_{n,n-1}\alpha_{k,n-1}\right],$$

so dass man schließlich, analog dem eben behandelten Falle erhält

$$A'' = a_{nn}A_{nn} - \sum_{\substack{k=1\\i=1}}^{\substack{i=n-1\\k=n-1}} a_{kn}\, a_{ni}\,\alpha_{ki}.$$

Vergleicht man die mit A' und A'' bezeichneten Ausdrücke, so findet man in beiden dasselbe Bildungsgesetz ausgesprochen. Vom Producte $a_{nn} A_{nn}$ ist eine Summe von Gliedern abzuziehen, welche aus dem Producte eines Elementes (a_{nk} oder a_{ni}) der letzten Zeile, eines Elementes (a_{in} oder a_{kn}) der letzten Colonne — immer a_{nn} ausgenommen — und der Unterdeterminante (α_{ik} oder α_{ki}) desjenigen Elementes in A_{nn} bestehen, welches mit den angegebenen Elementen in derselben Colonne und Zeile liegt. Es ergibt sich daher in beiden Fällen derselbe Ausdruck, der nun mit A bezeichnet werden möge, so dass

$$A' = A'' = A.$$

Bei den Determinanten 2. und 3. Grades liefert die Entwicklung nach Zeilen oder Colonnen immer das gleiche Ergebnis, dasselbe gilt daher für Determinanten 4., 5., . . . n^{ten} Grades.

Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

e) Die eben gezeigte Berechnungsart lässt sich mit besonderem Vortheile auf die Determinante 4. Grades anwenden. Es sei

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

und darin

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

dann hat man

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ferner

$$A_{41} = -\left(a_{14}\,\alpha_{11} + a_{24}\,\alpha_{21} + a_{34}\,\alpha_{31}\right),$$

$$A_{42} = -\left(a_{14}\,\alpha_{12} + a_{24}\,\alpha_{22} + a_{34}\,\alpha_{32}\right),$$

$$A_{43} = -\left(a_{14}\,\alpha_{13} + a_{24}\,\alpha_{23} + a_{34}\,\alpha_{33}\right);$$

A_{44} berechnet man durch Entwicklung nach irgend einer zweckmäßig gewählten Reihe mit Hilfe der schon berechneten Unterdeterminanten α_{ik}.

Schließlich ergibt sich dann

$$A = a_{41} A_{41} + a_{42} A_{42} + a_{43} A_{43} + a_{44} A_{44}.$$

Beispiel.

(Hilfsdeterminante hinzugedacht.)

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{matrix} \alpha_{11} = -1; \ \alpha_{12} = 7; \ \alpha_{13} = -17; \\ \alpha_{21} = 12; \ \alpha_{22} = -18; \ \alpha_{23} = 6; \\ \alpha_{31} = -19; \ \alpha_{32} = 1; \ \alpha_{33} = 7; \end{matrix}$$

$$A_{41} = -\left[4.(-1) + 3.12 + 7.(-19)\right] = 4 - 36 + 133 = 101;$$

$$A_{42} = -\left[4.7 + 3.(-18) + 7.1\right] = -28 + 54 - 7 = 19;$$

$$A_{43} = -\left[4.(-17) + 3.6 + 7.7\right] = 68 - 18 - 49 = 1;$$

$$A_{44} = 2.(-1) + 3.7 + 5.(-17) = -2 + 21 - 85 = -66;$$

$$A = 3.101 + 1.19 + 2.1 + 4.(-66) = 303 + 19 + 2 - 264 =$$
$$= 324 - 264 = 60.$$

6. **Grundeigenschaften der Determinanten.** Die Determinanten besitzen folgende Grundeigenschaften:

a) Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man sie transponiert, d. h. wenn man die Zeilen in derselben Reihenfolge zu Colonnen macht.

Gilt dieser Satz für die Determinante $(n-1)^{ten}$ Grades, so gilt er auch für jene n^{ten} Grades.

Entwickelt man nämlich die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

und zwar die erste nach einer Zeile, die zweite nach der correspondierenden Colonne, so treten in beiden Entwicklungen dieselben Elemente auf, während die entsprechenden Unterdeterminanten bloß gegeneinander transponiert erscheinen, also laut Voraussetzung gleich sind.

Bei der Determinante 2. Grades sieht man direct, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

folglich gilt diese Eigenschaft auch für Determinanten 3., 4., ... n^{ten} Grades.

b) Eine Determinante ändert bloß das Vorzeichen, aber nicht ihren Wert, wenn man zwei parallele Reihen vertauscht.

Dieses ist richtig für eine Determinante n^{ten} Grades, sobald es für eine solche $(n-1)^{ten}$ Grades zutrifft. Entwickelt man nämlich die Determinante nach einer dritten, den zu vertauschenden parallelen Reihe, so treten die letzteren in allen Unterdeterminanten der Entwicklung auf. Führt man nun die Vertauschung aus, so ändern laut Voraussetzung alle Unterdeterminanten bloß ihr Vorzeichen; dadurch wird aber in der Determinante n^{ten} Grades auch nur eine Änderung des Vorzeichens bewirkt.

Nun ist bei der Determinante 2. Grades evident, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix};$$

folglich gilt die Eigenschaft auch für Determinanten 3., 4., ... n^{ten} Grades.

Durch wiederholtes Vertauschen von Zeilen und Colonnen kann man also eine beliebige Vertheilung der letzteren herbeiführen, ohne den Wert der Determinante zu ändern, sobald man nur durch Vorsetzung des Factors -1 für jede Vertauschung, daher $(-1)^k$ für k Vertauschungen das Vorzeichen berichtigt.

c) Eine Determinante hat den Wert Null, sie verschwindet, wenn die correspondierenden Elemente zweier paralleler Reihen einander gleich sind.

Dieses ist richtig für eine Determinante n^{ten} Grades, wenn es für eine solche vom $(n-1)^{ten}$ Grade gilt. Entwickelt man sie nämlich nach einer dritten, den gleichen parallelen Reihe, so enthalten alle dabei auftretenden Unterdeterminanten zwei gleiche Reihen, verschwinden daher laut Voraussetzung; also verschwindet auch die Determinante n^{ten} Grades.

Nun hat eine Determinante 2. Grades mit zwei gleichen Zeilen oder Colonnen den Wert Null:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & c \\ d & d \end{vmatrix} = 0,$$

mithin gilt dasselbe für Determinanten 3., 4., ... n^{ten} Grades.

d) Durch Entwicklung nach der Zeile i oder Colonne k erhält man (Art. 5)

$$A = \begin{cases} a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} \\ a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \ldots + a_{nk} A_{nk}, \end{cases}$$

Ist $i \gtrless s \gtrless k$ und man setzt

$$a_{i1} = a_{s1}; \; a_{i2} = a_{s2}; \; \ldots \; a_{in} = a_{sn};$$
$$a_{1k} = a_{1s}; \; a_{2k} = a_{2s}; \; \ldots \; a_{nk} = a_{ns};$$

so heißt das die Elemente der Zeile i oder der Colonne k den correspondierenden Elementen der Zeile oder Colonne s gleich machen. Dann hat aber die Determinante zwei gleiche parallele Reihen und verschwindet. Also ist

$$a_{s1} A_{i1} + a_{s2} A_{i2} + \ldots + a_{sn} A_{in} = 0,$$
$$a_{1s} A_{1k} + a_{2s} A_{2k} + \ldots + a_{ns} A_{nk} = 0,$$

was auch ausgesprochen werden kann:

Multipliciert man die Elemente einer Reihe mit den Unterdeterminanten der correspondierenden Elemente einer zu ihr parallelen Reihe und bildet die Summe der Producte, so hat diese den Wert Null. Schließlich sei noch folgende, leicht verständliche Beziehung angeführt:

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + a_{i3} A_{k3} + \ldots + a_{in} A_{kn} \\ a_{1i} A_{1k} + a_{2i} A_{2k} + a_{3i} A_{3k} + \ldots + a_{ni} A_{nk} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} A & \text{für } i = k \\ 0 & \text{ » } i \gtrless k \end{array}\right.$$

e) Die vollständig entwickelte Determinante n^{ten} Grades, deren Matrix keine gleichen Elemente enthält, besteht aus der Summe von $n!$ verschiedenen Gliedern, die aus Producten von je n Elementen gebildet sind, von welchen niemals zwei derselben Reihe angehören.

Bei der Entwicklung wird nämlich jedes Element irgend einer Reihe mit seiner Unterdeterminante multipliciert. Diese enthält kein Element der Zeile und Colonne, welcher das mit ihr multiplicierte Element angehört. Dasselbe wiederholt sich bei der Entwicklung der Unterdeterminanten u. s. w. Es kann also kein Product entstehen, welches auch nur zwei Elemente derselben Reihe enthielte. Betrachtet man ferner irgend eine Entwicklung, etwa nach Zeile i:

$$a_{i1} A_{i1} + \ldots + a_{is} A_{is} + \ldots + a_{i\sigma} A_{i\sigma} + \ldots + a_{in} A_{in},$$

so ist vor allem klar, dass in den Unterdeterminanten $A_{i1}, \ldots A_{in}$ kein Element der Zeile i vorhanden ist. Die zu dem beliebigen Aggregate $a_{is} A_{is}$ vereinigten Glieder sind von jenen eines beliebigen anderen Aggregates $a_{i\sigma} A_{i\sigma}$ durchwegs verschieden, weil in ersteren das Element $a_{i\sigma}$, in letzteren das Element a_{is} nicht auftritt. Bei der Entwicklung der Unterdeterminanten $A_{i1}, \ldots A_{in}$ wiederholt sich dieselbe Erscheinung u. s. w. Daher können im allgemeinen zwei Glieder einer Determinante n^{ten} Grades nicht gleich sein.

Die Glieder einer Determinante 2. Grades enthalten je zwei Elemente, jene einer Determinante 3., 4., ... n^{ten} Grades also 3, 4, ... n Elemente.

Die Determinante 2. Grades hat zwei Glieder, jene 3. Grades hat $3.2 = 3!$, jene 4. Grades $4.3! = 4!$ u. s. w., also hat die Determinante n^{ten} Grades $n!$ Glieder.

f) Ordnet man in jedem Gliede einer Determinante n^{ten} Grades die Elemente derart, dass entweder die Zeilen- oder die Colonnenweiser von links nach rechts von 1 bis n aufsteigen, so müssen die Colonnen- oder die Zeilenweiser alle Permutationen der Zahlen 1 bis n aufweisen. Denn es treten (Pkt. *e*) keine gleichen Glieder, also auch keine gleichen Permutationen auf und die Anzahl derselben ist n!

Man überzeugt sich leicht, dass das Product der Elemente der Hauptdiagonale

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ .\ .\ .\ a_{nn},$$

in welchem beide Weisergattungen von links nach rechts aufsteigend geordnet sind, sich unter den Gliedern der Determinante befindet. Aus diesem Producte können die übrigen durch Permutation der ersten oder zweiten Weiser abgeleitet werden. Ist man noch imstande, jedem Gliede das richtige Vorzeichen zu geben, so hat man eine neue Definition und Berechnungsart der Determinante gefunden. In der That lässt sich mit Hilfe der in den Permutationen auftretenden Inversionen eine Vorzeichenregel ermitteln, welche hier ohne Beweis angeführt wird. Unter allen Permutationen der Zahlen 1 bis n ist nämlich nur eine vorhanden, in welcher diese die natürliche Reihenfolge

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .\ n-2,\ n-1,\ n$$

aufweisen. In allen anderen Permutationen erscheint die natürliche Reihenfolge in der Art gestört, dass größere Zahlen links von kleineren stehen. So oft dieses vorkommt, sagt man, es sei eine Inversion vorhanden und durch die Anzahl der Inversionen wird gewissermaßen der Grad der Störung beurtheilt. Die Permutationen der Zahlen 1 bis 5:

$$12345,\ 12354,\ 12534,\ 15234,\ 51234,\ 54123\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ 54321$$

z. B. enthalten 0, 1, 2, 3, 4, 7, . . . 10 Inversionen.

Die Permutationen von n Elementen werden in zwei Classen geschieden, von welchen die erste alle Permutationen mit paarer, die zweite alle Permutationen mit unpaarer Anzahl von Inversionen umfasst. Auf jede Classe entfällt eine Hälfte der Permutationen. Hat man nun aus dem Producte

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ .\ .\ .\ a_{nn}$$

durch Permutation der ersten oder zweiten Weiser alle n! Producte abgeleitet und versieht diese mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die betreffende Permutation der ersten oder zweiten Classe angehört, so ist die algebraische Summe derselben identisch mit der vollständig entwickelten Determinante. Letztere kann dementsprechend symbolisch durch

$$A = \Sigma \pm a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ .\ .\ .\ a_{nn}$$

dargestellt werden.

2. Abschnitt.

Rechnungsoperationen mit Determinanten und daraus abgeleitete Sätze.

7. Zerlegung einer Determinante. Sind die Elemente einer Reihe Summen von je k Größen, so lässt sich die Determinante in eine Summe von k Determinanten zerlegen.

In der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sei

$$a_{1i} = z_{11} + z_{12} + z_{13} + \dots + z_{1k};$$
$$a_{2i} = z_{21} + z_{22} + z_{23} + \dots + z_{2k};$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$a_{ni} = z_{n1} + z_{n2} + z_{n3} + \dots + z_{nk};$$

dieselbe nehme daher die Form

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & z_{11} + z_{12} + z_{13} + \dots + z_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & z_{21} + z_{22} + z_{23} + \dots + z_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & z_{n1} + z_{n2} + z_{n3} + \dots + z_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

an. Die Entwicklung nach der Colonne i gibt

$$A = a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} + \dots + a_{ni} A_{ni} = (z_{11} + z_{12} + \dots + z_{1k}) A_{1i} +$$
$$+ (z_{21} + z_{22} + \dots + z_{2k}) A_{2i}' + \dots + (z_{n1} + z_{n2} + \dots + z_{nk}) A_{ni} =$$
$$= \left[z_{11} A_{1i} + z_{21} A_{2i} + \dots + z_{n1} A_{ni}\right] + \left[z_{12} A_{1i} + z_{22} A_{2i} + \dots + z_{n2} A_{ni}\right] +$$
$$+ \dots + \left[z_{1k} A_{1i} + z_{2k} A_{2i} + \dots + z_{nk} A_{ni}\right];$$

demnach ist

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & z_{11} & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & z_{21} & . & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & . & z_{n1} & . & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & . & z_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & z_{22} & . & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & . & z_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & . & z_{1k} & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & z_{2k} & . & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & . & z_{nk} & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beispiele.

α)
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

β).
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

γ)
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 + d_1 \\ b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

δ)
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} + o \\ a_{12} + o & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & o \\ a_{12} & -\rho \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\rho & a_{12} \\ o & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\rho & o \\ o & -\rho \end{vmatrix} =$$
$$= (a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2) - (a_{11} + a_{22})\,\rho + \rho^2.$$

8. Multiplication einer Determinante mit einer Zahl. Eine Determinante wird mit einer Zahl multipliciert, wenn man die Elemente irgend einer Reihe mit dieser Zahl multipliciert. Daraus folgt, dass man umgekehrt den gemeinsamen Factor der Elemente einer Reihe herausheben kann. Es ist nämlich

$$p \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = p\left[a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}\right] =$$
$$= p\, a_{i1} A_{i1} + p\, a_{i2} A_{i2} + \dots + p\, a_{in} A_{in} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pa_{i1} & pa_{i2} & \dots & pa_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Beispiele.

$$\alpha)\quad p\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_{11} & pa_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ pa_{21} & pa_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_{11} & a_{12} \\ pa_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & pa_{12} \\ a_{21} & pa_{22} \end{vmatrix}.$$

$$\beta)\quad pqr\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pb_1 & pc_1 \\ qa_2 & qb_2 & qc_2 \\ ra_3 & rb_3 & rc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & qb_1 & rc_1 \\ pa_2 & qb_2 & rc_2 \\ pa_3 & qb_3 & rc_3 \end{vmatrix}.$$

$$\gamma)\quad p^2q^2r^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p^2a_1 & pqb_1 & prc_1 \\ pqa_2 & q^2b_2 & qrc_2 \\ pra_3 & qrb_3 & r^2c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\delta)\quad 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

$$\varepsilon)\quad \begin{vmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 12 & 6 & 3 \\ 42 & 14 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.3 & 2.4 & 2.5 \\ 3.4 & 3.2 & 3.1 \\ 7.6 & 7.2 & 7.1 \end{vmatrix} = 2.3.7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\varkappa)\quad \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. **Transformation einer Reihe.** Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe die correspondierenden Elemente beliebig vieler paralleler Reihen hinzuaddiert, nachdem man dieselben in jeder Reihe mit einem und demselben Factor multipliciert hat. Diese Operation wird »Transformation« der betreffenden Reihe genannt.

Es mögen die Elemente der 1., 2., . . . $(i-1)^{\text{ten}}$, $(i+1)^{\text{ten}}$, . . . n^{ten} Colonne mit den Factoren $p_1, p_2, \ldots p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots p_n$ multipliciert und zu den Elementen der Colonne i hinzuaddiert werden. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

geht dann über in

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{11}+p_1 a_{11}+p_2 a_{12}+\dots+p_n a_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{21}+p_1 a_{21}+p_2 a_{22}+\dots+p_n a_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n1}+p_1 a_{n1}+p_2 a_{n2}+\dots+p_n a_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und lässt sich (Art. 7) in n Determinanten zerlegen, von welchen die 2., 3., . . . n^{te} nach Heraushebung der Factoren $p_1, p_2, \dots$ je zwei gleiche Colonnen haben, also verschwinden, so dass nur die erste, mit der gegebenen identische Determinante übrig bleibt.

Die Factoren $p_1, p_2, \dots$ können zum Theil oder alle negativ sein oder auch zum Theil den Wert Null haben.

Beispiele.

α)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

weil die zwei letzten Determinanten verschwinden.

β)
$$\begin{vmatrix} 1023 & 124 & 10 \\ 2113 & 220 & 21 \\ 3112 & 315 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1023-100\times 10 & 124 & 10 \\ 2113-100\times 21 & 220 & 21 \\ 3112-100\times 30 & 315 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 124-10\times 10 & 10 \\ 13 & 220-10\times 21 & 21 \\ 112 & 315-10\times 30 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 24 & 10 \\ 13 & 10 & 21 \\ 112 & 15 & 30 \end{vmatrix} = \text{u. s. w.},$$

wodurch die Elemente der ersten und zweiten Colonne verkleinert wurden.

10. Folgerungen, Sätze, Anwendungen.

a) Zwei Determinanten vom n^{ten} Grade, deren correspondierende Elemente entgegengesetzt gleich sind, haben gleiche oder entgegengesetzt gleiche Werte, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, weil

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

b) Haben alle Elemente einer Reihe den Wert Null, so verschwindet die Determinante, denn entwickelt man sie nach dieser Reihe, so verschwinden alle Glieder der Summe.

c) Sind die Elemente einer Reihe proportional den correspondierenden Elementen einer parallelen Reihe, so verschwindet die Determinante; denn nach Aushebung der Proportionalitätsfactoren sind zwei gleiche parallele Reihen vorhanden, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p\,a_{i1} & p\,a_{i2} & \dots & p\,a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q\,a_{i1} & q\,a_{i2} & \dots & q\,a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = pq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

d) Wurden in einer Determinante die Elemente einer Reihe aus den correspondierenden Elementen beliebig vieler paralleler Reihen dadurch gebildet, dass man dieselben addierte, nachdem man sie in jeder Reihe mit einem und demselben Factor multipliciert hatte, so verschwindet die Determinante; denn sie lässt sich in eine Summe von Determinanten zerlegen, welche einzeln verschwinden (vgl. Art. 9), z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 x + b_3 y + c_3 z \\ a_4 & b_4 & c_4 & a_4 x + b_4 y + c_4 z \end{vmatrix} = 0.$$

e) Ist in einer Reihe nur ein Element von Null verschieden, so reduciert sich die Determinante auf das Product dieses Elementes mit seiner Unterdeterminante; denn bei der Entwicklung nach jener Reihe verschwindet nur dieses Product nicht, wenn die Unterdeterminante des Elementes nicht Null ist, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Man kann dies benutzen, um den Grad einer Determinante zu reducieren, indem man durch eine Serie von Transformationen die Elemente einer Reihe bis auf eines zum Verschwinden bringt, z. B.

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-2\times 3 & 2-2\times 1 & 5-2\times 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10-3\times 3 & 3-3\times 1 & 8-3\times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 . \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & 2 \\ 17 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-3\times 2 & 2 & 3 \\ 11-3\times 3 & 3 & 2 \\ 17-3\times 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2-2\times 1 & 3-3\times 1 \\ 2 & 3-2\times 2 & 2-3\times 2 \\ 2 & 5-2\times 2 & 2-3\times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 . \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8.$$

Anderseits kann man auch, wenn nöthig, den Grad einer Determinante beliebig erhöhen, ohne ihren Wert zu ändern, indem man dieselbe rändert, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

f) Wenn alle Elemente einer Determinante verschwinden, welche auf einer Seite der Hauptdiagonale liegen, so reduciert sich dieselbe auf das Product der Elemente, welche dieser Diagonalreihe angehören:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

Dasselbe gilt für die zweite Diagonale, nur ist das Vorzeichen durch den Factor $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ zu bestimmen, denn man kann durch $\frac{n(n-1)}{2}$ Vertauschungen paralleler Reihen die Determinante so umgestalten, dass die Elemente der zweiten Diagonale in die erste gelangen.

11. Product von zwei Determinanten. Die Multiplicationsregel gibt an, wie das Product von zwei Determinanten gleichen Grades durch eine Determinante desselben Grades darzustellen ist. Man gelangt dazu durch folgende Betrachtungen:

a) Setzt man

$$A = a_{11};\ B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

und bildet die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

so ist (Art. 10, *e*)

$$C = a_{11} . B = A B.$$

b) Es sei nun

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

und man bilde die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung nach der ersten Colonne liefert

$$C = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

und weiter (Pkt. *a*)

$$C = a_{11}\,a_{22}\,B - a_{21}\,a_{12}\,B = (a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})\,B.$$

Daher ist

$$C = A \,.\, B.$$

c) Ferner sei

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

und man bilde die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix};$$

durch Entwicklung nach der ersten Colonne erhält man

$$C = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & x_{31} & \cdots & x_{3n} \\ 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & x_{31} & \cdots & x_{3n} \\ 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

und weiter (Pkt. *b*)

$$C = a_{11} A_{11} B + a_{21} A_{21} B + a_{31} A_{31} B =$$
$$= (a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}) B;$$

also ist wieder

$$C = A \,.\, B.$$

d) Setzt man das im vorstehenden eingeschlagene Verfahren fort, indem man den Grad der Determinante A nach und nach immer höher werden lässt, so erkennt man, dass für

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

die Determinante C vom Grade $k + n$ das Product der Determinanten A und B vom Grade k und n darstellt:

$$C = A \,.\, B;$$

ebenso ist leicht einzusehen, dass auch

$$C' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ x_{11} & \dots & x_{1k} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = AB.$$

Überdies wird an dem Resultate nichts geändert, wenn man eine der Determinanten A und B — oder beide — transponiert.

Die Elemente x_{ik} üben auf das Ergebnis keinen Einfluss, können daher ganz willkürlich angenommen werden.

e) Demnach lässt sich das Product der Determinanten n^{ten} Grades

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

durch eine Determinante vom Grade $2n$ darstellen. Setzt man behufs zweckmäßiger Umformung $x_{ii} = -1$; $x_{ik} = 0$ und transponiert die Determinante B, so ist

$$C = AB = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{n1} \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & b_{32} & \dots & b_{n2} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & b_{13} & b_{23} & b_{33} & \dots & b_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

In der Determinante rechts lassen sich die Colonnen $n+1$ bis $2n$ auf folgende Art transformieren:

Nachdem man die Elemente der Colonnen 1 bis n mit b_{11}, b_{12}, b_{13}, ... b_{1n} multipliciert hat, addiert man sie zu den correspondierenden Elementen der Colonne $n+1$; nachdem man die Elemente derselben Colonnen mit b_{21}, b_{22}, b_{23}, ... b_{2n} multipliciert, addiert man sie zu den correspondierenden Elementen der Colonne $n+2$; die mit b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, ... b_{in} multiplicierten Elemente der Colonnen 1 bis n werden zu jenen der Colonne $n+i$ hinzuaddiert u. s. w., bis die Transformation aller Colonnen, welche Elemente b_{ik} enthalten, vollzogen ist. Die Productdeterminante nimmt hiedurch die Form an:

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

worin die Elemente c aus den Elementen a und b derart componiert sind, dass

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + a_{i3} b_{k3} + \dots + a_{in} b_{kn}.$$

Vertauscht man der Reihe nach die n letzten Colonnen successive mit den vorhergehenden, was zusammen $n \cdot n = n^2$ Vertauschungen bedingt, so wird

$$C = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

oder (Pkt. *d*)

$$C = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} . (-1)^n.$$

Da nun $(-1)^{n^2} . (-1)^n = (-1)^{n(n+1)} = +1$, weil $n(n+1)$ eine gerade Zahl ist, erhält man schließlich

$$AB = C = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wenn $c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + a_{i3} b_{k3} + \dots + a_{in} b_{kn} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{ks}$;

$$i = 1, 2, 3, \dots n; \; k = 1, 2, 3, \dots n,$$

womit die Regel gegeben ist, das Product von zwei Determinanten n^{ten} Grades wieder durch eine Determinante n^{ten} Grades darzustellen.

Indem man eine der miteinander zu multiplicierenden Determinanten, oder auch beide, transponiert, gelangt man noch zu folgenden Ausdrücken für die Elemente der Product-Determinante:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \dots + a_{in} b_{nk} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{sk};$$

$$c_{ik} = a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + a_{3i} b_{k3} + \dots + a_{ni} b_{kn} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{si} b_{ks};$$

$$c_{ik} = a_{1i} b_{1k} + a_{2i} b_{2k} + a_{3i} b_{3k} + \dots + a_{ni} b_{nk} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{si} b_{sk}.$$

Sind zwei Determinanten von verschiedenem Grade nach der Multiplicationsregel zu behandeln, so rändert man die mit geringerem Grade so oft, bis sie den Grad der anderen erlangt.

Die Verification der Multiplicationsregel kann in speciellen Fällen durch Zerlegung erfolgen. Man erhält n^n Determinanten, von welchen nur $n!$ von Null verschieden sind u. s. w.

Beispiele.

α)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} & a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} \\ a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} & a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} & a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} \\ a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} & a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} & a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} \\ a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} & a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} & a_{21} b_{11} \\ a_{11} b_{21} & a_{21} b_{21} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} b_{12} & a_{21} b_{11} \\ a_{12} b_{22} & a_{21} b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} b_{12} & a_{22} b_{12} \\ a_{12} b_{22} & a_{22} b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{11} \\ b_{21} & b_{21} \end{vmatrix} + a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{vmatrix} + a_{12} a_{22} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

β)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 & a_2 x_1 + b_2 y_1 \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 & a_2 x_2 + b_2 y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 & b_1 x_1 + b_2 x_2 \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 & b_1 y_1 + b_2 y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_2 & a_2 x_1 + b_2 x_2 \\ a_1 y_1 + b_1 y_2 & a_2 y_1 + b_2 y_2 \end{vmatrix}$$

γ)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} & a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{23} & a_{11} b_{31} + a_{12} b_{32} + a_{13} b_{33} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} + a_{23} b_{13} & a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} & a_{21} b_{31} + a_{22} b_{32} + a_{23} b_{33} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{12} + a_{33} b_{13} & a_{31} b_{21} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{23} & a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33} \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

δ)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 & b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 & c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 & b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 & c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

$$C = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

oder (Pkt. *d*)

$$C = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} . (-1)^n.$$

Da nun $(-1)^{n^2} . (-1)^n = (-1)^{n(n+1)} = +1$, weil $n(n+1)$ eine gerade Zahl ist, erhält man schließlich

$$A\,B = C = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wenn $c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + a_{i3} b_{k3} + \dots + a_{in} b_{kn} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{ks}$;

$$i = 1, 2, 3, \dots n; \; k = 1, 2, 3, \dots n,$$

womit die Regel gegeben ist, das Product von zwei Determinanten n^{ten} Grades wieder durch eine Determinante n^{ten} Grades darzustellen.

Indem man eine der miteinander zu multiplicierenden Determinanten, oder auch beide, transponiert, gelangt man noch zu folgenden Ausdrücken für die Elemente der Product-Determinante:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \dots + a_{in} b_{nk} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{sk};$$

$$c_{ik} = a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + a_{3i} b_{k3} + \dots + a_{ni} b_{kn} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{si} b_{ks};$$

$$c_{ik} = a_{1i} b_{1k} + a_{2i} b_{2k} + a_{3i} b_{3k} + \dots + a_{ni} b_{nk} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{si} b_{sk}.$$

Sind zwei Determinanten von verschiedenem Grade nach der Multiplicationsregel zu behandeln, so rändert man die mit geringerem Grade so oft, bis sie den Grad der anderen erlangt.

Die Verification der Multiplicationsregel kann in speciellen Fällen durch Zerlegung erfolgen. Man erhält n" Determinanten, von welchen nur n! von Null verschieden sind u. s. w.

Beispiele.

α)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} & a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} \\ a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} & a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} & a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} \\ a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} & a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} & a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} \\ a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} & a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} & a_{21} b_{11} \\ a_{11} b_{21} & a_{21} b_{21} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} b_{12} & a_{21} b_{11} \\ a_{12} b_{22} & a_{21} b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} b_{12} & a_{22} b_{12} \\ a_{12} b_{22} & a_{22} b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{11} \\ b_{21} & b_{21} \end{vmatrix} + a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{vmatrix} + a_{12} a_{22} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

β)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 & a_2 x_1 + b_2 y_1 \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 & a_2 x_2 + b_2 y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 & b_1 x_1 + b_2 x_2 \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 & b_1 y_1 + b_2 y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_2 & a_2 x_1 + b_2 x_2 \\ a_1 y_1 + b_1 y_2 & a_2 y_1 + b_2 y_2 \end{vmatrix}$$

γ)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} & a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{23} & a_{11} b_{31} + a_{12} b_{32} + a_{13} b_{33} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} + a_{23} b_{13} & a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} & a_{21} b_{31} + a_{22} b_{32} + a_{23} b_{33} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{12} + a_{33} b_{13} & a_{31} b_{21} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{23} & a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33} \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

δ)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 & b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 & c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 & b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 & c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

$$\varepsilon)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{21} a_{11} + a_{22} a_{12} \\ a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{vmatrix}.$$

$$\varkappa)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

$$\lambda)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 x_1 + d_1 y_1 & c_2 x_1 + d_2 y_1 & c_3 x_1 + d_3 y_1 & c_4 x_1 + d_4 y_1 \\ c_1 x_2 + d_1 y_2 & c_2 x_2 + d_2 y_2 & c_3 x_2 + d_3 y_2 & c_4 x_2 + d_4 y_2 \end{vmatrix}.$$

12. Erweiterung des Multiplications-Verfahrens. Eine Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{\nu 1} & c_{\nu 2} & \cdots & c_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

deren Elemente aus je zwei Zeilen der »rechteckigen« Matrićes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{\nu 1} & \cdots & b_{\nu n} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{\nu 1} & \cdots & b_{\nu n} \end{vmatrix}$$

derart componiert sind, dass

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \cdots + a_{in} b_{kn},$$

ist gleich der Summe der $\binom{n}{\nu}$ Producte von je zwei, aus correspondierenden ν Colonnen jeder Matrix gebildeten Determinanten, wenn $\nu < n$; diese Summe zieht sich zu einem einzigen Producte zusammen, wenn $\nu = n$; die auf die angegebene Art componierte Determinante verschwindet, wenn $\nu > n$. Der Beweis kann in speciellen Fällen durch Zerlegung erbracht werden.

Symbolisch pflegt man

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1\nu} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ c_{\nu 1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{\nu 1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{\nu n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ b_{\nu 1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{\nu n} \end{vmatrix}$$

zu setzen, wo aber rechts natürlich keine eigentliche Productbildung, sondern nur die Composition einer Determinante nach der Multiplicationsregel gemeint ist, sobald $\nu \gtrless n$.

Beispiele.

α)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} & a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} + a_{23} b_{13} & a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

β)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 & a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 & a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

γ)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2$$

δ)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 + d_1 \delta_1 & a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2 + d_1 \delta_2 & a_1 \alpha_3 + b_1 \beta_3 + c_1 \gamma_3 + d_1 \delta_3 \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1 + d_2 \delta_1 & a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 + d_2 \delta_2 & a_2 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + c_2 \gamma_3 + d_2 \delta_3 \\ a_3 \alpha_1 + b_3 \beta_1 + c_3 \gamma_1 + d_3 \delta_1 & a_3 \alpha_2 + b_3 \beta_2 + c_3 \gamma_2 + d_3 \delta_2 & a_3 \alpha_3 + b_3 \beta_3 + c_3 \gamma_3 + d_3 \delta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 b_1 d_1 \\ a_2 b_2 d_2 \\ a_3 b_3 d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \delta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \delta_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \delta_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 c_1 d_1 \\ a_2 c_2 d_2 \\ a_3 c_3 d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \gamma_1 \delta_1 \\ \alpha_2 \gamma_2 \delta_2 \\ \alpha_3 \gamma_3 \delta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \\ \beta_2 \gamma_2 \delta_2 \\ \beta_3 \gamma_3 \delta_3 \end{vmatrix}.$$

$$\varepsilon) \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 \\ a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1 + d_2 d_1 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 + d_3 d_1 & a_3 a_2 + b_3 b_2 + c_3 c_2 + d_3 d_2 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + d_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 b_1 d_1 \\ a_2 b_2 d_2 \\ a_3 b_3 d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 c_1 d_1 \\ a_2 c_2 d_2 \\ a_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}^2.$$

$$\varkappa) \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 & a_1 x_2 + b_1 y_2 & a_1 x_3 + b_1 y_3 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 & a_2 x_2 + b_2 y_2 & a_2 x_3 + b_2 y_3 \\ a_3 x_1 + b_3 y_1 & a_3 x_2 + b_3 y_2 & a_3 x_3 + b_3 y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

---

3. Abschnitt.

Determinanten besonderer Art.

13. Die Reciproke einer Determinante und deren Unterdeterminanten. Werden die Unterdeterminanten der Elemente einer Determinante in derselben Reihenfolge zu einer Matrix zusammengestellt, so heißt die Determinante dieser Matrix die Reciproke jener Determinante und steht zu ihr in einer eigenthümlichen Beziehung.

a) Es seien

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ A_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{vmatrix}$$

eine Determinante n^{ten} Grades und ihre Reciproke, ferner (Art. 11)

$$A\alpha = \begin{vmatrix} \sum_1^n a_{1s}A_{1s} & \sum_1^n a_{2s}A_{1s} & \sum_1^n a_{3s}A_{1s} & \dots & \sum_1^n a_{ns}A_{1s} \\ \sum_1^n a_{1s}A_{2s} & \sum_1^n a_{2s}A_{2s} & \sum_1^n a_{3s}A_{2s} & \dots & \sum_1^n a_{ns}A_{2s} \\ \sum_1^n a_{1s}A_{3s} & \sum_1^n a_{2s}A_{3s} & \sum_1^n a_{3s}A_{3s} & \dots & \sum_1^n a_{ns}A_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_1^n a_{1s}A_{ns} & \sum_1^n a_{2s}A_{ns} & \sum_1^n a_{3s}A_{ns} & \dots & \sum_1^n a_{ns}A_{ns} \end{vmatrix}.$$

In der Determinante rechts verschwinden sämmtliche Elemente mit Ausnahme jener der Hauptdiagonale, welche den Wert A haben (vergl. Art. 6, *d*), so dass

$$A\alpha = \begin{vmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{vmatrix} = A^n$$

und

$$\alpha = A^{n-1},$$

d. h. die Reciproke einer Determinante n^{ten} Grades ist gleich der $(n - 1)^{ten}$ Potenz der letzteren.

b) Die Unterdeterminante α_{ik} des Elementes A_{ik} der Reciproken kann als Determinante n^{ten} Grades dargestellt werden:

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,k-1} & A_{1k} & A_{1,k+1} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i-1,1} & \dots & A_{i-1,k-1} & A_{i-1,k} & A_{i-1,k+1} & \dots & A_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ A_{i+1,1} & \dots & A_{i+1,k-1} & A_{i+1,k} & A_{i+1,k+1} & \dots & A_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{n,k-1} & A_{nk} & A_{n,k+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Richtigkeit dieser Darstellung zeigt die Entwicklung nach Zeile i. Durch Multiplication mit A erhält man (vgl. Pkt. *a*)

$$A\,\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} A & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{i-1,k} & a_{ik} & a_{i+1,k} & \ldots & a_{n-1,k} & a_{nk} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & A & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A \end{vmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach der Colonne des Elementes a_{ik} (jetzt Colonne i) ergibt sich, weil $(-1)^{i+i} = 1$,

$$A\,.\,\alpha_{ik} = a_{ik} \begin{vmatrix} A & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & A \end{vmatrix} = a_{ik}\,A^{n-1}$$

und

$$\alpha_{ik} = a_{ik}\,A^{n-2},$$

d. h. die Unterdeterminante eines Elementes der Reciproken einer Determinante ist gleich dem correspondierenden Elemente der letzteren, multipliciert mit ihrer $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz.

Beispiele.

α) $$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \alpha = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A^2;$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,A; \quad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} = a_{32}\,A;$$

u. s. w.

β) $$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 13; \quad \alpha = \begin{vmatrix} -10 & 24 & -1 \\ 11 & -29 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 169;$$

$$\alpha_{11} = 39 = 3\,.\,13; \quad \alpha_{32} = 3\,.\,13; \quad \alpha_{21} = 26 = 2\,.\,13$$

u. s. w.

γ) $$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \alpha = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A^3;$$

$$\alpha_{44} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = a_{44} A^2; \quad \alpha_{41} = -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{vmatrix} = a_{41} A^2;$$

u. s. w.

$$\delta) \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0; \; \alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & -7 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man sieht — was auch allgemein bewiesen werden kann — dass bei einer verschwindenden Determinante die Unterdeterminanten der Elemente einer beliebigen Reihe proportional sind den Unterdeterminanten der correspondierenden Elemente einer dazu parallelen Reihe. (Siehe Art. 16, *g*.)

14. Symmetrische Determinanten. Sind in einer Determinante die in Bezug auf eine Diagonale symmetrisch liegenden Elemente einander gleich, so wird dieselbe eine symmetrische genannt. Der Fall der Symmetrie in Bezug auf die zweite Diagonale kann auf jenen in Bezug auf die erste zurückgeführt werden, indem man die 1. Zeile mit der n^{ten}, die 2. mit der $(n-1)^{ten}$ u. s. w. vertauscht, wozu im Ganzen, je nachdem n gerade oder ungerade, $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ Vertauschungen nothwendig sind, welchen entsprechend das Vorzeichen richtigzustellen ist. Die Symmetrie kann auch gleichzeitig in Bezug auf beide Diagonalen vorhanden sein.

Im folgenden soll nur von Determinanten die Rede sein, welche in Bezug auf die Hauptdiagonale symmetrisch sind, bei welchen also $a_{ik} = a_{ki}$, d. h.

$$a_{1k} = a_{k1}; \; a_{2k} = a_{k2}; \; a_{3k} = a_{k3}; \; \ldots \; a_{nk} = a_{kn}.$$

Die Elemente einer beliebigen Colonne k sind also der Reihe nach gleich den Elementen der Zeile k. Bildet man daher aus den k^2 Elementen, welche die Kreuzungspunkte der Colonnen $c_1, c_2, \ldots c_k$ mit den Zeilen $z_1, z_2, \ldots z_k$ einnehmen, eine Determinante; und ebenso eine andere aus den Elementen der Kreuzungspunkte der Colonnen $z_1, z_2, \ldots z_k$ mit den Zeilen $c_1, c_2, \ldots c_k$, so sind diese Determinanten gleich, weil die eine durch Transponierung der anderen erhalten werden kann.

Deshalb sind die Unterdeterminanten der gleichen Elemente a_{ik} und a_{ki} auch einander gleich:

$$A_{ik} = A_{ki}.$$

Die Unterdeterminanten A_{ii} der Elemente a_{ii} der Hauptdiagonale sind symmetrisch. Es sei nun

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdot & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

eine symmetrische Determinante. In der gleichfalls symmetrischen Unterdeterminante A_{nn} möge die Unterdeterminante eines Elementes a_{ik} mit α_{ik} bezeichnet werden. Dann ist (Art. 5, *d*).

$$A = a_{nn} A_{nn} - \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{\substack{k=n-1\\i=n-1}} a_{in} a_{nk} \alpha_{ik}.$$

Unter den Gliedern der Summe rechts kommen solche vor, in welchen $i = k$ und solche, in welchen $i \gtrless k$. Bei den letzteren wieder ist zufolge der Symmetrie $a_{in} a_{nk} \alpha_{ik} = a_{kn} a_{ni} \alpha_{ki}$, daher

$$a_{in} a_{nk} \alpha_{ik} + a_{kn} a_{ni} \alpha_{ki} = 2 a_{in} a_{nk} \alpha_{ik} = 2 a_{in} a_{kn} \alpha_{ik}.$$

Trennt man beide Kategorien von Gliedern, so wird

$$A = a_{nn} A_{nn} - \sum_{i=1}^{i=n-1} a_{in}^2 \alpha_{ii} - \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{\substack{k=n-1\\i=n-1}} 2 a_{in} a_{kn} \alpha_{ik}.$$

Ist speciell $A_{nn} = 0$, also (Art. 13, Beispiel δ, siehe auch Art. 16, *g*).

$$\alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \dots : \alpha_{ii} : \dots : \alpha_{ik} : \dots = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \dots : \alpha_{ki} : \dots : \alpha_{kk} \dots,$$

demnach

$$\alpha_{ii} : \alpha_{ik} = \alpha_{ki} : \alpha_{kk}$$

oder

$$\alpha_{ik} \cdot \alpha_{ki} = \alpha_{ik}^2 = \alpha_{ki}^2 = \alpha_{ii} \alpha_{kk}.$$

so wird

$$A = -\left[\sum a_{in}^2 \alpha_{ii} + 2 \sum a_{in} a_{kn} \sqrt{\alpha_{ii} \alpha_{kk}}\right],$$

wo der Ausdruck in der Klammer ein vollständiges Quadrat ist, so dass schließlich

$$A = -\left[a_{1n} \sqrt{\alpha_{11}} + a_{2n} \sqrt{\alpha_{22}} + \dots + a_{in} \sqrt{\alpha_{ii}} + \dots + a_{n-1,n} \sqrt{\alpha_{n-1,n-1}}\right]^2.$$

Die Vorzeichen der Wurzeln sind derart zu wählen, dass $\sqrt{\alpha_{ii}} \cdot \sqrt{\alpha_{kk}} = \alpha_{ik}$ und nicht etwa $= -\alpha_{ik}$ wird.

Beispiele.

α) In der symmetrischen Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

sei $A_{44} = 0$. Dann ist

$$A = -\left[a_{14}\sqrt{\alpha_{11}} + a_{24}\sqrt{\alpha_{22}} + a_{34}\sqrt{\alpha_{33}}\right]^2.$$

β) In der symmetrischen Determinante

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 16 & 5 \\ 12 & 16 & 102 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

ist

$$A_{44} = 0;\ \alpha_{11} = 50;\ \alpha_{22} = 162;\ \alpha_{33} = 8;$$

folglich

$$A = -\left[2\sqrt{50} + 5\sqrt{162} - 3\sqrt{8}\right]^2 = -\left[10\sqrt{2} + 45\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right]^2 =$$

$$= -2\left[10 + 45 - 6\right]^2 = -2 . 49^2 = -4802.$$

Die Vorzeichen der Wurzeln wurden $+, +, -$ gewählt, weil $\alpha_{12} = +90$; $\alpha_{13} = -20$; $\alpha_{23} = -36$.

4. Abschnitt.

Anwendungen der Determinanten.

15. Lineare Gleichungen. Die allgemeine Gleichung 1. Grades mit n Unbekannten kann in der Form

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_i x_i + \ldots + q_n x_n + q_{n+1} = 0$$

dargestellt werden. Sie geht durch das Verschwinden des constanten Gliedes q_{n+1} in die homogene Gleichung

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_i x_i + \ldots + q_n x_n = 0$$

über. Ein System von Werten der Unbekannten, welche der Gleichung genügen, heißt eine Lösung derselben. Eine Gleichung mit mehreren

Unbekannten hat unendlich viele Lösungen. Wird ein aus mehreren Gleichungen bestehendes System durch ein System von Werten der Unbekannten befriedigt, so heißt dieses eine Lösung des Gleichungssystems. Letzteres hat unendlich viele Lösungen, so lange weniger Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind. Enthält hingegen ein System n von einander unabhängige Gleichungen mit n Unbekannten, so hat es nur eine Lösung.

Die aus mehreren Gleichungen

$$u_1 = 0; \; u_2 = 0; \; \ldots \; u_k = 0$$

componierte Gleichung

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0$$

wird von jeder Lösung der ersteren befriedigt, denn durch Einsetzung verschwinden die einzelnen Glieder des Polynoms der componierten Gleichung. Zur Darstellung der Coëfficienten eines Systems von Gleichungen verwendet man zweckmäßig einen Buchstaben mit zwei Weisern, von welchen der erste die Gleichung, der zweite die Unbekannte anzeigt, zu welcher der Coëfficient gehört.

a) In dem System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1k} x_k + \ldots + a_{1n} x_n + a_{1,n+1} = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2k} x_k + \ldots + a_{2n} x_n + a_{2,n+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ik} x_k + \ldots + a_{in} x_n + a_{i,n+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nk} x_k + \ldots + a_{nn} x_n + a_{n,n+1} = 0, \end{array}$$

deren Polynome mit $u_1, u_2, \ldots u_i, \ldots u_n$ bezeichnet werden mögen, bilden die Coëfficienten eine Matrix von $n(n+1)$ Elementen, welcher nur eine Zeile fehlt, um quadratisch zu sein. Sie wird es durch Hinzufügung einer Zeile von Hilfscoëfficienten

$$a_{n+1,1}, \; a_{n+1,2}, \; \ldots \; a_{n+1,k}, \; \ldots \; a_{n+1,n}, \; a_{n+1,n+1},$$

so dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1k} \dots\dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2k} \dots\dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \dots\dots & a_{ik} \dots\dots & a_{in} & a_{i,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots & a_{nk} \dots\dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} \dots & a_{n+1,k} \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

gebildet werden kann, in welcher die Unterdeterminanten der Elemente der letzten Zeile nur aus Coëfficienten des gegebenen Gleichungssystems zusammengesetzt sind. Die Unterdeterminante $A_{n+1,n+1}$ des Hilfscoëfficienten $a_{n+1,n+1}$ besteht aus den Coëfficienten des Systems mit Ausnahme der constanten Glieder. Multipliciert man die Elemente ihrer Colonne k mit x_k, so erhält man:

$$A_{n+1,n+1}\, x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k}\, x_k \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2k}\, x_k \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{ik}\, x_k \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nk}\, x_k \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

ferner durch Transformation der Colonne k, indem man zu ihren Elementen die mit $x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n$ multiplicierten correspondierenden Elemente der Colonnen $1, 2, \dots k-1, k+1. \dots n$ addiert:

$$A_{n+1,n+1}\, x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1,k-1} & u_1 - a_{1,n+1} & a_{1,k+1} \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{i,k-1} & u_i - a_{i,n+1} & a_{i,k+1} \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{n,k-1} & u_n - a_{n,n+1} & a_{n,k+1} \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

woraus durch Zerlegung

$$A_{n+1,n+1}\, x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & u_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,k-1} & u_i & a_{i,k+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & u_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,n+1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,k-1} & a_{i,n+1} & a_{i,k+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,n+1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

folgt. Durch $n-k$ Vertauschungen lässt sich in der zweiten Determinante rechts die Colonne k der Elemente $a_{i,n+1}$ an die letzte Stelle bringen. Der hiebei auftretende Vorzeichenfactor $(-1)^{n-k} = (-1)^{n+k}$ geht durch Einbeziehung des vorgesetzten negativen Vorzeichens in $(-1)^{(n+1)+k}$ über, so dass die Determinante mit $A_{n+1,k}$ identisch wird. Somit ist schließlich, für beliebige $x_1, x_2, \dots x_k, \dots x_n$ giltig:

$$A_{n+1,n+1}\, x^k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & u_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,k-1} & u_i & a_{i,k+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & u_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + A_{n+1,k}.$$

Ist nun das System $x_1, x_2, \dots x_k, \dots x_n$ die Lösung des gegebenen Gleichungssystems, demnach $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $\dots u_n = 0$, so verschwindet die erste Determinante rechts und es bleibt

$$A_{n+1,n+1}\, x_k = A_{n+1,k}$$

oder

$$x_k = \frac{A_{n+1,k}}{A_{n+1,n+1}}.$$

Setzt man $k = 1, 2 \dots n$, so erhält man

$$x_1 = \frac{A_{n+1,1}}{A_{n+1,n+1}};\ x_2 = \frac{A_{n+1,2}}{A_{n+1,n+1}};\ \dots x_k = \frac{A_{n+1,k}}{A_{n+1,n+1}};\ \dots x_n = \frac{A_{n+1,n}}{A_{n+1,n+1}}.$$

Die Werte der Unbekannten ergeben sich als Brüche, die sämmtlich den Nenner $A_{n+1,n+1}$, hingegen der Reihe nach die Unterdetermi-

nanten $A_{n+1,1}, A_{n+1,2}, \ldots A_{n+1,n}$ der Hilfscoëfficienten als Zähler haben. Die Lösung kann auch in der Form

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_k : \ldots : x_n : 1 = A_{n+1,1} : A_{n+1,2} : \ldots : A_{n+1,k} : \ldots \\ \ldots : A_{n+1,n} : A_{n+1,n+1}$$

dargestellt werden.

Charakteristisch für die Beurtheilung des Gleichungssystems ist die als gemeinschaftlicher Nenner auftretende Determinante $A_{n+1,n+1}$.

Ist dieselbe verschieden von Null: $A_{n+1,n+1} \gtrless 0$, so sind alle Werte endlich, weil kein Zähler unendlich groß werden kann. Die Gleichungen des Systems sind dann von einander unabhängig.

Verschwindet diese Determinante: $A_{n+1,n+1} = 0$, so müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Im ersten Falle sind alle Zähler, ein Theil oder mindestens einer derselben von Null verschieden. Dann ergeben sich für alle Unbekannten unendlich große Werte oder für einen Theil oder mindestens für eine derselben. Den verschwindenden Zählern entsprechen in der Form $\frac{0}{0}$ auftretende, unbestimmte Werte; die Lösung ist der Relation

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_k : \ldots : x_n = A_{n+1,1} : A_{n+1,2} : \ldots : A_{n+1,k} : \ldots : A_{n+1,n}$$

unterworfen. Das Auftreten unendlich großer Werte der Unbekannten deutet darauf hin, dass Gleichungen des Systems einander widersprechen.

Im zweiten Falle verschwinden außer dem Nenner auch alle Zähler der Lösung: $A_{n+1,1} = 0, A_{n+1,2} = 0, \ldots A_{n+1,n} = 0$. Dadurch nehmen alle Werte der Unbekannten die Form $\frac{0}{0}$ an und werden unbestimmt. In diesem Falle sind die Gleichungen nicht mehr unabhängig von einander, sondern es sind eine oder mehrere unter ihnen die Folge anderer Gleichungen des Systems.

Beispiele.

α)

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} = 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{41} \qquad a_{42} \qquad a_{43} \qquad a_{44} \end{array}$$

$$x_1 = \frac{A_{41}}{A_{44}}; \quad x_2 = \frac{A_{42}}{A_{44}}; \quad x_3 = \frac{A_{43}}{A_{44}}.$$

β)
$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_4 \quad b_4 \quad c_4 \quad d_4 \end{array}$$

$$x = \frac{A_4}{D_4}; \; y = \frac{B_4}{D_4}; \; z = \frac{C_4}{D_4}.$$

ζ)
$$\begin{array}{l} 3x + 2y - 16 = 0 \\ 8x - 5y + \;\; 9 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{array}$$

$$x = \frac{A_3}{C_3} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -16 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{18 - 80}{-15 - 16} = \frac{-62}{-31} = 2;$$

$$y = \frac{B_3}{C_3} = \frac{-\begin{vmatrix} 3 & -16 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}{-31} = \frac{-(27 + 128)}{-31} = \frac{155}{31} = 5.$$

δ)
$$\begin{array}{l} 3x - 7y \qquad = 0 \\ \;\; x + 2y - 13 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{array}$$

$$x = \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{91}{13} = 7.$$

$$y = \frac{A_{32}}{A_{33}} = \frac{-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -13 \end{vmatrix}}{13} = \frac{39}{13} = 3.$$

ε)
$$\begin{array}{l} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \\ \;\; x_1 + \;\; x_2 + \;\; x_3 - 6 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{41} \quad a_{42} \quad a_{43} \quad a_{44} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11} = -3; & \alpha_{12} = -8; & \alpha_{13} = \;\; 11; \\ \alpha_{21} = \;\; 8; & \alpha_{22} = -1; & \alpha_{23} = -\;7; \\ \alpha_{31} = \;\; 31; & \alpha_{32} = \;\; 38; & \alpha_{33} = -\;2; \end{array}$$

$$A_{41} = -\left[-4.(-3)+5.\ 8\ -6.\ 31\ \right] = 134;$$

$$A_{42} = -\left[-4.(-8)+5.(-1)-6.\ 38\ \right] = 201;$$

$$A_{43} = -\left[-4.\ 11\ +5.(-7)-6.(-2)\right] = 67;$$

$$A_{44} = \left[1\ .\ 31 + 1\ .\ 38 + 1\ .\ (-2)\right] = 67;$$

(vgl. Art. 5, *e*).

$$x_1 = \frac{A_{41}}{A_{44}} = \frac{134}{67} = 2;\ x_2 = \frac{A_{42}}{A_{44}} = \frac{201}{67} = 3;\ x_3 = \frac{A_{43}}{A_{44}} = \frac{67}{67} = 1.$$

ζ)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

. . . .

$$a_{41}\qquad a_{42}\qquad a_{43}\qquad a_{44}$$

$$A_{41} = 15;\ A_{42} = -9;\ A_{43} = -3;\ A_{44} = 0;$$

$$x_1 = \infty;\ x_2 = \infty;\ x_3 = \infty;$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = 15 : -9 : -3 = 5 : -3 : -1.$$

η)

$$\begin{aligned} x + y + z - 4 &= 0 \\ x + y + z + 3 &= 0 \\ 2x + 2y + 3z - 7 &= 0 \end{aligned}$$

. . . .

$$a_4\qquad b_4\qquad c_4\qquad d_4$$

$$A_4 = 7;\ B_4 = -7;\ C_4 = 0;\ D_4 = 0;$$

$$x = \infty;\ y = -\infty;\ z = \frac{0}{0};$$

$$x : y : z = 7 : -7 : 0 = 1 : -1 : 0.$$

ϑ)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z + 1 &= 0;\quad u = 0 \\ x + 2y + 3z + 2 &= 0;\quad v = 0 \\ 5x + 8y + 11z + 4 &= 0;\quad w = 0 \end{aligned}$$

. . . .

$$a_4\qquad b_4\qquad c_4\qquad d_4$$

$$A_4 = 0;\ B_4 = 0;\ C_4 = 0;\ D_4 = 0;$$

$$x = \frac{0}{0};\ y = \frac{0}{0};\ x = \frac{0}{0};$$

$$-2u - v + w = 0;\ v = -2u + w$$

(eine Gleichung Folge der anderen).

b) Ein System von $n+1$ linearen Gleichungen mit n Unbekannten, kann nur dann bestehen, d. h. eine Lösung haben, wenn mindestens eine Gleichung von allen oder einem Theile der übrigen abhängt, wenn also zwischen den Coëfficienten eine gewisse Beziehung besteht. Diese erhält man durch Einsetzung der Lösung von n Gleichungen in die übrigbleibende.

Bei dem System

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}\,x_1 & +a_{12}\,x_2 & +\ldots & +a_{1n}\,x_n & +a_{1,n+1} & =0\\
a_{21}\,x_1 & +a_{22}\,x_2 & +\ldots & +a_{2n}\,x_n & +a_{2,n+1} & =0\\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
a_{n1}\,x_1 & +a_{n2}\,x_2 & +\ldots & +a_{nn}\,x_n & +a_{n,n+1} & =0\\
a_{n+1,1}\,x_1 & +a_{n+1,2}\,x_2 & +\ldots & +a_{n+1,n}\,x_n & +a_{n+1,n+1} & =0
\end{array}$$

kann man z. B. die Lösung der Gleichungen 1 bis n mit Hilfe der Coëfficienten der letzten Gleichung darstellen:

$$x_1=\frac{A_{n+1,1}}{A_{n+1,n+1}};\quad x_2=\frac{A_{n+1,2}}{A_{n+1,n+1}},\;\ldots\; x_n=\frac{A_{n+1,n}}{A_{n+1,n+1}}$$

und in diese einsetzen. Multipliciert man dann mit $A_{n+1,n+1}$, so folgt

$$a_{n+1,1}\,A_{n+1,1}+a_{n+1,2}\,A_{n+1,2}+\ldots+a_{n+1,n}\,A_{n+1,n}+ \\ +a_{n+1,n+1}\,A_{n+1,n+1}=0,$$

d. h.

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} & a_{1,n+1}\\
a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} & a_{2,n+1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} & a_{n,n+1}\\
a_{n+1,1} & a_{n+1,2} \ldots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1}
\end{vmatrix}=0.$$

Die gesuchte Beziehung besteht also darin, dass die aus den Coëfficienten der $n+1$ Gleichungen gebildete Determinante verschwinden muss. Sie ist aus dem Gleichungssystem durch die »Elimination« der Unbekannten hervorgegangen.

Beispiele.

α) Für das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}&=0\\
a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}&=0\\
a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}&=0
\end{aligned}$$

ist erforderlich, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

β) Die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 &= 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 &= 0 \end{aligned}$$

haben nur dann eine gemeinschaftliche Lösung, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

γ) Die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 5z - 4 &= 0 \\ 6x - 5y - 2z + 5 &= 0 \\ x + y + z - 6 &= 0 \\ x - 3y - 8z + 15 &= 0 \end{aligned}$$

können zusammen bestehen, weil

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & -4 \\ 6 & -5 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & -8 & 15 \end{vmatrix} = 0.$$

Irgend drei derselben haben die Lösung

$$x = 2;\ y = 3;\ z = 1,$$

welche auch der vierten genügt.

c) Das System

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots\ldots + a_{nn} x_n &= 0 \end{aligned}$$

von n homogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten wird offenbar immer von der Lösung

$$x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0$$

befriedigt. Sind alle Gleichungen von einander unabhängig, so können sie auch keine andere Lösung haben. Letzteres kann aber möglich sein, wenn zwischen den Gleichungen, also auch ihren Coëfficienten eine Beziehung besteht. Eine solche kann auf folgendem Wege ermittelt werden: Man dividiert alle Gleichungen durch x_n, wodurch sich das System

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\frac{x_1}{x_n} + a_{12}\frac{x_2}{x_n} + \dots\dots + a_{1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} + a_{1n} = 0 \\
\vdots \\
a_{n-1,1}\frac{x_1}{x_n} + a_{n-1,2}\frac{x_2}{x_n} + \dots\dots + a_{n-1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} + a_{n-1,n} = 0 \\
a_{n1}\frac{x_1}{x_n} + a_{n2}\frac{x_1}{x_n} + \dots\dots + a_{n,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} + a_{nn} = 0
\end{array}
$$

von n nicht homogenen Gleichungen mit den $n-1$ Unbekannten

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots\dots \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

ergibt, welches nur bestehen kann, wenn die Determinante der Coëfficienten verschwindet. Multipliciert man in dieser die Elemente der Colonne k mit x_k und transformiert sie dann, indem man die mit x_1, $x_2, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n$ multiplicierten correspondierenden Elemente der Colonnen $1, 2, \dots k-1, k+1, \dots n$ zu ihren Elementen addiert, so folgt

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & u_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & u_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & u_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} = 0
$$

oder

$$A_{1k}u_1 + A_{2k}u_2 + \dots + A_{ik}u_i + \dots + A_{nk}u_n = 0,$$

woraus zu ersehen, dass dann eine Gleichung die Folge der übrigen oder doch eines Theiles der übrigen, daher überflüssig ist. Scheidet man diese — es sei etwa die letzte — aus, so ergibt sich für die übrigen:

$$\frac{x_1}{x_n} : \frac{x_2}{x_n} : \dots : \frac{x_k}{x_n} : \dots : \frac{x_{n-1}}{x_n} : 1 = A_{n1} : A_{n1} : \dots : A_{nk} : \dots : A_{n,n-1} : A_{nn}$$

oder

$$x_1 : x_2 : \dots : x_k : \dots : x_{n-1} : x_n = A_{n1} : A_{n2} : \dots : A_{nk} : \dots : A_{n,n-1} : A_{nn}.$$

Also lässt sich aus $n-1$ homogenen Gleichungen mit n Unbekannten das Verhältnis der letzteren bestimmen. Ist jetzt m eine beliebige Zahl, so stellt das System

$$x_1 = m A_{n1};\ x_2 = m A_{n2};\ \ldots\ x_k = m A_{nk};\ \ldots\ x_n = m A_{nn}$$

alle Lösungen derselben vor, deren Anzahl unendlich groß ist und die insgesammt auch die n^{te} Gleichung befriedigen. Verschwinden alle Unterdeterminanten $A_{n1}, A_{n2}, \ldots A_{nn}$, so kann dies ein Zeichen sein, dass die ausgeschiedene Gleichung nicht überflüssig war, sondern dass eine andere hätte ausgeschieden werden sollen. Ist das aber nicht der Fall, dann ist noch eine zweite Gleichung überflüssig u. s. w.

Beispiele

α) Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= 0 \end{aligned}$$

hat nur dann von Null verschiedene Lösungen, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Die erste Gleichung gibt

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \text{ oder } x_1 = -m a_{12};\ x_2 = m a_{11}.$$

Durch Einsetzung geht die linke Seite der zweiten Gleichung in

$$-m a_{21} a_{12} + m a_{11} a_{22} = m (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})$$

über; die zweite Gleichung wird also befriedigt, wenn die Bedingungsgleichung erfüllt ist.

β) Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 0 \end{aligned}$$

hat nur dann gemeinsame, nicht verschwindende Lösungen, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung folgt

$$x : y : z = A_3 : B_3 : C_3$$

oder

$$x = m A_3;\ y = m B_3:\ z = m C_3$$

und wenn man in die dritte einsetzt:

$$m (a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3) = 0.$$

γ) Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 5x + y + 7z &= 0 \\ \dots\dots\dots&\dots\dots \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 & \end{aligned}$$

geben

$$x:y:z = A_3:B_3:C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 11:8:-9$$

oder

$$x = 11\,m;\ y = 8\,m;\ z = -9\,m.$$

δ) Bei dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 5u &= 0 \\ 2x + y + z + 3u &= 0 \\ x + 2y + 2z + u &= 0 \\ \dots\dots\dots&\dots\dots \\ a_4 \quad b_4 \quad c_4 \quad d_4 & \end{aligned}$$

findet man

$$A_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5;\ B_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12;$$

$$C_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11;\ D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

daher

$$x : y : z : u = -5 : 12 : -11 : 3$$

und

$$x = -5\,m;\ y = 12\,m;\ z = -11\,m;\ u = 3\,m.$$

ε) Die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0;\ u_1 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0;\ u_2 = 0 \\ 7x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= 0;\ u_3 = 0 \\ 8x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 0;\ u_4 = 0 \end{aligned}$$

können zusammen bestehen, weil

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 12 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Ausscheidung der letzten Gleichung findet man

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44} = 0 : 0 : 0 : 0,$$

was auf eine zweite überflüssige Gleichung schließen lässt. In der That ist

$$u_3 = 2u_1 + u_2;\ u_4 = u_1 + 2u_2.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung folgt für

$$x_3 = \alpha;\; x_4 = \beta$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -(23\alpha - \beta) : 7(\alpha - \beta) : 11\alpha : 11\beta,$$

woraus sich bei beliebigen α und β unendlich viele Serien von Verhältniszahlen ergeben.

16. Vermischte Aufgaben. Bei verschiedenen Untersuchungen kommt es darauf an, Ausdrücke in solcher Form darzustellen, dass gewisse Eigenschaften derselben hervortreten. Im nachfolgenden soll gezeigt werden, in welcher Art hiebei die Determinanten verwendet werden können.

a) Durch Entwicklung der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

nach den Colonnen findet man die identischen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\triangle &= x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2),\\
\triangle &= y_1\,(x_3 - x_2) + y_2\,(x_1 - x_3) + y_3\,(x_2 - x_1),\\
\triangle &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1).
\end{aligned}$$

b) Durch directe Entwicklung der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix}$$

nach der ersten Colonne findet man

$$\triangle = t_2 t_3 (t_3 - t_2) + t_3 t_1 (t_1 - t_3) + t_1 t_2 (t_2 - t_1).$$

Hingegen durch Transformation der zweiten und dritten Zeile

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 0 & t_2 - t_1 & t_2^2 - t_1^2 \\ 0 & t_3 - t_1 & t_3^2 - t_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_2 - t_1 & (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) \\ t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 + t_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (t_2 - t_1)(t_3 - t_1) \begin{vmatrix} 1 & t_2 + t_1 \\ 1 & t_3 + t_1 \end{vmatrix} = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2).$$

c) Entwickelt man die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 \beta_1 & \beta_1^2 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 \beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3 \beta_3 & \beta_3^2 \end{vmatrix}$$

nach den Colonnen, so findet man

$$\triangle = \alpha_1{}^2\beta_2\beta_3(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \alpha_2{}^2\beta_3\beta_1(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \alpha_3{}^2\beta_1\beta_2(\alpha_1\beta_2 - a_2\beta_1),$$

$$\triangle = \alpha_1\beta_1(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \alpha_2\beta_2(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \\ + \alpha_3\beta_3(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1),$$

$$\triangle = \beta_1{}^2\alpha_2\alpha_3(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \beta_2{}^2\alpha_3\alpha_1(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \beta_3{}^2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Anderseits ist (vgl. Art. 8)

$$\triangle = \alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\alpha_3{}^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{\beta_1}{\alpha_1} & \frac{\beta_1{}^2}{\alpha_1{}^2} \\ 1 & \frac{\beta_2}{\alpha_2} & \frac{\beta_2{}^2}{\alpha_2{}^2} \\ 1 & \frac{\beta_3}{\alpha_3} & \frac{\beta_3{}^2}{\alpha_3{}^2} \end{vmatrix} = \alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\alpha_3{}^2\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\beta_3}{\alpha_3} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\beta_3}{\alpha_3} - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) =$$

$$= \alpha_1\alpha_2\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) . \alpha_1\alpha_3\left(\frac{\beta_3}{\alpha_3} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) . \alpha_2\alpha_3\left(\frac{\beta_3}{\alpha_3} - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)$$

und schließlich auch

$$\triangle = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\ (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\ (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2).$$

d) Wenn die Unterdeterminanten der symmetrischen Determinante

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ (a_{ik} = a_{ki})$$

mit $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots$ bezeichnet werden und man zerlegt die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} + 0 & a_{13} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} - \rho & a_{23} + 0 \\ a_{31} + 0 & a_{32} + 0 & a_{33} - \rho \end{vmatrix}$$

$$(a_{ik} = a_{ki})$$

in acht Determinanten u. s. w., so erhält man schließlich

$$\triangle = -\rho^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\rho^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\rho + A_{44}.$$

e) Wenn

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ und } A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

so findet man

$$A_{11}A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32}A_{33} & a_{33}A_{33} \end{vmatrix}$$

und durch Transformation der dritten Zeile, indem man zu ihren Elementen die mit A_{13}, A_{23} multiplicierten der ersten und zweiten addiert

$$A_{11}\,A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ A_{13} & 0 & A \end{vmatrix} = a_{22}\,A + A_{13}\,A_{31},$$

demnach (vgl. Art. 13, *b*)

$$A_{11}\;A_{33} - A_{13}\,A_{31} = a_{22}\,A.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$A_{22}\;A_{33} - A_{23}\,A_{32} = a_{11}\,A$$
$$A_{13}\;A_{32} - A_{12}\,A_{33} = a_{21}\,A$$

u. s. w.

Ist nun $a_{ik} = a_{ki}$, daher $A_{ik} = A_{ki}$; ferner $A_{33} = 0$, so bestehen die Gleichungen

$$-A_{13}{}^2 = a_{22}\,A;\quad -A_{23}{}^2 = a_{11}\,A;\quad A_{13}\,A_{23} = a_{12}\,A.$$

f) Gegeben sei

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ und } A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Multipliciert man die letzte Zeile von A_{11} mit A_{44} und addiert dann zu ihren Elementen die mit A_{14}, A_{24}, A_{34} multiplicierten der 1., 2. und 3. Zeile, so erhält man

$$A_{11}\,A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ A_{14} & 0 & 0 & A \end{vmatrix} = A\,.\,\alpha_{11} + A_{14}\,A_{41},$$

wo α_{11} die Unterdeterminante von a_{11} in A_{44} bedeutet. Demnach ist

$$A_{11}\,A_{44} - A_{41}\,A_{14} = \alpha_{11}\,A.$$

Auf dieselbe Art findet man

$$A_{23}\,A_{44} - A_{24}\,A_{43} = \alpha_{23}\,A$$

u. s. w.

Ist nun $a_{ik} = a_{ki}$, daher $A_{ik} = A_{ki}$; ferner $A_{44} = 0$, so gelten die Gleichungen:

$$A_{14}^2 = -\alpha_{11} A; \; A_{14} A_{24} = -\alpha_{12} A;$$
$$A_{24}^2 = -\alpha_{22} A; \; A_{14} A_{34} = -\alpha_{13} A;$$
$$A_{34}^2 = -\alpha_{33} A; \; A_{24} A_{34} = -\alpha_{23} A.$$

g) Wenn

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

so bestehen die drei homogenen Gleichungen

$$a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = 0;$$
$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} = 0;$$
$$a_{31} A_{11} + a_{32} A_{12} + a_{33} A_{13} = 0$$

neben einander und liefern

$$A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{31} : A_{32} : A_{33} = A_{21} : A_{22} : A_{23}$$

u. s. w.

Diese Aufgabe lässt sich leicht verallgemeinern und führt zu dem Satze:

Wenn eine Determinante verschwindet, verhalten sich die Unterdeterminanten der Elemente einer Reihe zueinander wie die Unterdeterminanten der correspondierenden Elemente einer zu ihr parallelen Reihe.

ZWEITER THEIL.

Grundzüge der projectivischen Geometrie.

I. Abschnitt.

Grundbegriffe.

1. Einleitung. Die projectivische Geometrie setzt aus Punkten, Geraden und Ebenen eine Reihe einfacher Gebilde — Grundgebilde — zusammen und untersucht deren gegenseitige Beziehungen, so wie die Eigenschaften der von ihnen erzeugten Gebilde. Indem sie die letzteren wieder mit den Grundgebilden oder untereinander in Beziehung bringt und auf diesem Wege allmählich fortschreitet, bietet sie ein Mittel, geometrische Wahrheiten complicierterer Natur durch die Vorstellung zu erfassen.

Für die präcise Darstellung ihrer Lehren hat die projectivische Geometrie eine Anzahl eigenthümlicher Begriffe aufgestellt, die im folgenden erörtert werden sollen.

2. Benennungen und Operationen. Ein Punkt kann in einer Geraden oder in einer Ebene, eine Gerade in einem Punkte oder in einer Ebene, eine Ebene in einem Punkte oder in einer Geraden liegen. Von Geraden und Ebenen sagt man gewöhnlich: eine Gerade geht durch einen Punkt, eine Ebene geht durch einen Punkt oder durch eine Gerade.

In den geometrischen Gebilden treten Punkt, Gerade und Ebene als Elemente oder als Träger von Elementen auf. Im ersteren Falle sind sie die Bestandtheile des Gebildes und werden für sich allein gedacht, während sie im letzteren Falle für die Zusammenfassung eines Complexes von Elementen zu einem Gebilde dienen.

Aus einem Punkte wird ein System von Punkten und Geraden durch die Geraden und Ebenen »projiciert«, welche ihn mit den Punkten und Geraden des Systems verbinden. Die Gesammheit der projicierenden Geraden und Ebenen heißt der »Schein« des Systems.

Aus einer Geraden wird ein System von Punkten durch die Ebenen projiciert, welche sie mit den Punkten des Systems verbinden.

Die Gesammtheit der Punkte und Geraden, nach welchen ein System von Geraden und Ebenen von einer Ebene geschnitten wird, heißt ein »ebener Schnitt« oder kurzweg »Schnitt« des Systems. Mit diesem Namen bezeichnet man auch die Gesammtheit der Punkte, in welchen ein System von Ebenen oder Geraden von einer Geraden getroffen wird.

Ein Punkt ist der Träger aller Geraden und Ebenen, die in ihm liegen (durch ihn gehen). Ebenso ist eine Gerade oder Ebene der Träger aller Punkte und Ebenen oder Punkte und Geraden, die in ihr liegen.

3. Grundgebilde. Man unterscheidet Grundgebilde erster, zweiter und dritter Stufe.

Die Gesammtheit der Punkte einer Geraden heißt eine »Punktreihe«. Die Punkte sind die Elemente, die Gerade ist der Träger der Punktreihe.

Die Gesammtheit der Geraden eines Punktes, die zugleich in derselben Ebene liegen, heißt ein »Strahlenbüschel«. Die Geraden sind die Elemente des Strahlenbüschels und werden als solche »Strahlen« genannt. Als Träger des Strahlenbüschels kann nach Umständen der Punkt (Mittelpunkt) oder die Ebene gelten.

Die Gesammtheit der Ebenen einer Geraden heißt ein »Ebenenbüschel«. Die Ebenen sind die Elemente, die Gerade ist der Träger (die Axe) des Ebenenbüschels.

Durch Projection einer Punktreihe aus einem Punkte oder einer Geraden entsteht ein Strahlen- oder ein Ebenenbüschel, das offenbar ebensoviel Elemente hat wie die Punktreihe. Man kann daher allen drei Gebilden die gleiche Anzahl von Elementen zuschreiben, sie auf eine Stufe stellen und nennt sie die »Grundgebilde erster Stufe« oder auch die »einförmigen Grundgebilde«.

Die Gesammtheit der Punkte und Geraden einer Ebene heißt das »ebene System«. Die Ebene ist der Träger des ebenen Systems und wird als solcher auch das »Feld« genannt. Denkt man das ebene System bloß aus Punkten oder bloß aus Geraden bestehend, so kann ihm der Name »Punkt- oder Strahlenfeld« gegeben werden.

Die Gesammtheit der Strahlen und Ebenen eines Punktes heißt ein »Strahlen- oder Ebenenbündel«, dessen Träger (Mittelpunkt) der

Punkt ist. Man kann dieses Gebilde auch allgemein als »Bündel« bezeichnen und die Gesammtheit der Strahlen eines Punktes ein Strahlenbündel, die Gesammtheit der Ebenen eines Punktes ein Ebenenbündel nennen.

Der Schein eines ebenen Systems aus einem außerhalb seines Trägers liegenden Punkte ist ein Strahlenbündel. Beide haben daher gleich viel Elemente und können auf dieselbe Stufe gestellt werden. Da aber das erste unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel, das letztere unendlich viele Strahlen- und Ebenenbüschel enthält, stehen beide auf einer höheren Stufe als die einförmigen Gebilde. Man nennt sie deshalb »die Grundgebilde zweiter Stufe«.

Der unbegrenzte Raum mit allen in ihm enthaltenen Punkten, Geraden und Ebenen heißt das »räumliche System«. Dieses enthält unendlich viele Grundgebilde erster und zweiter Stufe und wird deshalb das »Grundgebilde dritter Stufe« genannt.

In allen Grundgebilden sind Geraden und Ebenen unbegrenzt, die Elemente starr und unveränderlich miteinander verbunden zu denken.

4. Unendlich ferne Elemente. Zwei Geraden einer Ebene schneiden sich entweder in einem Punkte oder sie sind parallel. Es bietet Vortheile, diese beiden Aussagen in eine einzige zusammenzufassen, indem man im letzteren Falle sagt, die Geraden schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte. Denkt man eine der Geraden um einen in der Ebene außerhalb der zweiten liegenden Punkt gedreht, so entspricht jeder ihrer Lagen ein einziger Schnittpunkt auf der zweiten Geraden. Wenn die sich drehende Gerade zur zweiten parallel wird und es soll dieser Lage auch ein Punkt der zweiten Geraden entsprechen, so muss derselbe in unendlicher Entfernung liegend gedacht werden; und weil durch den Drehungspunkt nur eine solche Parallele möglich ist, wird jeder Geraden ein und nur ein unendlich ferner Punkt zugeschrieben, dem ein anderer Punkt sich zu nähern strebt, gleichviel nach welcher Seite er sich in der Geraden bewegen möge.

Ähnliche Erwägungen über zwei sich schneidende oder parallele Ebenen führen darauf, in jeder Ebene eine unendlich ferne Gerade anzunehmen, die alle unendlich fernen Punkte der Ebene enthält.

Eine Folge davon ist schließlich die Annahme, dass alle unendlich fernen Punkte des Raumes in einer Ebene liegen. Diese wird nämlich von jeder Geraden in einem unendlich fernen Punkte und von jeder Ebene in einer unendlich fernen Geraden geschnitten.

Die unendlich fernen Elemente werden auch als »uneigentliche« bezeichnet. Sie entziehen sich der Anschauung, führen aber in der Anwendung nicht nur zu keinem

Widerspruch, sondern sind für den Aufbau der projectivischen Geometrie von großem Nutzen, indem sie gestatten, Sätze allgemein auszusprechen, ohne Ausnahmen anführen zu müssen; verschiedene Sätze in einen Satz zusammenzuziehen; Gebilde in bestehende Gruppen einzureihen u. s. w. Ein Beispiel möge dies erläutern:

Mehrere parallele Geraden haben die Richtung oder einen unendlich fernen Punkt, mehrere parallele Ebenen die Stellung oder eine unendlich ferne Gerade gemeinsam. Demnach wird eine Richtung durch einen unendlich fernen Punkt, eine Stellung durch eine unendlich ferne Gerade vertreten. Die Einführung der »uneigentlichen« Elemente erlaubt nun, eine Schar paralleler Geraden als ein Strahlenbündel oder -Büschel, die Schar paralleler Ebenen als ein Ebenenbüschel anzusehen und zu behandeln.

5. Das Beziehen der Grundgebilde aufeinander. Die Grundlage aller Betrachtungen der projectivischen Geometrie bilden die Beziehungen der Grundgebilde zueinander. Zwei Gebilde sind aufeinander »bezogen«, wenn jedem Elemente des einen ein Element des anderen derart zugewiesen ist, dass einer stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des anderen entspricht. Zwei solche, zueinander gehörige Elemente heißen »einander entsprechende« Elemente. Es ist klar, dass auf diese Art nur Gebilde gleicher Stufe aufeinander bezogen werden können.

Am anschaulichsten stellt sich die Beziehung zwischen zwei Grundgebilden dar, wenn das eine ein Schein oder Schnitt des anderen, oder wenn beide Scheine oder Schnitte eines dritten Gebildes sind. Im ersten Falle entspricht jedem Elemente des einen Gebildes jenes Element des anderen, dessen Schein oder Schnitt es ist. Im zweiten Falle entspechen einander solche Elemente der beiden Gebilde, welche von demselben Elemente des dritten Gebildes Scheine oder Schnitte sind.

Wird z. B. eine Punktreihe A B C D . . . aus einem Punkte S projiciert, so entsteht ein Strahlenbüschel und dieses ist der Schein der Punktreihe. Sind dessen Strahlen a, b, c, d, . . . die Scheine der Punkte A, B, C, D, . . ., so entspricht dem Punkte A der Strahl a, dem Punkte B der Strahl b u. s. w.

Sind die Punktreihen $A_1 B_1 C_1 D_1$ . . . und $A_2 B_2 C_2 D_2$ . . . Schnitte desselben Strahlenbüschels a b c d . . . und liegen die Punkte derselben auf den entsprechend bezeichneten Strahlen des Büschels, also A_1 und A_2 auf a, B_1 und B_2 auf b u. s. w. so entsprechen einander die Punkte A_1 und A_2, B_1 und B_2 u. s. w.

Wird ein Strahlenbüschel a b c d . . . aus einem Punkte S durch das Ebenenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ . . . derart projiciert, dass die Ebene α durch den Strahl a, die Ebene β durch den Strahl b geht u. s. w., so entsprechen sich a und α, b und β u. s. w.

Auch nach wiederholten Operationen des Projicierens oder Schneidens ergeben sich aufeinander bezogene Gebilde. Möge z. B. eine Punktreihe A B C D . . . aus einem Punkte durch das Strahlenbüschel a b c d . . . projiciert, letzteres von einer Geraden nach einer Punktreihe $A_1 B_1 C_1 D_1$ . . . geschnitten, diese wieder aus einer anderen Geraden durch das Ebenenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ . . . projiciert werden, so ist das

letztere auf die Punktreihe A B C D . . . derart bezogen, dass sich die Elemente A und α, B und β u. s. w. entsprechen. Man hätte dieses Verfahren noch beliebig weit ausdehnen und auf diese Art eine Reihe von Grundgebilden erhalten können, von welchen irgend zwei »aufeinander bezogen« sind.

Zwei Strahlenbündel als Scheine desselben ebenen Systems erscheinen derart aufeinander bezogen, dass sich je zwei Strahlen oder je zwei Ebenen entsprechen, die Scheine desselben Punktes oder derselben Geraden sind. Es entsprechen einander aber auch je zwei Strahlen- oder Ebenenbüschel, wenn sie Scheine derselben Punktreihe oder desselben Strahlenbüschels sind. Analog sind zwei ebene Systeme als Schnitte desselben Strahlenbündels aufeinander bezogen. Endlich können durch wiederholtes Projicieren und Schneiden ganze Reihen von Gebilden zweiter Stufe abgeleitet werden, von welchen irgend zwei aufeinander bezogen erscheinen.

In allen diesen Fällen kann es sich ergeben, dass einem uneigentlichen Elemente des einen Gebildes ein eigentliches Element des anderen entspricht. Ohne Annahme der unendlich fernen Elemente würden hier Lücken unvermeidlich sein.

6. Das Gesetz der Reciprocität. An geometrischen Aussagen kann die Wahrnehmung gemacht werden, dass aus denselben andere, ebenso richtige Aussagen hervorgehen, wenn man darin die Worte Punkt und Ebene, ferner überhaupt alle Ausdrücke, welche mit diesen Begriffen zusammenhängen, untereinander vertauscht; jene hingegen, die Geraden betreffen, ungeändert lässt oder nur durch gleichbedeutende, aber besser passende Ausdrücke ersetzt.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen, worin die zu vertauschenden Ausdrücke übereinander gestellt sind, so dass bloß die oberen oder bloß die unteren gelesen werden sollen.

Drei $\begin{Bmatrix}\text{Punkte}\\\text{Ebenen}\end{Bmatrix}$ bestimmen $\begin{Bmatrix}\text{eine Ebene}\\\text{einen Punkt}\end{Bmatrix}$. Zwei $\begin{Bmatrix}\text{Punkte}\\\text{Ebenen}\end{Bmatrix}$ bestimmen eine Gerade, nämlich ihre $\begin{Bmatrix}\text{Verbindungslinie}\\\text{Schnittlinie}\end{Bmatrix}$.

$\begin{Bmatrix}\text{Ein Punkt}\\\text{Eine Ebene}\end{Bmatrix}$ und eine nicht in $\begin{Bmatrix}\text{ihm}\\\text{ihr}\end{Bmatrix}$ liegende Gerade bestimmen $\begin{Bmatrix}\text{eine Ebene, welche}\\\text{einen Punkt, welcher}\end{Bmatrix}$ beiden angehört.

Zwei Geraden, die $\begin{Bmatrix}\text{einen gemeinschaftlichen Punkt}\\\text{eine gemeinschaftliche Ebene}\end{Bmatrix}$ besitzen, haben auch $\begin{Bmatrix}\text{eine Ebene}\\\text{einen Punkt}\end{Bmatrix}$ gemein.

Die Gesammtheit der $\begin{Bmatrix}\text{Punkte}\\\text{Ebenen}\end{Bmatrix}$ einer Geraden heißt $\begin{Bmatrix}\text{eine Punktreihe}\\\text{ein Ebenenbüschel}\end{Bmatrix}$.

Die Gesammtheit der $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\ \text{Ebenen}\end{matrix}\right\}$ und Geraden $\left\{\begin{matrix}\text{einer Ebene}\\ \text{eines Punktes}\end{matrix}\right\}$ heißt ein $\left\{\begin{matrix}\text{ebenes System}\\ \text{Strahlenbündel}\end{matrix}\right\}$.

Dieser Erscheinung liegt das Gesetz der »Reciprocität« oder »Dualität« zugrunde, nach welchem sich im Raume Punkt und Ebene gegenüberstehen, »reciproke« Begriffe sind. Der Geraden hingegen steht wieder die Gerade reciprok gegenüber, was damit erklärt werden kann, dass dieselbe zwei Punkte (als Verbindungslinie) oder zwei Ebenen (als Schnittlinie) gleichsam zu vertreten vermag. Durch das Gesetz der Reciprocität wird der Stoff der projectivischen Geometrie in zwei einander gegenüberstehende Gruppen getheilt, deren eine sich aus der anderen ergibt.

Bei Gebilden einer Ebene treten nur Punkte und Geraden als Elemente auf, während die Ebene als Element entfällt. Hier sind Punkt und Gerade reciproke Begriffe, wie aus folgenden Beispielen erhellt:

Zwei $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\ \text{Geraden}\end{matrix}\right\}$ einer Ebene bestimmen $\left\{\begin{matrix}\text{eine Gerade}\\ \text{einen Punkt}\end{matrix}\right\}$.

Eine ebene Curve kann als der Inbegriff aller ihrer $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\ \text{Tangenten}\end{matrix}\right\}$ aufgefasst werden. Bewegt sich $\left\{\begin{matrix}\text{ein Punkt}\\ \text{eine Tangente}\end{matrix}\right\}$ auf der Curve gegen $\left\{\begin{matrix}\text{einen festen Punkt}\\ \text{eine feste Tangente}\end{matrix}\right\}$, so nähert sich $\left\{\begin{matrix}\text{die Verbindungslinie}\\ \text{der Schnittpunkt}\end{matrix}\right\}$ beider $\left\{\begin{matrix}\text{der Tangente in dem festen Punkte}\\ \text{dem Berührungspunkte in der festen Tangente}\end{matrix}\right\}$ und fällt schließlich mit $\left\{\begin{matrix}\text{derselben}\\ \text{demselben}\end{matrix}\right\}$ zusammen.

Bei Gebilden eines Punktes (im Strahlenbündel) treten hingegen nur Gerade und Ebene als Elemente auf und stehen sich reciprok gegenüber, während der Punkt entfällt:

Zwei $\left\{\begin{matrix}\text{Strahlen}\\ \text{Ebenen}\end{matrix}\right\}$ bestimmen $\left\{\begin{matrix}\text{eine Ebene}\\ \text{einen Strahl}\end{matrix}\right\}$.

Eine Kegelfläche kann als Inbegriff aller ihrer $\left\{\begin{matrix}\text{Erzeugenden}\\ \text{Tangentenebenen}\end{matrix}\right\}$ aufgefasst werden u. s. w.

7. Vielecke und Vielseite; Vielkante und Vielflache. Besonders deutlich tritt die Reciprocität hervor bei den Vielecken und Vielseiten. In der Geometrie der Alten wird bloß das Vieleck betrachtet, worunter man ein durch gerade, aufeinander folgende Linienstücke begrenztes Stück der Ebene versteht und verschlungene Figuren in der Regel ausschließt. In der projectivischen Geometrie werden einfache und vollständige Vielecke unterschieden, zu welchen als reciproke Figuren die einfachen und die vollständigen Vielseite treten. Verschlungene Figuren sind nicht ausgeschlossen und die Geraden sind unbegrenzt gedacht.

a) Man versteht unter einem einfachen ebenen $\left\{\begin{matrix}\text{n-Eck}\\ \text{n-Seit}\end{matrix}\right\}$ ein System von n $\left\{\begin{matrix}\text{Punkten}\\ \text{Geraden}\end{matrix}\right\}$ einer Ebene — in gegebener Reihenfolge — und den n $\left\{\begin{matrix}\text{Geraden oder Seiten}\\ \text{Punkten oder Eckpunkten}\end{matrix}\right\}$, welche je zwei aufeinander folgenden $\left\{\begin{matrix}\text{Punkten}\\ \text{Geraden}\end{matrix}\right\}$ gemeinsam sind.

Ist insbesondere n eine gerade Zahl, so nennt man einander gegenüberliegend den 1. und $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ten}}$, den 2. und $\left(\frac{n}{2}+2\right)^{\text{ten}}$ etc. Eckpunkt oder die 1. und $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{te}}$, die 2. und $\left(\frac{n}{2}+2\right)^{\text{te}}$ etc. Seite.

Unter einem vollständigen, ebenen $\left\{\begin{matrix}\text{n-Eck}\\ \text{n-Seit}\end{matrix}\right\}$ versteht man ein System von n $\left\{\begin{matrix}\text{Punkten}\\ \text{Geraden}\end{matrix}\right\}$ der Ebene mit ihren sämmtlichen $\left\{\begin{matrix}\text{Verbindungslinien}\\ \text{Schnittpunkten}\end{matrix}\right\}$, welche die $\left\{\begin{matrix}\text{Seiten}\\ \text{Eckpunkte}\end{matrix}\right\}$ des vollständigen $\left\{\begin{matrix}\text{n-Eckes}\\ \text{n-Seites}\end{matrix}\right\}$ bilden und deren Zahl $\binom{n}{2}$ beträgt.

Die wichtigste Rolle spielen die Vierecke und Vierseite, welchen deshalb eine besondere Beschreibung gewidmet werden soll.

Ein vollständiges $\left\{\begin{matrix}\text{Viereck}\\ \text{Vierseit}\end{matrix}\right\}$ besteht aus vier $\left\{\begin{matrix}\text{Eckpunkten A, B, C, D}\\ \text{Seiten a, b, c, d}\end{matrix}\right.$

{ (Fig. 1) | (Fig. 2) }, welche drei Paare gemeinsamer { Geraden $g_1\, g_1'$, $g_2\, g_2'$, $g_3\, g_3'$ | Punkte $P_1\, P_1'$, $P_2\, P_2'$, $P_3\, P_3'$ },

Fig. 1.

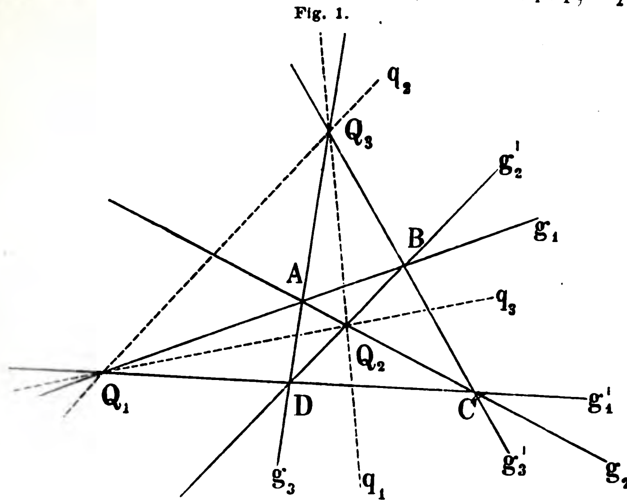
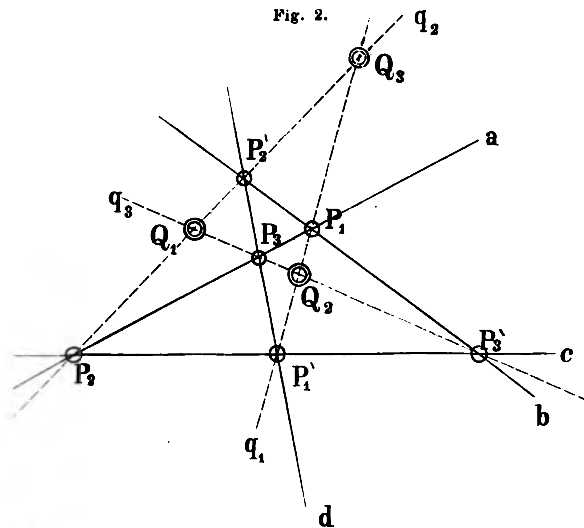


Fig. 2.



{ Gegenseiten | Gegenpunkte } genannt, besitzen, deren { Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q_3 | Verbindungslinien q_1, q_2, q_3 } die drei { Diagonalpunkte | Diagonalen } des vollständigen { Viereckes | Vierseites } heißen. Die { Verbindungslinien q_1, q_2, q_3 | Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q_3 } der letzteren nennt man { Diagonalen | Diagonalpunkte }.

Das vollständige { Viereck | Vierseit } enthält drei einfache { Vierecke **A B C D**, | Vierseite **a b c d**, }

$\left.\begin{matrix}\text{ABDC und ADBC}\\ \text{abdc und adbc}\end{matrix}\right\}$, deren $\left\{\begin{matrix}\text{Seiten}\\ \text{Eckpunkte}\end{matrix}\right\}$ je zwei Paar $\left\{\begin{matrix}\text{Gegenseiten}\\ \text{Gegenpunkte}\end{matrix}\right\}$ des vollständigen $\left\{\begin{matrix}\text{Viereckes}\\ \text{Vierseites}\end{matrix}\right\}$ sind. In $\left\{\begin{matrix}\text{jedem Diagonalpunkte}\\ \text{jeder Diagonale}\end{matrix}\right\}$ liegt ein Paar $\left\{\begin{matrix}\text{Diagonalen}\\ \text{Diagonalpunkte}\end{matrix}\right\}$ und ein Paar $\left\{\begin{matrix}\text{Gegenseiten}\\ \text{Gegenpunkte}\end{matrix}\right\}$, von welchen das eine Paar durch das andere getrennt wird.

b) Den Vielecken und Vielseiten in der Ebene stehen die Vielkante und Vielflache im Strahlenbündel gegenüber, welche durch Projection der ersteren aus einem beliebigen, nicht in ihrer Ebene liegenden Punkte erhalten werden können, wie auch ihre Beschreibung aus jener der entsprechenden ebenen Figuren leicht abgeleitet werden kann.

---

2. Abschnitt.

Untersuchung der Grundgebilde erster Stufe, ihrer Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen.

8. Die Punktreihe. Zwei Punkte A und B einer Punktreihe bestimmen die Strecke AB. Die Punkte B und A bestimmen die Strecke BA. Durchläuft ein Punkt zuerst die Strecke AB und dann die Strecke BA, so gelangt er wieder zu jenem Punkte, von welchem er ausgegangen. Dieses kann dadurch zum Ausdruck gebracht werden, dass man AB und BA als entgegengesetzt gleiche Größen ansieht, so dass

$$AB = -BA \quad \text{und} \quad AB + BA = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung gilt für drei Punkte A, B, C immer die Beziehung

$$AB + BC = AC \quad \text{oder} \quad AB + BC + CA = 0,$$

mag sich der Punkt C innerhalb oder außerhalb der Strecke AB befinden. Daraus folgt auch, dass für drei beliebige Punkte L, M, N stets

$$MN = LN - LM,$$

wie immer dieselben in der Geraden liegen.

Bei irgend vier Punkten A, B, C, D einer Geraden ist

$$AB + BC = AC$$
$$AD = AB + BD$$

und daraus folgt

$$AB.AD + BC.AD = AC.AB + AC.BD,$$
$$AB(AD - AC) + BC.AD - AC.BD = 0$$

oder

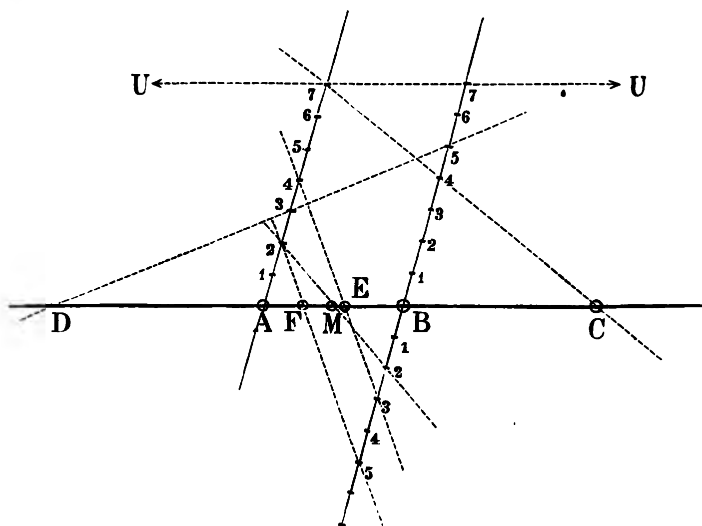
$$AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0.$$

In der projectivischen Geometrie wird die Lage eines Punktes C durch das sogenannte Streckentheilverhältnis in Bezug auf zwei feste Punkte A und B, welche Fundamentalpunkte heißen, bestimmt. Es ist das Verhältnis seiner Abstände von den beiden Fundamentalpunkten, wobei immer eine bestimmte Reihenfolge der letzteren festgehalten wird. Dasselbe wird symbolisch mit (ABC) bezeichnet, so dass

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}.$$

Das Streckentheilverhältnis ist hinreichend, um den Punkt daraus zu construieren. Zunächst ist klar, dass es positiv oder negativ sein muss, je nachdem C außerhalb oder innerhalb der Strecke AB liegt. Sein absoluter

Fig. 3.



Wert ist größer oder kleiner als die Einheit, je nachdem C näher an B oder näher an A liegt. Die Construction erfolgt, indem man durch die Fundamentalpunkte zwei Parallelen zieht, die entsprechenden Verhältniszahlen aufträgt und den Schnittpunkt der Verbindungslinie der so erhaltenen Punkte mit der Geraden aufsucht. Das Auftragen geschieht nach derselben oder nach entgegengesetzten Seiten, je nachdem der Punkt C außerhalb oder innerhalb der Strecke AB liegt. In Fig. 3 ist die Construction der Punkte mit den Streckentheilverhältnissen

$$(ABC) = \frac{7}{4}; \ (ABD) = \frac{3}{5}; \ (ABE) = -\frac{4}{3}; \ (ABF) = -\frac{2}{5}$$

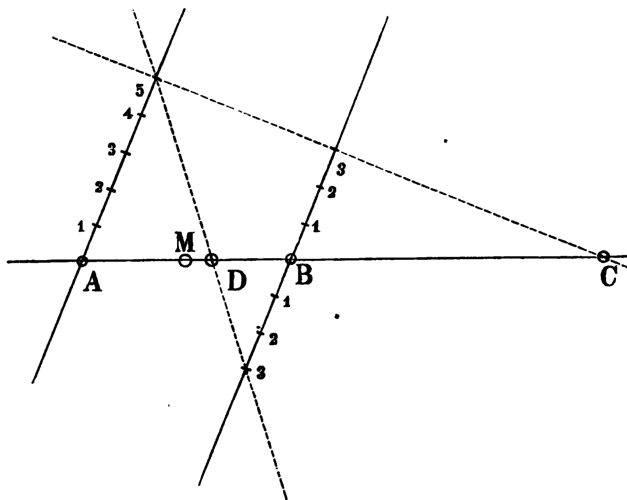
dargestellt. Für den Halbierungspunkt M der Fundamentalstrecke A B ist offenbar (A B M) = — 1, während für den unendlich fernen Punkt U der Geraden (A B U) = + 1 ist.

Zwei Punkte C und D sind zu den Fundamentalpunkten A und B harmonisch, wenn die Streckentheilverhältnisse entgegengesetzt gleich sind:

$$(A B C) = -(A B D).$$

Die Punktepaare A, B und C, D die einander immer trennen, werden harmonisch conjugierte Punktepaare genannt. Die Construction derselben zeigt Fig. 4 für $(A B C) = \frac{5}{3}$ und $(A B D) = -\frac{5}{3}$. Für harmo-

Fig. 4.



nisch conjugierte Punktepaare bestehen außer der Beziehung, durch welche sie definiert wurden, noch andere Relationen, deren wichtigste hier angeführt werden soll.

Ist M (Fig. 4) der Halbierungspunkt der Fundamentalstrecke A B, so folgt aus

$$\frac{A C}{B C} = -\frac{A D}{B D},$$

wenn die Abstände sämmtlicher Punkte von M eingeführt werden:

$$\frac{M C - M A}{M C - M B} = -\frac{M D - M A}{M D - M B}$$

oder, weil $M A = - A M$; $M B = A M$

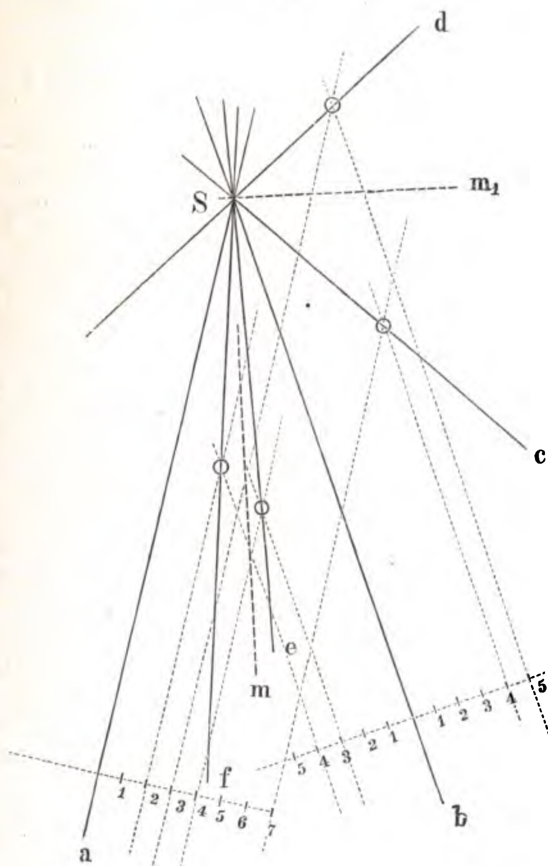
$$\frac{MC+AM}{MC-AM}=-\frac{MD+AM}{MD-AM},$$

woraus sich nach entsprechender Reduction ergibt:

$$MC.MD=\overline{AM}^2=\overline{BM}^2.$$

Dem Halbierungspunkte der Fundamentalstrecke entspricht der unendlich ferne Punkt der Geraden als conjugierter Punkt.

Fig. 5.



9. Das Strahlenbüschel und das Ebenenbüschel. Zwei Strahlen a und b eines Strahlenbüschels bestimmen den Winkel ab, der dem Winkel ba entgegengesetzt gleich ist, so dass

$$ab=-ba \text{ und}$$
$$ab+ba=0.$$

Die Lage eines Strahles c wird durch das sogenannte Sinustheilverhältnis in Bezug auf zwei Fundamentalstrahlen a und b bestimmt. Bezeichnet man dieses symbolisch mit (a b c) so ist

$$(abc)=\frac{\sin ac}{\sin bc}.$$

Aus seinem Sinustheilverhältnis kann ein Strahl leicht construiert werden, weil die Abstände irgend eines seiner Punkte von den Fundamentalstrahlen proportional sind den Sinus der Winkel, welche derselbe mit den Fundamentalstrahlen bildet; man hat daher nur nöthig, in entsprechenden Abständen Parallele zu den Fundamentalstrahlen zu ziehen und hiebei das Vorzeichen des Sinustheilverhältnisses zu berücksichtigen. In Fig. 5 sind die Strahlen mit den Theilverhältnissen $(abc)=\frac{7}{4}$;

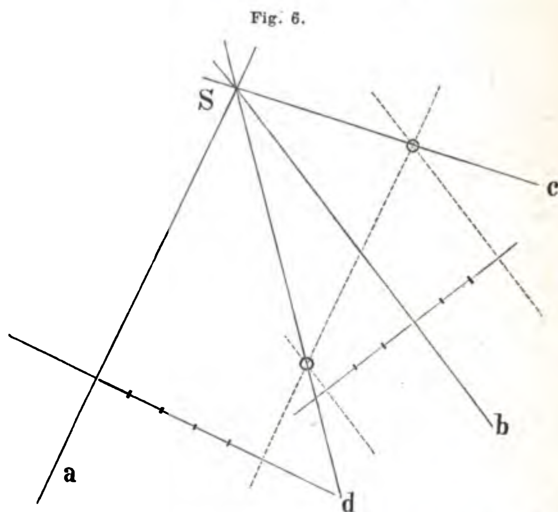
$(abd) = \frac{3}{5}$; $(abe) = -\frac{4}{3}$; $(abf) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ construiert. Für den Strahl m, welcher den Fundamentalwinkel ab halbiert, ist offenbar $(abm) = -1$ und für jenen m_1 des Nebenwinkels $(a\,b\,m_1) = +1$.

Zwei Strahlen c und d sind zu den Fundamentalstrahlen a und b harmonisch, wenn ihre Sinustheilverhältnisse entgegengesetzt gleich sind:

$$(abc) = -(abd).$$

Die Strahlenpaare a, b und c, d, die einander gegenseitig trennen, werden harmonisch conjugierte Strahlenpaare genannt. Die Construction derselben zeigt Fig. 6 für $(abc) = \frac{5}{3}$ und $(abd) = -\frac{5}{3}$.

Fig. 6.



Die Winkelhalbierungsstrahlen m und m_1 sind zu den Fundamentalstrahlen a und b harmonisch.

Die Bestimmung eines Strahles im Strahlenbüschel durch das Sinustheilverhältnis kann direct auf die Bestimmung einer Ebene im Ebenenbüschel übertragen werden, indem man hiebei die Winkel, welche die Ebenen mit einander bilden, in einem Normalstrahlenbüschel misst — dem Schnitt des Ebenenbüschels mit irgend einer, zu seiner Axe senkrechten Ebene. Demnach bedeutet

$$(\alpha\beta\gamma) = \frac{\sin\alpha\gamma}{\sin\beta\gamma}$$

das Sinustheilverhältnis der Ebene γ in Bezug auf die Fundamentalebenen α und β. Zu den letzteren sind die Ebenen γ und δ harmonisch, wenn

$$(\alpha\beta\gamma) = -(\alpha\beta\delta).$$

10. Einförmige Grundgebilde in perspectivischer Lage. Die zwischen den einförmigen Grundgebilden bestehenden Beziehungen lassen sich leicht aus der perspectivischen Lage derselben ableiten. Es liegen perspectivisch:

a) Zwei Punktreihen, wenn sie Schnitte desselben Strahlenbüschels sind.

b) Zwei Ebenenbüschel, wenn sie Scheine desselben Strahlenbüschels sind.

c) Zwei Strahlenbüschel, wenn sie Scheine derselben Punktreihe oder Schnitte desselben Ebenenbüschels sind.

d) Eine Punktreihe und ein Ebenenbüschel, wenn die erstere ein Schnitt des letzteren ist.

e) Ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe, wenn diese ein Schnitt des ersteren ist.

f) Ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel, wenn jenes ein Schnitt des letzteren ist.

Durch die perspectivische Lage sind zwei Gebilde derart aufeinander bezogen, dass jedem Elemente des einen ein Element des anderen entspricht (Art. 5). In dem gemeinsamen Element der Träger von zwei gleichartigen Gebilden sind zwei entsprechende Elemente der letzteren vereinigt; man sagt, die Gebilde haben ein Element »entsprechend gemein«. Zwei perspectivische Punktreihen haben den Schnittpunkt, zwei perspectivische Ebenenbüschel die Verbindungsebene der Träger; zwei perspectivische Strahlenbüschel derselben Ebene den Verbindungsstrahl ihrer Mittelpunkte; zwei perspectivische Strahlenbüschel desselben Punktes die Schnittlinie ihrer Ebenen entsprechend gemein. Bei ungleichartigen Gebilden liegen die Elemente des einen in den ihnen entsprechenden Elementen des anderen.

11. Beziehungen zwischen perspectivischen einförmigen Grundgebilden. Doppelverhältnisse. Wenn das Strahlenbüschel U (a b c d . . .) perspectivisch ist zu der in seiner Ebene liegenden Punktreihe u (A B C D . . .), so besteht zwischen irgend vier Strahlen des ersteren und den ihnen entsprechenden Punkten des letzteren eine wichtige Beziehung, welche die Grundlage aller folgenden Untersuchungen bilden wird. Aus den Dreiecken U A C und U B C (Fig. 7) findet man

$$AC = \frac{UA}{\sin\varphi} \cdot \sin ac; \quad BC = \frac{UB}{\sin\varphi} \sin bc;$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{UA}{UB} \cdot \frac{\sin ac}{\sin bc}$$

oder

$$(ABC) = \frac{UA}{UB} (abc)$$

und erkennt, dass die Theilverhältnisse der Punkte A, B, C und der ihnen entsprechenden Strahlen a, b, c im allgemeinen nicht einander gleich sind, sondern in einer, von der gegenseitigen Lage beider Gebilde abhängigen Beziehung stehen. Nur wenn $UA = UB$, findet Gleichheit der Theilverhältnisse statt.

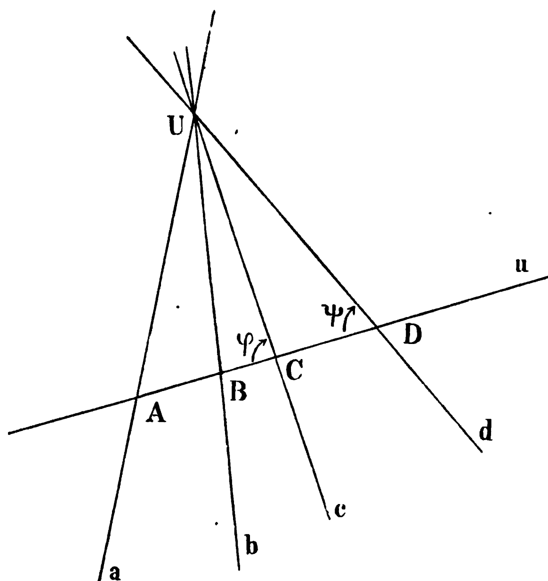


Fig. 7.

Zieht man aber ein weiteres Paar entsprechender Elemente D, d in Betracht und ermittelt auf dieselbe Art

$$(A\,B\,D) = \frac{U\,A}{U\,B}\,(a\,b\,d),$$

so erhält man durch Division die Relation

$$\frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = \frac{(a\,b\,c)}{(a\,b\,d)},$$

welche zeigt, dass der Quotient der Streckentheilverhältnisse der Punkte C, D in Bezug auf die Punkte A, B gleich ist dem Quotienten der entsprechenden Sinustheilverhältnisse der Strahlen c, d in Bezug auf die Strahlen a, b, und zwar unabhängig von der Lage, welche die beiden perspectivischen Gebilde zu einander haben.

Man nennt solche Quotienten »Doppelverhältnisse« und stellt zur Abkürzung das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe durch das Symbol (A B C D), der vier Strahlen a, b, c, d eines Strahlenbüschels durch (a b c d), der vier Ebenen α, β, γ, δ eines Ebenenbüschels durch $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ dar, so dass

$$(A\,B\,C\,D) = (A\,B\,C) : (A\,B\,D) = \frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D};$$

$$(a\,b\,c\,d) = (a\,b\,c) : (a\,b\,d) = \frac{\sin\,\overline{a\,c}}{\sin\,\overline{b\,c}} : \frac{\sin\,\overline{a\,d}}{\text{cin}\,\overline{b\,d}};$$

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = (\alpha\,\beta\,\gamma) : (\alpha\,\beta\,\delta) = \frac{\sin\,\overline{\alpha\,\gamma}}{\sin\,\overline{\beta\,\gamma}} : \frac{\sin\,\overline{\alpha\,\delta}}{\sin\,\overline{\beta\,\delta}},$$

also der Aufeinanderfolge der Zeichen in dem Symbol eine bestimmte Bedeutung zukommt und eine Änderung derselben auch die Bedeutung des Symbols ändert, z. B.

$$(C\,A\,D\,B) = (C\,A\,D):(C\,A\,B) = \frac{CD}{AD}:\frac{CB}{AB};$$

$$(D\,A\,B\,C) = (D\,A\,B):(D\,A\,C) = \frac{DB}{AB}:\frac{DC}{AC}$$

u. s. w.

Mit Hilfe dieser Einführung kann man nun den Satz aussprechen: Wenn ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe perspectivisch sind und es entsprechen den Strahlen a, b, c, d die Punkte A, B, C, D, so ist

$$(A\,B\,C\,D) = (a\,b\,c\,d),$$

d. h. das Doppelverhältnis von vier beliebigen Punkten der Punktreihe ist gleich dem in demselben Sinne genommenen Doppelverhältnisse der vier ihnen entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels.

Daraus ergeben sich direct die Folgerungen:

Haben zwei Punktreihen u_1 und u_2 perspectivische Lage und entsprechen den Punkten K_1, L_1, M_1, N_1 die Punkte K_2, L_2, M_2, N_2, so ist

$$(K_1\,L_1\,M_1\,N_1) = (K_2\,L_2\,M_2\,N_2).$$

Haben zwei Strahlenbüschel U_1 und U_2 perspectivische Lage und entsprechen den Strahlen k_1, l_1, m_1, n_1 die Strahlen k_2, l_2, m_2, n_2, so ist

$$(k_1\,l_1\,m_1\,n_1) = (k_2\,l_2\,m_2\,n_2).$$

Sind zwei Strahlenbüschel Schnitte desselben Ebenenbüschels, so sind sie auch Scheine derselben Punktreihe; ist eines derselben ein Normalstrahlenbüschel, in welchem die Winkel der Ebenen gemessen werden, so lässt sich daraus erkennen, dass bei vier beliebigen Ebenen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ und den ihnen entsprechenden Strahlen $k\,l\,m\,n$ eines durch einen beliebigen Schnitt erzeugten Büschels wieder die Gleichheit der Doppelverhältnisse besteht:

$$(\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu) = (k\,l\,m\,n).$$

Haben demnach zwei Ebenenbüschel perspectivische Lage (sind sie Scheine desselben Strahlenbüschels) und entsprechen den Ebenen $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ des einen die Ebenen $\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ des anderen, so ist

$$(\varkappa_1\,\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1) = (\varkappa_2\,\lambda_2\,\mu_2\,\nu_2).$$

Entsprechen endlich den Ebenen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ eines Ebenenbüschels die Punkte K, L, M, N einer dazu perspectivischen Punktreihe und denkt man durch den Träger der letzteren eine beliebige Ebene gelegt, so schneidet diese das Ebenenbüschel nach einem Strahlenbüschel, das sowohl zum Ebenenbüschel, als auch zu der Punktreihe perspectivische Lage hat. Also ist

$$(\varkappa \lambda \mu \nu) = (K L M N).$$

12. Zusammenhang zwischen den bei vier Elementen möglichen 24 Doppelverhältnissen. Durch Permutation der vier Elemente A B C D kann man 24 Doppelverhältnisse ableiten, deren Werte sich durch den irgend eines von ihnen ausdrücken lassen. Setzt man speciell (A B C D) = K, so findet man

$$\text{I. } (A B C D) = (B A D C) = (C D A B) = (D C B A) = K.$$
$$\text{II. } (A B D C) = (B A C D) = (D C A B) = (C D B A) = \frac{1}{K}.$$
$$\text{III. } (A C B D) = (C A D B) = (B D A C) = (D B C A) = 1 - K.$$
$$\text{IV. } (A C D B) = (C A B D) = (D B A C) = (B D C A) = \frac{1}{1-K}.$$
$$\text{V. } (A D B C) = (D A C B) = (B C A D) = (C B D A) = \frac{K-1}{K}.$$
$$\text{VI. } (A D C B) = (D A B C) = (C B A D) = (B C D A) = \frac{K}{K-1}.$$

Bezüglich der Serien I und II ist die Richtigkeit direct einzusehen. Jene der Serie III folgt aus der Gleichung (Art. 8)

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0,$$

aus welcher man durch Division mit $BC \,.\, AD$

$$\frac{AB \,.\, CD}{BC \,.\, AD} + 1 + \frac{CA \,.\, BD}{BC \,.\, AD} = 0;$$

$$\frac{AB}{-CB} : \frac{AD}{CD} + 1 + \frac{-AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = 0;$$

oder

$$-(A C B D) + 1 - (A B C D) = 0,$$

also

$$(A C B D) = 1 - K$$

erhält. Die Serie IV folgt aus III, wie II aus I. Ferner V aus II, wie III aus I, weil $\frac{K-1}{K} = 1 - \frac{1}{K}$. Endlich VI aus V, wie II aus I.

Dass zwischen den verschiedenen Doppelverhältnissen für vier Strahlen eines Strahlenbüschels oder vier Ebenen eines Ebenenbüschels dieselben Beziehungen bestehen, wird klar, sobald man das Büschel durch eine Gerade geschnitten denkt u. s. w. (Art. 11.)

13. Die projectivische Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde. Durch fortgesetztes Projicieren und Schneiden lässt sich eine Reihe von Gebilden erster Stufe ableiten, von welchen irgend zwei im allgemeinen nicht mehr die perspectivische Lage haben, die aber zu einander in der Beziehung stehen, dass das Doppelverhältnis von vier beliebigen Elementen des einen gleich ist dem Doppelverhältnisse der entsprechenden Elemente des anderen. Auch wenn bei zwei perspectivisch liegenden Gebilden die perspectivische Lage aufgehoben wird und dieselben in eine beliebige (allgemeine) Lage zu einander gelangen, bleibt jene Beziehung zwischen denselben aufrecht, welche durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse entsprechender Elementegruppen (Würfe) gekennzeichnet ist. Man nennt diese Beziehung »projectivische Verwandtschaft« und sagt: »Zwei Gebilde sind projectivisch. wenn das eine aus dem anderen durch eine der eben beschriebenen Operationen abgeleitet, oder wenn das Doppelverhältnis von vier beliebigen Elementen des einen gleich ist dem Doppelverhältnisse der entsprechenden Elemente des anderen.«

Specielle Fälle der projectivischen Verwandtschaft zwischen einförmigen Grundgebilden sind die Ähnlichkeit und die Gleichheit.

Zwei Punktreihen sind projectivisch ähnlich, wenn das Streckentheilverhältnis von drei Elementen der einen gleich ist dem Streckentheilverhältnis der entsprechenden Elemente des anderen. Ähnliche Punktreihen entstehen, wenn ein beliebiges Strahlenbüschel durch zwei parallele Geraden oder ein Parallelstrahlenbüschel durch zwei beliebige Geraden geschnitten wird; in denselben entsprechen sich die unendlich fernen Punkte.

Zwei Punktreihen, Strahlenbüschel oder Ebenenbüschel sind projectivisch gleich, wenn die einander entsprechenden Strecken oder Winkel gleich sind.

14. Verschiedene Anwendungen. Auf die bis nun erhaltenen Ergebnisse stützen sich folgende Anwendungen:

a) Die Beziehung

$$(A\,B\,C\,D) = (B\,A\,D\,C) = (C\,D\,A\,B) = (D\,C\,B\,A)$$

(Art. 12) lässt sich leicht auf geometrischem Wege ableiten.

Projiciert man nämlich (Fig. 8) die Punkte A, B, C, D aus irgend einem Punkte U durch die Strahlen a, b, c, d auf eine durch A gehende Gerade u_1 in den Punkten A_1, B_1, C_1, D_1, so ist

$$(A\,B\,C\,D) = (A_1\,B_1\,C_1\,D_1).$$

Projiciert man ferner die Punkte $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ aus D auf den Strahl b, so folgt

$$(A_1\,B_1\,C_1\,D_1) = (B\,B_1\,P\,U).$$

Projiciert man schließlich die Punkte B, B_1, P, U aus C_1 auf u, so erhält man

$$(B\,B_1\,P\,U) = (B\,A\,D\,C).$$

Daher ist

$$(A\,B\,C\,D) = (B\,A\,D\,C).$$

Analog erhält man (Fig. 9) durch Projicieren aus U auf u_1, aus D auf c und aus B_1 auf u:

Fig. 8.

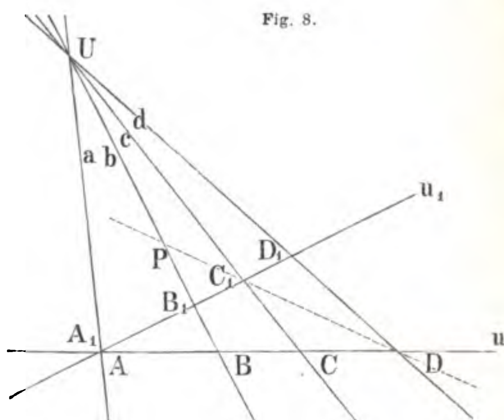


Fig. 9.

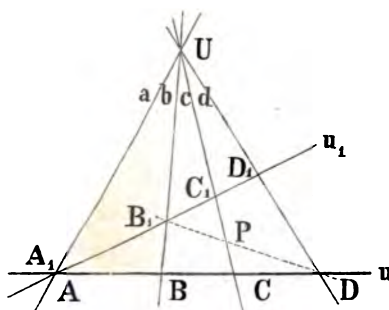
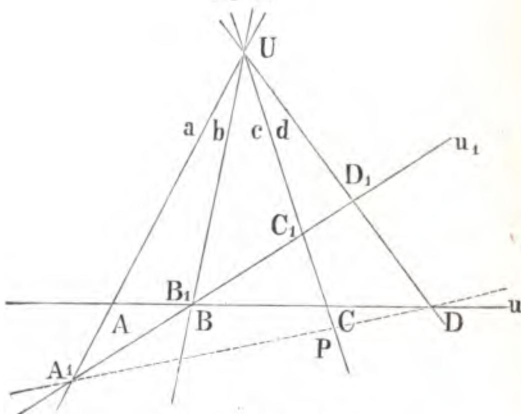


Fig. 10.



$$(A\,B\,C\,D) = (A_1\,B_1\,C_1\,D_1) = (C\,P\,C_1\,U) = (C\,D\,A\,B)$$

und (Fig. 10) durch Projicieren aus U auf u_1, aus D auf c und aus A_1 auf u:

$$(A\,B\,C\,D) = (A_1\,B_1\,C_1\,D_1) = (P\,C\,C_1\,U) = (D\,C\,B\,A).$$

b) Wenn die Punkte C und D harmonisch sind zu den Punkten A und B, so ist (Art. 8)

$$(ABC) = -(ABD),$$

daher (Art. 12)

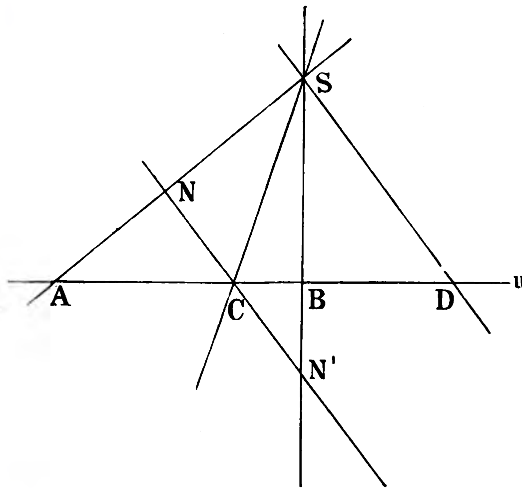
$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = (ABDC) = \\ = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = -1,$$

also können bei zwei Paaren harmonisch conjugierter Punkte, sowohl die Punkte eines jeden Paares, als auch die beiden Paare vertauscht werden, ohne dass dadurch die harmonische Beziehung aufgehoben würde. Dasselbe gilt für harmonische Strahlen und Ebenen. Ferner ist klar, dass in projectivischen Gebilden vier harmonischen Elementen wieder vier harmonische Elemente entsprechen.

Hierauf beruhen die Constructionen harmonischer Punkte und Strahlen auf Grund der Thatsache, dass dem Halbierungspunkte einer Strecke der unendlich ferne Punkt harmonisch zugeordnet ist.

Fig. 11a zeigt die Construction des vierten harmonischen Punktes D in Bezug auf den innerhalb der Strecke AB liegenden Punkt C. Auf

Fig. 11a.

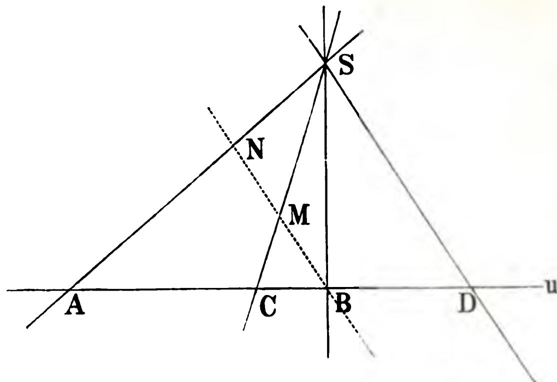


einem beliebigen, durch C gezogenen Strahl sind die gleichen Strecken CN und CN' nach entgegengesetzten Richtungen aufgetragen worden. Die zu diesem Strahl durch den Schnittpunkt S von AN und N'B gezogene Parallele schneidet die Gerade u in dem gesuchten Punkte D.

Wäre aber der Punkt D gegeben, so zieht man (Fig. 11b) durch B einen beliebigen Strahl und macht auf diesem BM = MN, ferner durch D eine Parallele zu diesem Strahl, welche von AN in S geschnitten wird. Von der Verbindungslinie SM wird u in dem gesuchten Punkte C getroffen.

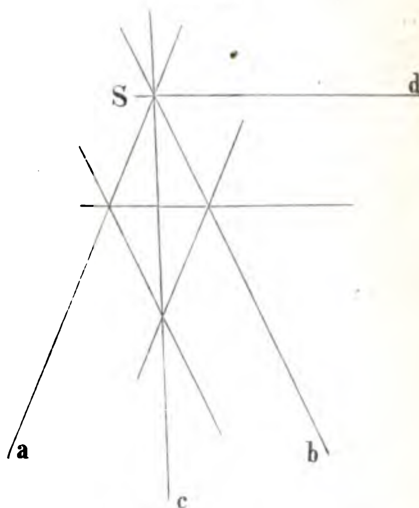
Zu einem Strahl c findet man den in Bezug auf die Strahlen a und b harmonischen Strahl d, indem man (Fig. 12) durch irgend einen

Fig. 11 b.



Punkt von c Parallelen zu a und b zieht. Es entsteht ein Parallelogramm, dessen eine Diagonale c ist. Die Parallele durch S zu der zweiten Diagonale ist der gesuchte Strahl d.

Fig. 12.



Die Construction harmonisch conjugierter Ebenenpaare im Ebenenbüschel kann auf jene harmonischer Punktepaare zurückgeführt werden.

15. Harmonische Punkte und Strahlen an den vollständigen Vierecken und Vierseiten. An den vollständigen Vierecken und Vierseiten lässt sich das Auftreten harmonischer Elemente zeigen. Dazu soll hier das vollständige Vierseit (Fig. 13) in Betracht gezogen werden. Zwischen den Punkten Q_3, Q_1, P_2, P'_2 der Diagonale q_2 und Q_3, Q_2, P'_1, P_1 der Diagonale q_1 bestehen die Beziehungen:

$$(Q_3\, Q_1\, P_2\, P'_2) = (Q_3\, Q_2\, P'_1\, P_1),$$
$$(Q_3\, Q_2\, P'_1\, P_1) = (Q_3\, Q_1\, P'_2\, P_2),$$

welche sich ergeben, wenn man dieselben als Elemente perspectivisch liegender Punktreihen mit den Projectionscentren P'_3 und P_3 auffasst.

Daraus folgt

$$(Q_3\,Q_1\,P_2\,P'_2) = (Q_3\,Q_1\,P'_2\,P_2);$$

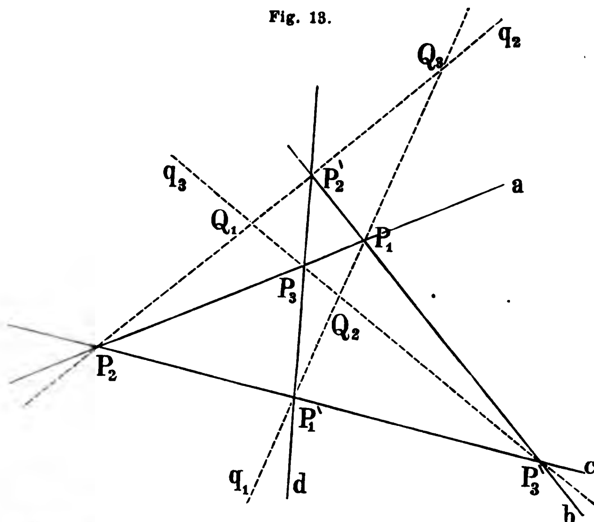
$$\frac{(Q_3\,Q_1\,P_2)}{(Q_3\,Q_1\,P'_2)} = \frac{(Q_3\,Q_1\,P'_2)}{(Q_3\,Q_1\,P_2)};$$

$$(Q_3\,Q_1\,P_2)^2 = (Q_3\,Q_1\,P'_2)^2;$$

also

$$(Q_3\,Q_1\,P_2) = \pm\,(Q_3\,Q_1\,P'_2),$$

Fig. 13.



worin nur das untere Zeichen gelten kann, weil sonst die Punkte P_2 und P'_2 zusammenfallen müssten. Daher ist

$$(Q_3\,Q_1\,P_2) = -\,(Q_3\,Q_1\,P'_2),$$

d. h. die Punkte P_2 und P'_2 sind harmonisch conjugiert in Bezug auf die Punkte Q_3 und Q_1.

Daraus folgt unmittelbar, dass auch Q_3, Q_2, P_1, P'_1 vier harmonische Punkte sind u. s. w., daher der Satz gilt:

»Bei einem vollständigen Vierseit sind je zwei Diagonalpunkte harmonisch getrennt durch die beiden Gegenpunkte, welche in der ihnen gemeinschaftlichen Diagonale liegen.«

Der reciproke Satz hiezu für das vollständige Viereck lautet:

»Bei einem vollständigen Viereck sind je zwei Diagonalen harmonisch getrennt durch die beiden Gegenseiten, welche in dem ihnen gemeinschaftlichen Diagonalpunkte liegen.«

Durch diese wichtige Eigenschaft der vollständigen Vierecke und Vierseite ist man in den Stand gesetzt, bei geometrischen Untersuchungen

harmonische Elemente zu erkennen, ferner solche mit dem Lineal allein zu construieren.

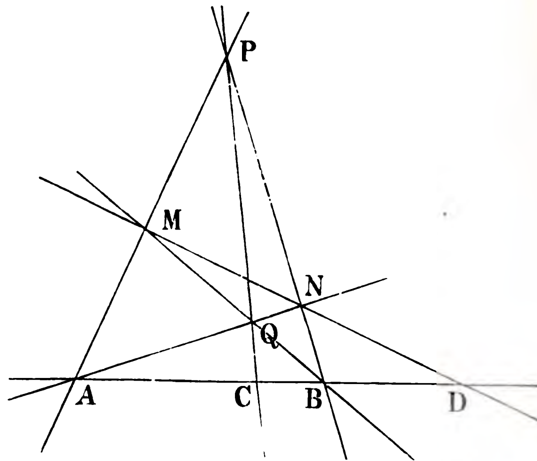
Soll z. B. zu dem (Fig. 14) innerhalb A B liegenden Punkte C der harmonische Punkt D construiert werden, so nimmt man P beliebig an, zieht P A, P B, P C; verbindet ferner den beliebig auf P C angenommenen Punkt Q mit A und B und erhält die Punkte M und N. Die Gerade M N schneidet A B in dem gesuchten Punkte D. Wie man umgekehrt zu dem Punkte D den harmonisch conjugierten Punkt C finden kann, bedarf keiner Erläuterung.

Da dem Halbierungspunkte einer Strecke A B der unendlich ferne Punkt der Geraden harmonisch conjugiert ist, können mittelst der angegebenen Construction folgende Aufgaben mit einem Lineal allein gelöst werden:

Gegeben sind zwei parallele Geraden und auf einer davon die Punkte A, B. Die Strecke A B zu halbieren.

Gegeben sind zwei Punkte A, B und der Halbierungspunkt der Strecke A B. Durch irgend einen Punkt eine Parallele zu der Geraden A B zu ziehen.

Fig. 14.



Nach Lösung der vorhergehenden Aufgaben die Strecke A B in der Geraden A B mehrmals hintereinander aufzutragen.

3. Abschnitt.

Grundoperationen mit projectivischen einförmigen Gebilden.

16. Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie. Wie bereits gezeigt worden, können durch wiederholtes Projicieren und Schneiden projectivische Grundgebilde erster Stufe in beliebiger Anzahl abgeleitet werden. Man kann nun fragen, ob zwei projectivische Grundgebilde, sie mögen wie immer entstanden sein, in die perspectivische Lage gebracht werden können, ferner ob es möglich ist, durch Einschaltung von Hilfsgebilden die geometrische Ableitung des einen aus

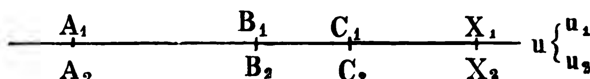
dem anderen ersichtlich zu machen. Die Beantwortung dieser Fragen kann auf folgenden Satz gestützt werden:

»Haben zwei gleichartige projectivische Grundgebilde erster Stufe drei Elemente entsprechend gemein, so fällt überhaupt jedes Element des einen auf das entsprechende Element des anderen.«

Es genügt, diesen Satz an zwei projectivischen Punktreihen zu beweisen.

Die projectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots X_1 \ldots$ und $A_2 B_2 C_2 \ldots X_2 \ldots$ (Fig. 15) mögen derart auf demselben Träger u

Fig. 15.



liegen, dass die einander entsprechenden Punkte A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 zusammenfallen. Dann kann gezeigt werden, dass irgend zwei einander entsprechende Punkte X_1 nnd X_2 auch zusammenfallen müssen. Es ist nämlich zufolge der vorausgesetzten projectivischen Beziehung

$$(A_1 B_1 C_1 X_1) = (A_2 B_2 C_2 X_2)$$

oder weil man hier statt $A_2 B_2 C_2$ auch $A_1 B_1 C_1$ setzen darf

$$(A_1 B_1 C_1 X_1) = (A_1 B_1 C_1 X_2);$$

$$\frac{(A_1 B_1 C_1)}{(A_1 B_1 X_1)} = \frac{(A_1 B_1 C_1)}{(A_1 B_1 X_2)};$$

daher

$$(A_1 B_1 X_1) = (A_1 B_1 X_2).$$

Demnach haben die Punkte X_1 und X_2 gleiche Theilverhältnisse in Bezug auf dieselben Fundamentalpunkte, fallen also zusammen. Damit ist der angeführte Satz bewiesen, denn zwei Strahlen- oder Ebenenbüschel, welche drei Strahlen oder Ebenen entsprechend gemein haben. braucht man bloß durch eine Gerade zu schneiden u. s. w.

Eine Folge dieses Satzes ist der folgende:

»Sind zwei ungleichartige, einförmige Grundgebilde projectivisch und liegen drei Elemente des einen in den ihnen entsprechenden Elementen des anderen, so trifft dieses überhaupt bei allen Elementen zu.«

Gehen z. B. drei Strahlen eines Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte einer dazu projectivischen Punktreihe, so gehen alle Strahlen des ersteren durch die entsprechenden Punkte der letzteren. Denn der Träger der Punktreihe schneidet das Büschel nach einer

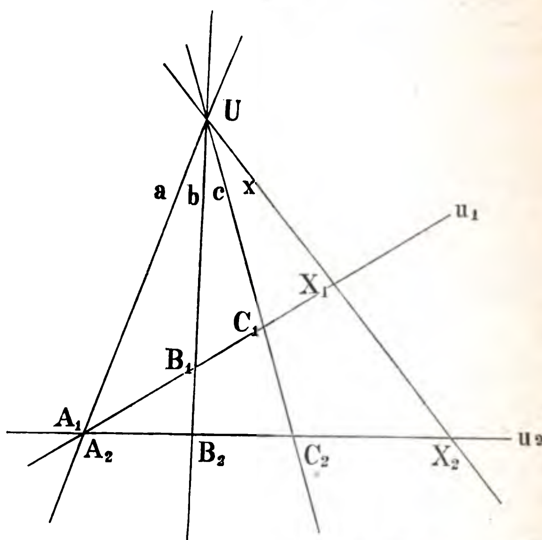
zweiten, zur gegebenen projectivischen Punktreihe, so dass beide drei und folglich alle Punkte entsprechend gemein haben.

17. Herstellung der perspectivischen Lage. *a)* Um bei zwei projectivischen Punktreihen die perspectivische Lage herzustellen, hat man sich daran zu erinnern, dass perspectivische Punktreihen einen Punkt entsprechend gemein haben und zu untersuchen, ob umgekehrt die perspectivische Lage eintritt, wenn man zwei entsprechende Punkte zusammenfallen lässt. Die projectivischen Punktreihen

$$A_1 B_1 C_1 \ldots X_1 \ldots \text{ und } A_2 B_2 C_2 \ldots X_2 \ldots$$

mögen derart gelegt werden, dass die Punkte A_1 und A_2 (Fig. 16) zusammenfallen. Die Verbindungstrahlen b und c der Paare entsprechender Punkte B_1 und B_2, C_1 und C_2 mögen sich in dem Punkte U schneiden. Projiciert man nun beide Punktreihen aus dem Punkte U, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel, welche drei Strahlen entsprechend gemein haben, nämlich die Strahlen b, c und den Strahl a, welcher die zusammenfallenden Punkte A_1 und A_2 aus U projiciert. Die beiden Büschel haben mithin alle Strahlen entsprechend gemein und die Punktreihen sind Schnitte desselben Strahlenbüschels, also perspectivisch.

Fig. 16.

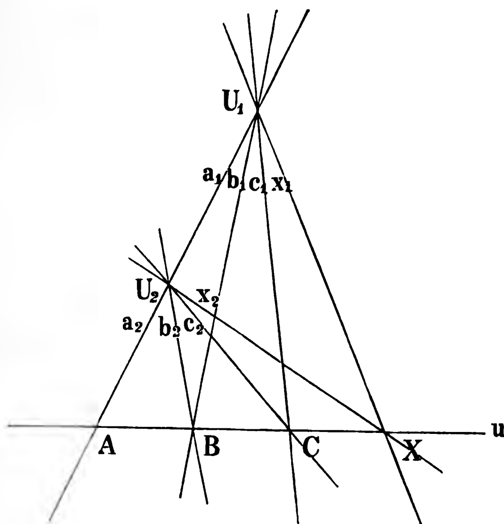


Überhaupt sind zwei projectivische Punktreihen auch perspectivisch, wenn die Verbindungslinien von drei Paaren entsprechender Punkte durch einen Punkt gehen, denn sie werden aus dem letzteren durch zwei projectivische Strahlenbüschel projiciert, welche drei, also alle Strahlen entsprechend gemein haben.

b) Auf dieselbe Art lässt sich zeigen, dass zwei in einer Ebene liegende Strahlenbüschel perspectivisch sind, sobald sie einen Strahl entsprechend gemein haben. Dieselben mögen so gelegt sein, dass die

Strahlen a_1 und a_2 zusammenfallen (Fig. 17). Die entsprechenden Strahlen b_1 und b_2, c_1 und c_2 mögen sich in den Punkten B und C schneiden. Die Verbindungslinie u dieser Punkte schneidet die Büschel nach zwei projectivischen Punktreihen, welche drei Punkte entsprechend gemein haben, nämlich die Punkte B, C und den Punkt A, in welchem die zusammenfallenden Strahlen a_1 und a_2 von u geschnitten werden. Die beiden Punktreihen haben mithin alle Punkte entsprechend gemein und die Büschel sind Scheine derselben Punktreihe, also perspectivisch. Die Gerade u wird der »perspectivische Durchschnitt« der beiden Strahlenbüschel genannt. Dreht man das eine derselben um die Gerade u aus der Ebene des anderen heraus, so bleibt die perspectivische Beziehung aufrecht, die beiden Büschel können aber nun als Schnitte eines Ebenenbüschels angesehen werden, dessen Axe ihre Mittelpunkte verbindet.

Fig. 17.



Zwei projectivische Strahlenbüschel, welche den Mittelpunkt und einen Strahl entsprechend gemein haben, aber nicht in einerlei Ebene liegen, sind gleichfalls Schnitte desselben Ebenenbüschels. Legt man nämlich durch zwei Paare entsprechender Strahlen Ebenen, so schneiden sich diese in einer Geraden, die mit den übrigen Strahlen der Büschel zwei Ebenenbüschel bestimmt, welche drei, also alle Ebenen entsprechend gemein haben u. s. w. Man kann aber auch beide Büschel durch eine beliebige, den gemeinsamen Mittelpunkt nicht enthaltende Ebene schneiden, wodurch man zwei perspectivische Punktreihen erhält u. s. w.

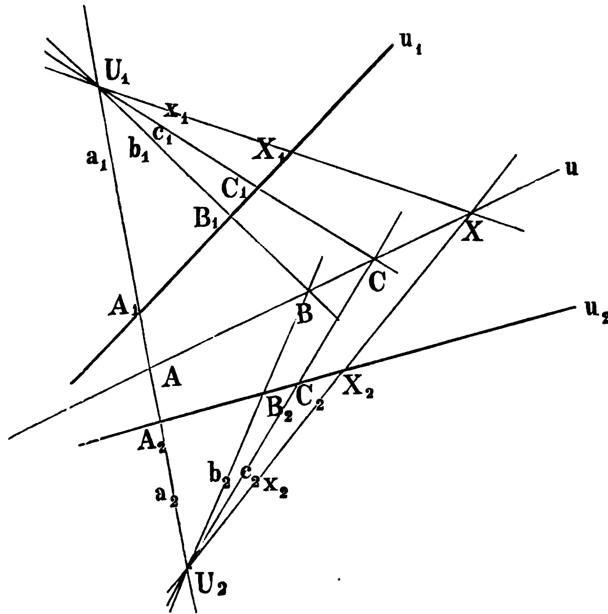
Überhaupt sind zwei projectivische Strahlenbüschel auch perspectivisch, wenn drei Paare entsprechender Strahlen sich in Punkten einer Geraden schneiden oder in Ebenen einer Geraden liegen.

c) Zwei projectivische Ebenenbüschel, welche eine Ebene entsprechend gemein haben, deren Axen sich also schneiden, sind per-

spectivisch. Zwei Paare entsprechender Ebenen bestimmen nämlich zwei Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Axen gehen, daher durch eine Ebene verbunden werden können. Diese schneidet die beiden Ebenenbüschel nach zwei projectivischen Strahlenbüscheln, welche drei, also alle Strahlen entsprechend gemein haben. Daher sind die Ebenenbüschel Scheine desselben Strahlenbüschels und somit perspectivisch.

18. Ermittlung entsprechender Elemente von projectivischen einförmigen Gebilden in allgemeiner Lage. Wenn zwei einförmige Gebilde projectivisch aufeinander bezogen werden sollen, so können drei Paare entsprechender Elemente willkürlich angenommen werden. Irgend einem vierten Element des einen Gebildes entspricht aber dann ein ganz bestimmtes Element des anderen, weil die Doppelverhältnisse gleich sein müssen. Behufs Ermittlung anderer Paare entsprechender Elemente könnten die Gebilde in perspectivische Lage gebracht werden, was nach den vorhergehenden Ausführungen (Art. 17) immer möglich ist. Zweckmäßiger ist es jedoch, durch passend gewählte Hilfsgebilde die unter sich und mit den gegebenen Gebilden in Beziehung gesetzt werden, dieses Ziel zu erreichen, ohne die bereits vorhandene Lage der letzteren zu ändern. Dieses Verfahren hat bei Gebilden einer und derselben Ebene den Vorzug, mit Hilfe eines Lineals allein durchführbar zu sein.

Fig. 18.

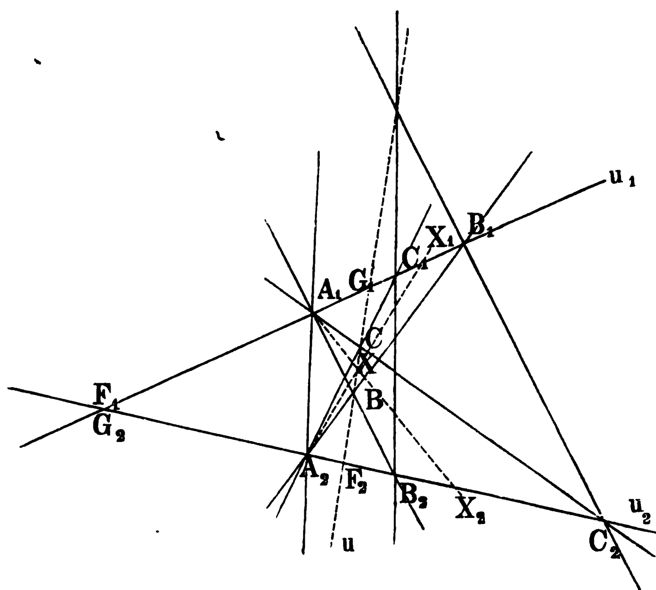


Zunächst mögen die in einer Ebene liegenden Punkreihen u_1 und u_2 (Fig. 18) dadurch projectivisch aufeinander bezogen werden, dass den

willkürlich angenommenen Punkten A_1, B_1, C_1 der ersten die ebenfalls willkürlich angenommenen Punkte A_2, B_2, C_2 der zweiten entsprechen sollen. In der Verbindungslinie von zwei entsprechenden Punkten, etwa $A_1 A_2$, nimmt man beliebig die Punkte U_1 und U_2 an und projiciert aus U_1 die Punktreihe u_1, aus U_2 die Punktreihe u_2. Dadurch entstehen die Strahlenbüschel $a_1 b_1 c_1 \ldots$ und $a_2 b_2 c_2 \ldots$, die projectivisch sind, weil die Punktreihen u_1, u_2 auch projectivisch vorausgesetzt wurden. Die Strahlen a_1 und a_2 fallen in der Geraden $U_1 U_2$ zusammen, so dass die Büschel perspectivisch liegen, mithin Scheine derselben Punktreihe u sind, welche wieder zu beiden gegebenen Punktreihen perspectivisch ist. Um nun zu irgend einem Punkte X_1 den entsprechenden Punkt X_2 zu finden, bestimmt man den Strahl x_1 in U_1, den Punkt X in u, den Strahl x_2, in U_2 und damit den Punkt X_2 in u_2.

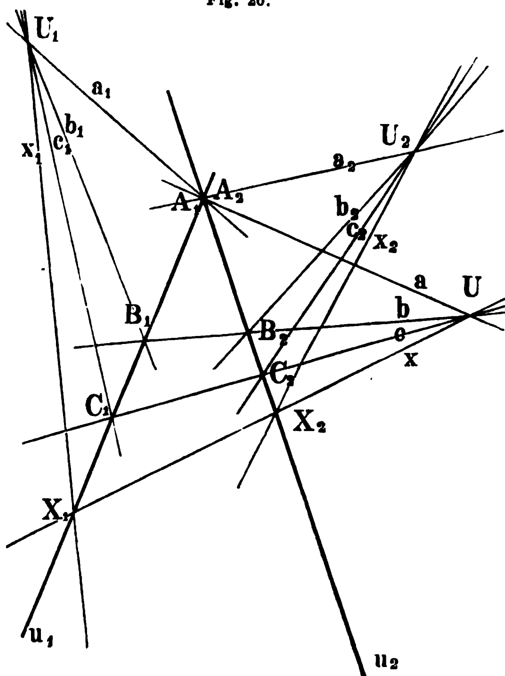
Eine Vereinfachung dieser Construction besteht darin, dass man (Fig. 19) die Punkte U_1 und U_2 mit den Punkten A_2 und A_1 zu-

Fig. 19.



sammenfallend annimmt. Dann entsprechen den Schnittpunkten G_1 und F_2 der Geraden u mit den Geraden u_1 und u_2 die im Schnittpunkte der letzteren vereinigten, einander nicht entsprechenden Punkte G_2 und F_1; auch schneiden sich die Geraden $C_1 B_2$, $B_1 C_2$ auf u.

Die Aufgaben, zwei Strahlenbüschel, die in einer Ebene liegen, oder zwei Ebenenbüschel, deren Axen sich in einem Punkte schneiden, projectivisch aufeinander zu beziehen, wenn jedes Gebilde durch drei willkürlich angenommene Elemente bestimmt ist, lassen sich aus der eben behandelten mit Hilfe des Gesetzes der Reciprocität direct ableiten. Der Wichtigkeit halber soll die erste hier behandelt werden, während die zweite dem Lernenden zur Übung in der Anwendung jenes Gesetzes zur Ausführung überlassen bleibe.

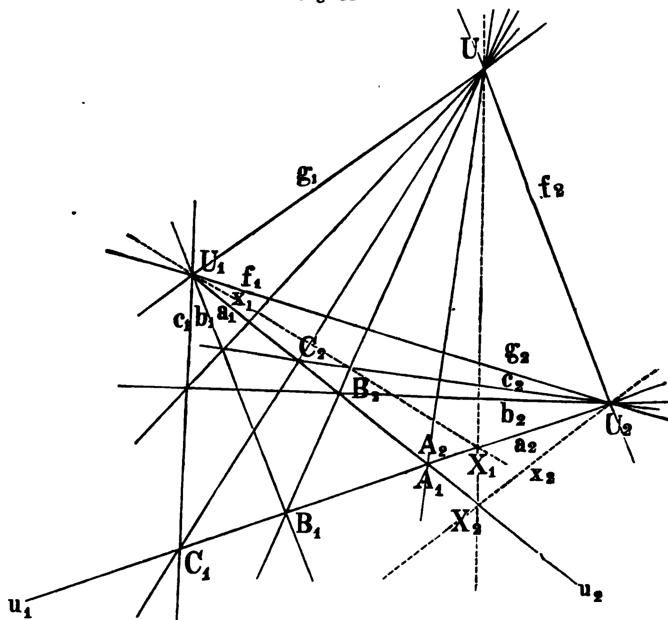


Es mögen die in einer Ebene liegenden Strahlenbüschel U_1 und U_2 (Fig. 20) dadurch projectivisch aufeinander bezogen werden, dass den willkürlich angenommenen Strahlen a_1, b_1, c_1 des ersten die ebenfalls willkürlich angenommenen Strahlen a_2, b_2, c_2 des zweiten entsprechen sollen.

In dem Schnittpunkte von zwei entsprechenden Strahlen, etwa a_1, a_2, nimmt man zwei beliebige Geraden u_1, u_2 an und schneidet mit u_1 das Strahlenbüschel U_1, mit u_2 das Strahlenbüschel U_2. Dadurch entstehen die Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$ und $A_2 B_2 C_2 \ldots$ die projectivisch sind, weil die Strahlenbüschel U_1 und U_2 auch projectivisch vorausgesetzt wurden. Die Punkte A_1 und A_2 fallen in dem Punkte $u_1 u_2$ zusammen, so dass die Punktreihen perspectivisch liegen, mithin Schnitte desselben Strahlenbüschels U sind, welches wieder zu beiden gegebenen Strahlenbüscheln perspectivisch ist. Um nun zu irgend einem Strahl x_1 den entsprechenden Strahl x_2 zu finden, bestimmt man den Punkt X_1 in u_1, den Strahl x in U, den Punkt X_2 in u_2 und damit den Strahl x_2 in U_2.

Eine Vereinfachung dieser Construction besteht darin, dass man (Fig. 21) die Geraden u_1 und u_2 mit den Strahlen a_2 und a_1 zusammen-

Fig. 21.



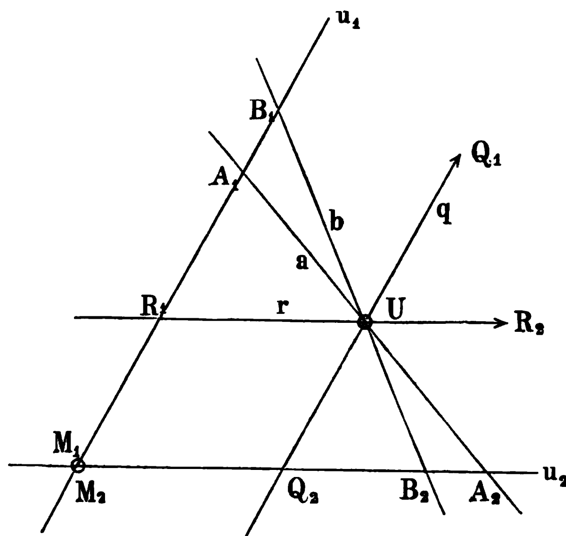
fallend annimmt. Dann entsprechen den Verbindungsstrahlen g_1 und f_2 des Punktes U mit den Punkten U_1 und U_2 die im Verbindungsstrahle der letzteren vereinigten, einander nicht entsprechenden Strahlen g_2 und f_1.

Auf die eben behandelten lassen sich alle anderen Aufgaben dieser Art zurückführen.

19. Besondere Elemente einförmiger Gebilde. Wenn zwei Punktreihen u_1 und u_2 aufeinander projectivisch bezogen sind, entspricht im allgemeinen dem unendlich fernen Punkte Q_1 der ersten ein im endlichen Bereiche liegender Q_2 der zweiten und dem unendlich fernen Punkte R_2 der Punkt R_1. Die unendlich fernen und die ihnen entsprechenden Punkte der projectivischen Punktreihen sind als besondere Punkte anzusehen; die letzteren hängen von der angenommenen projectivischen Beziehung ab, während die ersten hievon ganz unabhängig sind. Bringt man die Punktreihen in perspectivische Lage, so ergeben sich die Punkte R_1 und Q_2 direct als die Schnittpunkte der zu den

Trägern u_1 und u_2 (Fig. 22) Parallelen q und r durch das Projectionscentrum U. Werden außer denselben noch die Punkte A_1, B_1 und die ihnen entsprechenden A_2, B_2 in Betracht gezogen, so ist

Fig. 22.



$$(A_1\,B_1\,R_1\,Q_1) = (A_2\,B_2\,R_2\,Q_2)$$

oder

$$(A_1\,B_1\,R_1):(A_1\,B_1\,Q_1) = (A_2\,B_2\,R_2):(A_2\,B_2\,Q_2),$$

und da

$$(A_1\,B_1\,Q_1) = (A_2\,B_2\,R_2) = 1$$

ergibt sich daraus

$$\frac{A_1\,R_1}{B_1\,R_1} = \frac{B_2\,Q_2}{A_2\,Q_2},$$

demnach

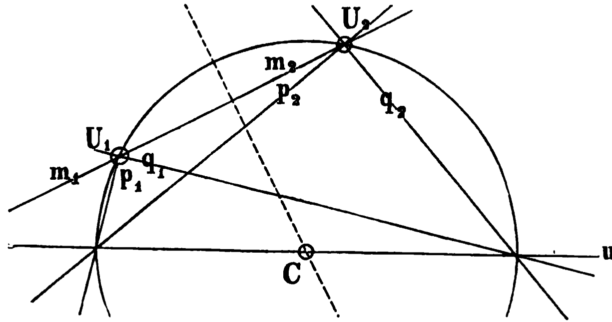
$$R_1\,A_1 \,.\, Q_2\,A_2 = R_1\,B_1 \,.\, Q_2\,B_2$$

als besondere Relation für projectivische Punktreihen.

Unter den Strahlen eines Büschels ist keiner vorhanden, welcher gleich dem unendlich fernen Punkte einer Punktreihe als besonderes Element angesehen werden könnte. Wenn aber zwei Strahlenbüschel U_1 und U_2 projectivisch aufeinander bezogen sind, kann nach entsprechenden rechten Winkeln gefragt werden, und die Strahlen q_1, r_1; q_2, r_2, welche dieselben

einschließen, sind als besondere, jedoch von der angenommenen projectivischen Beziehung abhängige Elemente anzusehen. Man construiert

Fig. 23.



sie mit Hilfe eines Kreises, welcher durch die Mittelpunkte der in perspectivische Lage gebrachten Büschel geht und dessen Mittelpunkt C auf ihrem perspectivischen Durchschnitt u liegt (Fig. 23).

Auf dieselbe Art lassen sich bei zwei projectivischen Ebenenbüscheln zwei entsprechende rechte Winkel mit Hilfe von Normal-Strahlenbüscheln ermitteln.

---

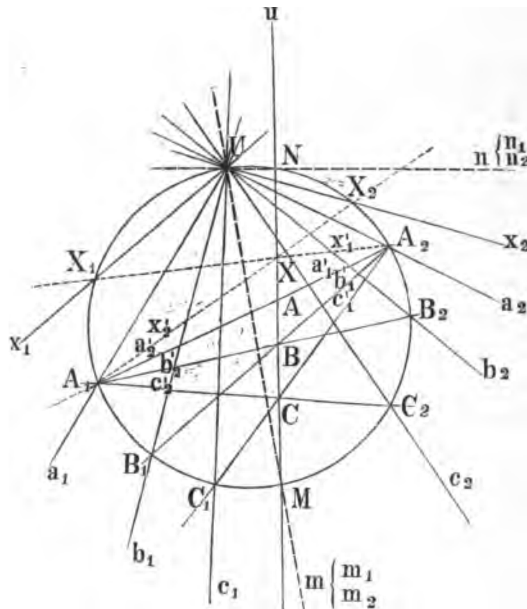
4. Abschnitt.

Aufeinander liegende einförmige Grundgebilde.

20. Doppelelemente. Unter den verschiedenen Lagen, welche zwei gleichartige, projectivische Gebilde gegen einander haben können, ist jene besonders bemerkenswert, wenn deren Träger zusammenfallen, also zwei Punktreihen auf derselben Geraden liegen, zwei Strahlenbüschel derselben Ebene concentrisch oder zwei Ebenenbüschel coaxial sind. Dann können entsprechende Elemente aufeinander zu liegen kommen, doch darf die Zahl der Elemente, welche die Gebilde entsprechend gemein haben, nicht mehr als zwei betragen, wenn (Art. 16) diese nicht identisch sein sollen. Die Doppelelemente (Doppelpunkte, Doppelstrahlen, Doppelebenen) werden am einfachsten bei

zwei Strahlenbüscheln ermittelt, indem man sich hiezu eines beliebigen, durch den gemeinsamen Mittelpunkt U derselben (Fig. 24) gelegten Kreises bedient. Schneidet dieser nämlich die Strahlen $a_1, b_1, c_1, \ldots$ und $a_2, b_2, c_2, \ldots$ in den Punkten $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$, so erhält man durch Verbindung der ersteren mit A_2, der letzteren mit A_1 zwei projectivische Strahlenbüschel $a'_1\, b'_1\, c'_1 \ldots$ und $a'_2\, b'_2\, c'_2 \ldots$, weil das erste mit dem Büschel $a_1\, b_1\, c_1 \ldots$, das zweite mit dem Büschel $a_2\, b_2\, c_2 \ldots$ projectivisch gleich ist. Da die entsprechenden Strahlen a'_1 und a'_2 zusammenfallen, haben jene Büschel perspectivische Lage, d. h. die Schnittpunkte A, B, C, . . . entsprechender Strahlen liegen alle auf einer Geraden u. Zwei Strahlen x'_1 und x'_2, die sich in einem Punkte X dieser Geraden schneiden, treffen den Kreis in den Punkten X_1 und X_2 und diese bestimmen wieder zwei entsprechende Strahlen x_1 und x_2 der gegebenen Büschel. Sobald nun der Punkt X auf einen der Schnittpunkte M oder N der Geraden u mit dem Kreise zu liegen kommt, fallen in ihm die Punkte X_1, X_2 und folglich die Strahlen x_1 und x_2 mit einem der Strahlen $m = m_1 = m_2$ oder $n = n_1 = n_2$ zusammen, welche die Punkte M oder N mit U verbinden.

Fig. 24.



Diese Strahlen m und n sind also die gesuchten Doppelstrahlen der concentrischen Strahlenbüschel. Je nachdem die Gerade u den Kreis schneidet, berührt oder nicht schneidet, existieren zwei Doppelstrahlen oder nur ein solcher oder es gibt keine Doppelstrahlen.

Die Ermittlung der Doppelpunkte von zwei aufeinander liegenden Punktreihen und der Doppelebenen von zwei coaxialen Ebenenbüscheln reduciert sich auf die eben behandelte Aufgabe, wenn man die Punktreihe aus einem Punkte projiciert, die Ebenenbüschel durch eine Ebene schneidet u. s. w.

Hieher gehört auch die Aufgabe, bei zwei ungleichartigen, projectivischen Gebilden jene Elemente des einen zu bestimmen, welche in den ihnen entsprechenden Elementen des anderen liegen, und zwar bei einer Punktreihe und einem Strahlen- oder Ebenenbüschel; bei einem Strahlenbüschel und einem Ebenenbüschel, dessen Axe durch den Mittelpunkt des ersteren geht.

Wenn ein Doppelpunkt gegeben ist, kann der zweite durch lineare Construction gefunden werden, indem man auf eine durch denselben gezogene Gerade eine der beiden Punktreihen aus einem beliebigen Punkte projiciert. Die erhaltene Punktreihe ist auch zu der zweiten der aufeinander liegenden perspectivisch und bestimmt ein Projectionscentrum, welches mit jenem Punkte verbunden wird. Der zweite Doppelpunkt liegt auf der Verbindungslinie.

Wie gestaltet sich diese Construction bei zwei ähnlichen, aufeinander liegenden Punktreihen?

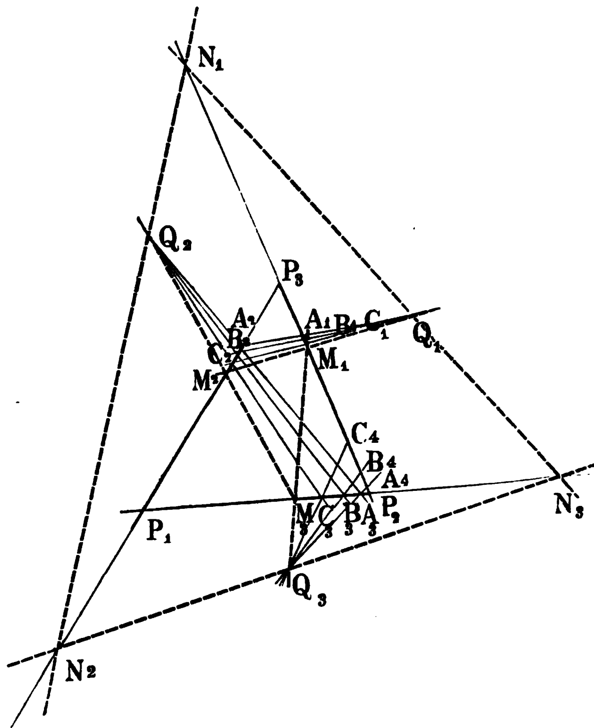
21. Imaginäre Elemente. Im Vorhergehenden wurde die Ermittlung der Doppelstrahlen von zwei concentrischen Strahlenbüscheln auf die Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise zurückgeführt. Die reine Anschauung leitet zu dem Ergebnis, dass die Gerade den Kreis in zwei Punkten schneiden, in einem Punkte berühren oder auch gar nicht treffen kann, so dass entweder zwei Doppelstrahlen oder nur ein solcher oder gar keine Doppelstrahlen vorhanden sind. Die Anwendung der analytischen Geometrie würde durch die Auflösung einer Gleichung vom zweiten Grade zu demselben Ziele führen und in der Beschaffenheit der Wurzeln dieser Gleichung das Kennzeichen liefern, welcher von den genannten Fällen vorliegt. Zwei reale Wurzeln würden den ersten, zwei gleiche Wurzeln den zweiten, zwei imaginäre Wurzeln den dritten Fall anzeigen. Während nun im ersten Falle zwischen der Anschauung und dem analytischen Kennzeichen volle Übereinstimmung besteht, mangelt letztere im zweiten und dritten Falle; es liegt nahe, dieselbe hier und überall dadurch herbeizuführen, dass man im zweiten Falle von zwei zusammenfallenden, im dritten von zwei imaginären Schnittpunkten des Kreises mit der Geraden spricht und eine solche Ausdrucksweise auf die geometrische Deutung beliebiger Gleichungen ausdehnt. Zusammenfallende Punkte sind der Anschauung noch insofern zugänglich, dass man durch Bewegung einer Geraden ihre Schnittpunkte mit einem Kreise oder irgend einer Curve einander beliebig nähern kann, hingegen entziehen sich ihr die imaginären Punkte vollständig. Dies hindert jedoch nicht, dass ihre Einführung und ebenso jene imaginärer Strahlen, Ebenen, Linien und Flächen von großem Vortheile ist, welcher auch Anlass gegeben hat, diese Einführung auf die projectivische Geometrie zu übertragen. Sie gestattet die Beseitigung von Ausnahmen, so dass man z. B. einem Kreise und einer Geraden immer zwei ge-

meinsame Punkte zuschreiben, darf, die real getrennt, real zusammenfallend oder imaginär sein können. Von den Doppelelementen projectivischer Gebilde kann man demnach auch sagen, dass sie immer paarweise auftreten und real getrennt, real zusammenfallend oder imaginär sind.

22. Aufgaben zweiten Grades. Aufgaben zweiten Grades sind jene, welche zwei Lösungen zulassen. Durch die Ermittlung der Doppelelemente wurde eine solche gelöst. Andere werden sich im Verlaufe der Untersuchungen einstellen. Hier soll eine kleine Auswahl zu dem Zwecke vorgeführt werden, die Bedeutung der Doppelelemente durch verschiedene Anwendungen derselben zu erläutern.

a) Ein Dreieck zu construieren, dessen Eckpunkte auf den Seiten eines gegebenen Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ liegen, während seine Seiten durch die gegebenen Punkte Q_1, Q_2, Q_3 gehen.

Fig. 25.

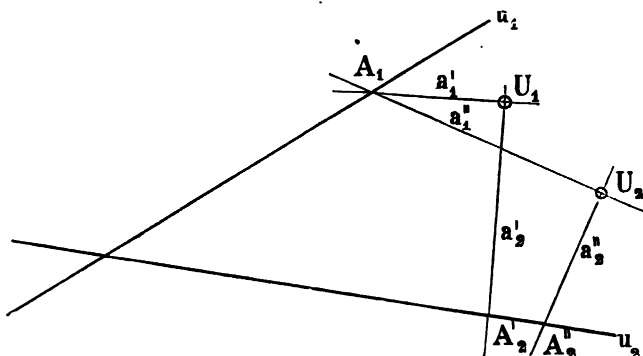


Zieht man (Fig. 25) durch Q_1 einen beliebigen Strahl, welcher die Seiten $P_2 P_3$ und $P_3 P_1$ in den Punkten A_1, A_2 trifft, ferner $Q_2 A_2$ bis A_3 auf $P_1 P_2$ und $Q_3 A_3$ bis A_4 auf $P_2 P_3$, so wäre die Aufgabe gelöst, wenn die Punkte A_1 und A_4 zusammenfallen

würden, was aber nur zufällig eintreten könnte. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man die Punkte B_4, C_4 . . . auf $P_2 P_3$. Die auf demselben Träger befindlichen Punktreihen $A_1 B_1 C_1$ . . . und $A_4 B_4 C_4$ . . . sind projectivisch, weil die letztere aus der ersteren durch fortgesetztes Projicieren abgeleitet wurde. Die Doppelpunkte M_1 und N_1 sind Eckpunkte von Dreiecken der verlangten Beschaffenheit. Die Aufgabe hat also zwei Lösungen, die auch in eine einzige zusammenfallen oder imaginär sein können.

b) Auf zwei gegebenen Geraden u_1 und u_2 je einen Punkt zu finden, so dass aus zwei gegebenen Punkten U_1 und U_2 die Strecke zwischen jenen Punkten unter einem rechten Winkel erscheint. Verbindet man einen beliebigen Punkt A_1 von u_1 mit U_1 und U_2 (Fig. 26), zieht zu den Verbindungsstrahlen a'_1, a''_1 die Senkrechten a'_2, a''_2

Fig. 26.



durch U_1 und U_2, welche die Gerade u_2 in den Punkten A'_2 und A''_2 treffen, so wäre die Aufgabe gelöst, wenn diese Punkte zusammenfallen würden u. s. w.

c) Gegeben sind vier Geraden, von welchen keine zwei sich schneiden. Es soll eine Gerade gefunden werden, welche alle vier Geraden schneidet. Projiciert man aus zwei der Geraden alle Punkte der dritten, so erhält man zwei projectivische Ebenenbüschel. Diese bestimmen auf der vierten Geraden zwei projectivische, aufeinander liegende Punktreihen. Durch jeden Doppelpunkt der letzteren geht eine Gerade von der gesuchten Beschaffenheit. Man erhält sie als Schnittlinie der zwei Ebenen, welche jene zwei Geraden mit dem betreffenden Doppelpunkte verbinden.

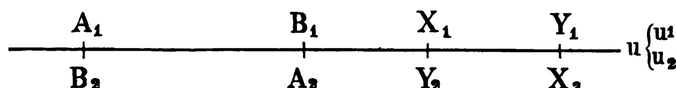
23. Involution. Wenn zwei projectivische Punktreihen aufeinander liegen, so muss jeder Punkt des gemeinsamen Trägers doppelt gedacht werden, je nachdem er zu der einen oder zu der anderen Punktreihe gerechnet wird. Entsprechen einander die vereinigten Punkte, so hat man es mit einem Doppelpunkte zu thun, was höchstens zweimal vorkommen kann, wenn die Punktreihen nicht identisch sein sollen. Im allgemeinen werden sich also die in einem Punkte des Trägers vereinigten Punkte der beiden Punktreihen nicht entsprechen, sondern es werden denselben andere Punkte zugewiesen sein, die nicht vereinigt zu sein brauchen. Sind sie es aber ebenfalls, dann haben die

Punktreihen eine eigenthümliche Lage zu einander, welche im folgenden näher untersucht werden soll.

Es mögen die Punktreihen $A_1 B_1 \ldots X_1 Y_1 \ldots$ und $A_2 B_2 \ldots X_2 Y_2 \ldots$ derart auf dem Träger u (Fig. 27) liegen, dass den vereinigten Punkten A_1, B_2 die vereinigten Punkte A_2, B_1 entsprechen. Mit dem Punkte X_1 falle der Punkt Y_2 zusammen. Die gegenseitige Lage der Punkte X_2 und Y_1 ergibt sich aus der projectivischen Beziehung

$$(A_1 B_1 X_1 Y_1) = (A_2 B_2 X_2 Y_2);$$

Fig. 27.



da man nämlich statt A_2, B_2, Y_2 auch B_1, A_1, X_1 schreiben darf, so erhält man daraus

$$(A_1 B_1 X_1 Y_1) = (B_1 A_1 X_2 X_1) = (A_1 B_1 X_1 X_2)$$

(Art. 12) oder

$$\frac{(A_1 B_1 X_1)}{(A_1 B_1 Y_1)} = \frac{(A_1 B_1 X_1)}{(A_1 B_1 X_2)},$$

und daraus folgt

$$(A_1 B_1 Y_1) = (A_1 B_1 X_2),$$

d. h. die Punkte Y_1 und X_2 haben in Bezug auf dieselben Fundamentalpunkte gleiche Theilverhältnisse, sie fallen zusammen.

Sobald also bei zwei aufeinander liegenden Punktreihen irgend zwei vereinigten Punkten wieder zwei vereinigte Punkte entsprechen findet dieses wechselseitige doppelte Entsprechen durchwegs statt; zwei solche, einander doppelt entsprechende Punkte werden conjugierte Punkte und das ganze System derselben ein »Punktsystem« oder »eine Involution von Punktepaaren« genannt. Man pflegt conjugierte Punkte auch durch einzelne, die Zusammengehörigkeit zum Ausdruck bringende Buchstaben zu bezeichnen: A, A'; B, B'; C, C'; ... X, X'; ..., so dass den Punkten $A, B, C, X \ldots$ die Punkte $A', B', C', X' \ldots$, aber auch z. B. den Punkten $A, A', B, X', \ldots$ die Punkte $A', A, B', X, \ldots$ entsprechen. Für die Bestimmung eines Punktsystems genügt die Annahme von zwei Paaren conjugierter Punkte. Denn sind A und A', B und B' gegeben, so findet man zu dem bekannten Punkt X den conjugierten X' aus der Beziehung

$$(A A' B X) = (A' A B' X')$$

oder

$$\frac{(A\,A'B)}{(A\,A'X)} = \frac{(A'A\,B')}{(A'A\,X')}$$

durch sein Theilverhältnis

$$(A'A\,X') = \frac{(A'A\,B')}{(A\,A'B)} \cdot (A\,A'X).$$

Da bei zwei projectivischen Gebilden je drei Elemente willkürlich angenommen werden dürfen, so hat es den Anschein, dass mit der Annahme von zwei Paaren conjugierter Punkte, also von je vier Punkten der Punktreihen, zu viel geschehen sei. Das ist aber nicht der Fall, denn durch die Annahme der Paare A, A'; B, B' ist ausgesprochen, dass den Punkten A, A', B, B' die Punkte A', A, B', B projectivisch entsprechen sollen, dass also

$$(A\,A'B\,B') = (A'A\,B'B)$$

und die Gleichheit dieser Doppelverhältnisse besteht (Art. 12) schon an und für sich.

Da bei zwei involutorisch liegenden Punktreihen die unendlich fernen Punkte Q_1 und R_2 beide auf dem unendlich fernen Punkte des gemeinsamen Trägers liegen, also als vereint anzusehen sind, fallen auch die ihnen entsprechenden Punkte R_1 und Q_2 (siehe Fig. 22) aufeinander. Der Punkt, in dem die letzteren zusammenfallen, wird das Centrum der Involution genannt. Derselbe soll mit O und der ihm conjugierte unendlich ferne Punkt mit O' bezeichnet werden. Sind dann X und X', Y und Y' zwei Paare conjugierter Punkte der Involution, so ist

$$(X\,Y\,O\,O') = (X'Y'O'O)$$

oder

$$\frac{(X\,Y\,O)}{(X\,Y\,O')} = \frac{(X'Y'O')}{(X'Y'O)},$$

und weil $(X\,Y\,O') = (X'Y'O') = 1$, so folgt daraus

$$(X\,Y\,O) = \frac{1}{(X'Y'O)}$$

oder

$$\frac{XO}{YO} = \frac{Y'O}{X'O},$$

woraus sich die Beziehung

$$OX.OX' = OY.OY'$$

zwischen dem Involutionscentrum und irgend zwei Paaren conjugierter Punkte ergibt, nach welcher also für die conjugierten Punktepaare A, A'; B, B'; C, C'; . . .

$$OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = \ldots = \pm a^2,$$

wenn unter a eine Constante verstanden ist, welche aus der Lage eines beliebigen Paares conjugierter Punkte zum Involutionscentrum folgt.

Die Doppelpunkte, welche hier den Namen Ordnungspunkte oder Asymptotenpunkte führen, können auf dem bekannten Wege (Art. 20) ermittelt werden. Je nachdem sie real getrennt, real zusammenfallend oder imaginär sind, nennt man das Punktsystem ein hyperbolisches, parabolisches oder ein elliptisches. Bei dem hyperbolischen Punktsystem sind die Paare conjugierter Punkte zu den Doppelpunkten harmonisch. Werden nämlich diese mit M und N bezeichnet und ist X, X' ein conjugiertes Paar, so hat man

$$(MNXX') = (MNX'X)$$

oder

$$\frac{(MNX)}{(MNX')} = \frac{(MNX')}{(MNX)},$$

also

$$(MNX)^2 = (MNX')^2,$$

$$(MNX) = \pm (MNX')$$

und da diese Theilverhältnisse nicht gleich sein können, weil die Punkte X und X' getrennt sind, ist

$$(MNX) = -(MNX'),$$

womit die Behauptung erwiesen erscheint.

Da das Centrum der Involution und der unendlich ferne Punkt auch harmonisch sind in Bezug auf die Ordnungspunkte, so halbiert jenes die von den letzteren bestimmte Strecke und hat von beiden die Entfernung a; denn es ist

$$OA.OA' = \ldots = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2 = a^2.$$

Ein besonderer Fall des hyperbolischen Punktsystems tritt ein, wenn ein Ordnungspunkt (und mit ihm das Centrum) in unendliche Entfernung rückt. Der im endlichen Bereiche bleibende Ordnungspunkt halbiert dann die Strecke zwischen irgend zwei conjugierten Punkten. Ein solches Punktsystem wird ein gleichseitig hyperbolisches genannt.

Bei dem parabolischen Punktsystem fallen die Ordnungspunkte mit dem Centrum zusammen und da von zwei conjugierten Punkten der eine zwischen den Ordnungspunkten liegen muss, fällt er nun auf das Centrum, so dass dieses allen Punkten des Systems conjugiert ist.

Bei dem elliptischen Punktsystem ist

$$OA.OA' = OB.OB' = \ldots = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2 = -a^2$$

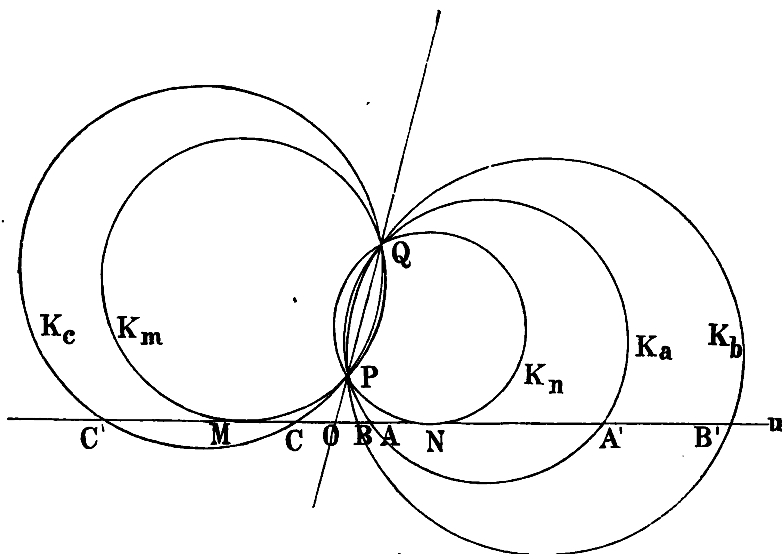
zu setzen, damit die Ordnungspunkte M und N imaginär werden. Obwohl sich diese der Anschauung entziehen, sagt man doch zur Herstellung des Einklanges, dass sie harmonisch sind zu irgend einem Paar conjugierter Punkte und das die zwischen ihnen befindliche Strecke von dem Involutionscentrum halbiert wird. Hier existieren zwei conjugierte zum Centrum symmetrisch liegende Punkte.

Die Beziehung

$$OA.OA' = OB.OB' = \ldots = OX.OX' = \ldots$$

in Verbindung mit einer bekannten Eigenschaft des Kreises liefert ein sehr anschauliches Mittel zur Darstellung und Beurtheilung eines Punkt-

Fig. 28.



systems mit seinem Centrum und seinen Ordnungselementen. Eine Schar von Kreisen, die alle durch zwei gegebene Punkte P und Q

gehen, wird von einer beliebigen Geraden u (Fig. 28) nach einem Punktsystem geschnitten.

Die Kreise K_a, K_b, K_c, ... K_x, ... der Schar bestimmen auf der Geraden die conjugierten Punktepaare A, A'; B, B'; C, C'; ... X, X'; ..., die Verbindungslinie P Q trifft die Gerade in dem Involutionscentrum O. Die von der Geraden u tangierten Kreise K_m und K_n geben in ihren Berührungspunkten M und N die Ordnungspunkte an. Denn es ist

$$OP.OQ = OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = \\ \ldots = OX.OX' = OM^2 = ON^2$$

u. s. w.

Liegen die Punkte P und Q auf derselben Seite der Geraden u, so sind zwei berührende Kreise möglich, es existieren zwei Ordnungspunkte und das Punktsystem ist ein hyperbolisches; speciell gleichseitig hyperbolisch, wenn die Verbindungslinie P Q zu der Geraden u parallel ist.

Die berührenden Kreise fallen zusammen und das Punktsystem ist parabolisch, wenn einer der Punkte P oder Q auf u liegt.

Schließlich sind keine berührenden Kreise möglich, das Punktsystem ist elliptisch, wenn die Punkte P und Q durch die Gerade u getrennt werden.

Soll umgekehrt ein durch zwei Paare conjugierter Punkte A, A'; B, B' gegebenes Punktsystem dargestellt und beurtheilt werden, so hat man durch die Punkte A, A' und B, B' je einen Kreis zu legen. Die Schnittpunkte P und Q der beiden Kreise bestimmen durch ihre Verbindungslinie das Centrum und kennzeichnen durch ihre Lage die Gattung des Punktsystems. Man erkennt leicht, dass ein hyperbolisches Punktsystem dann vorliegt, wenn sich die Punkte A und A' beide innerhalb oder beide außerhalb der Strecke B B' befinden, ein elliptisches hingegen, wenn die Strecke des einen Punktepaares durch einen Punkt des anderen unterbrochen wird.

Zwei projectivische concentrische Strahlenbüschel derselben Ebene oder zwei projectivische coaxiale Ebenenbüschel können ebenso wie dies bei zwei projectivischen, aufeinander liegenden Punktreihen gezeigt wurde, die eigenthümliche Lage erhalten, dass irgend zwei vereinigten Elementen wieder zwei vereinigte Elemente entsprechen. Solche Systeme werden Strahlsysteme, Ebenensysteme oder auch Involutionen von Strahlenpaaren, Ebenenpaaren genannt. Man könnte an denselben die früher durchgeführten Untersuchungen wiederholen, doch genügt es, die beim Punktsystem gewonnenen Ergebnisse zu verwerten, indem man das Strahlsystem oder das Ebenensystem durch Projection eines

Punktsystems aus einem Punkte oder einer Geraden ableitet und beachtet, dass hiebei das Centrum und der unendlich ferne Punkt im allgemeinen nicht durch besonders ausgezeichnete Strahlen oder Ebenen projiciert werden, hingegen dem Auftreten rechtwinkeliger conjugierter Elemente die Aufmerksamkeit zugewendet werden muss. Da ferner das Ebenenbüschel durch ein Normal-Strahlenbüschel vertreten werden kann, gelten die am Strahlsystem durchgeführten Untersuchungen auch für das Ebenensystem.

Die Doppelelemente einer Involution von Strahlen- oder Ebenenpaaren werden Ordnungselemente oder Asymptotenelemente genannt: Ordnungsstrahlen, Ordnungsebenen; Asymptoten, Asymptotenebenen. Je nachdem sie real getrennt, real zusammenfallend oder imaginär sind, heißen die Systeme hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch.

In jedem Strahlsystem sind zwei zu einander senkrechte conjugierte Strahlen, in jedem Ebenensystem zwei solche Ebenen vorhanden. Denkt man sich nämlich das Strahlsystem als Schein eines Punktsystems und das letztere durch eine Schar von Kreisen erzeugt, die alle durch den Mittelpunkt des Strahlsystems und irgend einen zweiten Punkt gehen, so ist immer ein Kreis der Schar zu ermitteln, dessen Mittelpunkt auf dem Träger des Punktsystems liegt u. s. w.

Wenn aber ein Strahlsystem zwei Paare conjugierter, aufeinander senkrechter Strahlen enthält, so sind überhaupt alle conjugierten Strahlenpaare rechtwinkelig; denn irgend ein Punktsystem, deren Schein das Strahlsystem ist, kann nun durch eine Schar von Kreisen erzeugt werden, die alle ihre Mittelpunkte auf dem Träger haben, sobald die Schar durch die beiden Kreise bestimmt wird, welche den Mittelpunkt des Strahlsystems gemein haben. Dieses wird ein Kreissystem genannt; es ist elliptisch, weil es keine Ordnungsstrahlen haben kann.

Sind die Ordnungsstrahlen eines Strahlsystems zu einander senkrecht, so heißt dasselbe ein hyperbolisch gleichseitiges. Irgend zwei conjugierte Strahlen sind dann symmetrisch zu den Ordnungsstrahlen. Dieses ist leicht einzusehen, wenn man das Strahlsystem durch eine Gerade parallel zu einem Ordnungsstrahl geschnitten denkt. Dadurch ensteht ein hyperbolisch gleichseitiges Punktsystem, dessen im endlichen Bereiche vorhandener Ordnungspunkt auf dem zweiten Ordnungsstrahl liegt und die Strecke zwischen irgend zwei conjugierten Punkten halbiert u. s. w.

Eine Involution von Strahlen- oder Ebenenpaaren ist ebenso wie eine Involution von Punktepaaren durch zwei Paare conjugierter

Elemente bestimmt. Ein drittes Paar kann nicht mehr willkürlich angenommen werden.

Man pflegt nun drei Paare conjugierter Elemente irgend einer Involution in beschränkterem Sinne selbst eine Involution zu nennen, weil deren Auftreten bei verschiedenen geometrischen Figuren beobachtet worden ist.

Ungleichartige Grundgebilde haben involutorische Lage, wenn zwei einander nicht entsprechenden Elementen, von welchen das eine in dem anderen liegt, zwei einander nicht entsprechende Elemente zugewiesen sind, deren eines wieder in dem anderen liegt, also z. B. bei einer Punktreihe und einem Strahlenbüschel der Punkt X_1 auf dem Strahle y_2 und der Punkt X_2 auf dem Strahle y_1 u. s. w.

Den Ausführungen über die Involution sei noch eine Anzahl von Aufgaben angeschlossen.

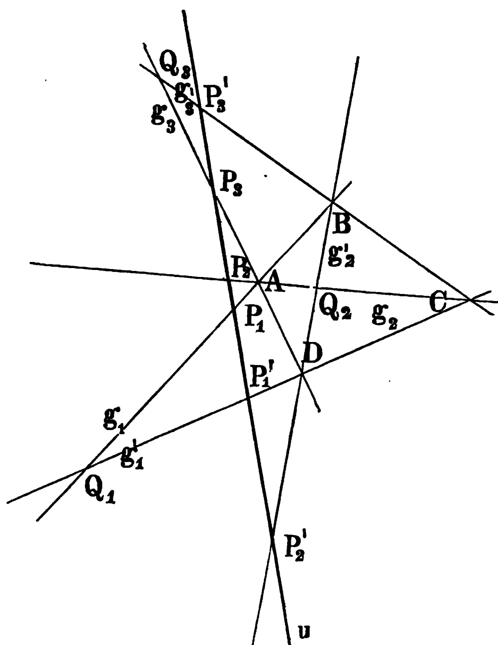
a) Zwei projectivische Punktreihen in involutorische Lage zu bringen. Man legt dieselben derart aufeinander, dass die den unendlich fernen Punkten entsprechenden Punkte sich decken. Zwei Lösungen, davon eine hyperbolisch und eine elliptisch.

Wie verhält es sich bei zwei projectivisch ähnlichen oder gleichen Punktreihen?

b) Zwei projectivische Strahlen- oder Ebenenbüschel in involutorische Lage zu bringen. Man legt dieselben derart aufeinander, dass zwei entsprechende gleiche Winkel (z. B. die entsprechenden rechten Winkel) sich decken, jedoch verkehrt aufeinander liegen u. s. w. Zwei Lösungen.

c) Einen Punkt zu finden, aus dem ein elliptisches Punktsystem durch ein Kreissystem projiciert wird. Denkt man sich das gegebene Punktsystem durch eine Schar von Kreisen erzeugt, deren Mittelpunkte auf dem Träger liegen, so haben die gemeinsamen Punkte P und Q der Kreise die verlangte Beschaffenheit.

Fig. 29.



d) Zwei projectivische Strahlenbüschel einer Ebene durch eine Gerade derart zu schneiden, dass die entstehenden Punktreihen sich in Involution befinden.

Jede Gerade, die einen Punkt $(x_1 y_2)$ mit dem Punkte $(x_2 y_1)$ verbindet, entspricht der Aufgabe. Unendlich viele Geraden möglich, die einem bestimmten Strahlen-

Punktsystems aus einem Punkte oder einer Geraden ableitet und beachtet, dass hiebei das Centrum und der unendlich ferne Punkt im allgemeinen nicht durch besonders ausgezeichnete Strahlen oder Ebenen projiciert werden, hingegen dem Auftreten rechtwinkeliger conjugierter Elemente die Aufmerksamkeit zugewendet werden muss. Da ferner das Ebenenbüschel durch ein Normal-Strahlenbüschel vertreten werden kann, gelten die am Strahlsystem durchgeführten Untersuchungen auch für das Ebenensystem.

Die Doppelelemente einer Involution von Strahlen- oder Ebenenpaaren werden Ordnungselemente oder Asymptotenelemente genannt: Ordnungsstrahlen, Ordnungsebenen; Asymptoten, Asymptotenebenen. Je nachdem sie real getrennt, real zusammenfallend oder imaginär sind, heißen die Systeme hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch.

In jedem Strahlsystem sind zwei zu einander senkrechte conjugierte Strahlen, in jedem Ebenensystem zwei solche Ebenen vorhanden. Denkt man sich nämlich das Strahlsystem als Schein eines Punktsystems und das letztere durch eine Schar von Kreisen erzeugt, die alle durch den Mittelpunkt des Strahlsystems und irgend einen zweiten Punkt gehen, so ist immer ein Kreis der Schar zu ermitteln, dessen Mittelpunkt auf dem Träger des Punktsystems liegt u. s. w.

Wenn aber ein Strahlsystem zwei Paare conjugierter, aufeinander senkrechter Strahlen enthält, so sind überhaupt alle conjugierten Strahlenpaare rechtwinkelig; denn irgend ein Punktsystem, deren Schein das Strahlsystem ist, kann nun durch eine Schar von Kreisen erzeugt werden, die alle ihre Mittelpunkte auf dem Träger haben, sobald die Schar durch die beiden Kreise bestimmt wird, welche den Mittelpunkt des Strahlsystems gemein haben. Dieses wird ein Kreissystem genannt; es ist elliptisch, weil es keine Ordnungsstrahlen haben kann.

Sind die Ordnungsstrahlen eines Strahlsystems zu einander senkrecht, so heißt dasselbe ein hyperbolisch gleichseitiges. Irgend zwei conjugierte Strahlen sind dann symmetrisch zu den Ordnungsstrahlen. Dieses ist leicht einzusehen, wenn man das Strahlsystem durch eine Gerade parallel zu einem Ordnungsstrahl geschnitten denkt. Dadurch ensteht ein hyperbolisch gleichseitiges Punktsystem, dessen im endlichen Bereiche vorhandener Ordnungspunkt auf dem zweiten Ordnungsstrahl liegt und die Strecke zwischen irgend zwei conjugierten Punkten halbiert u. s. w.

Eine Involution von Strahlen- oder Ebenenpaaren ist ebenso wie eine Involution von Punktepaaren durch zwei Paare conjugierter

Elemente bestimmt. Ein drittes Paar kann nicht mehr willkürlich angenommen werden.

Man pflegt nun drei Paare conjugierter Elemente irgend einer Involution in beschränkterem Sinne selbst eine Involution zu nennen, weil deren Auftreten bei verschiedenen geometrischen Figuren beobachtet worden ist.

Ungleichartige Grundgebilde haben involutorische Lage, wenn zwei einander nicht entsprechenden Elementen, von welchen das eine in dem anderen liegt, zwei einander nicht entsprechende Elemente zugewiesen sind, deren eines wieder in dem anderen liegt, also z. B. bei einer Punktreihe und einem Strahlenbüschel der Punkt X_1 auf dem Strahle y_2 und der Punkt X_2 auf dem Strahle y_1 u. s. w.

Den Ausführungen über die Involution sei noch eine Anzahl von Aufgaben angeschlossen.

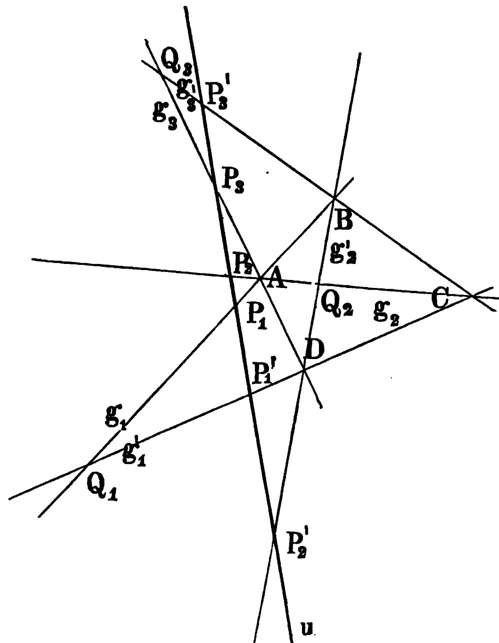
a) Zwei projectivische Punktreihen in involutorische Lage zu bringen. Man legt dieselben derart aufeinander, dass die den unendlich fernen Punkten entsprechenden Punkte sich decken. Zwei Lösungen, davon eine hyperbolisch und eine elliptisch.

Wie verhält es sich bei zwei projectivisch ähnlichen oder gleichen Punktreihen?

b) Zwei projectivische Strahlen- oder Ebenenbüschel in involutorische Lage zu bringen. Man legt dieselben derart aufeinander, dass zwei entsprechende gleiche Winkel (z. B. die entsprechenden rechten Winkel) sich decken, jedoch verkehrt aufeinander liegen u. s. w. Zwei Lösungen.

c) Einen Punkt zu finden, aus dem ein elliptisches Punktsystem durch ein Kreissystem projiciert wird. Denkt man sich das gegebene Punktsystem durch eine Schar von Kreisen erzeugt, deren Mittelpunkte auf dem Träger liegen, so haben die gemeinsamen Punkte P und Q der Kreise die verlangte Beschaffenheit.

Fig. 29.



d) Zwei projectivische Strahlenbüschel einer Ebene durch eine Gerade derart zu schneiden, dass die entstehenden Punktreihen sich in Involution befinden.

Jede Gerade, die einen Punkt $(x_1 y_2)$ mit dem Punkte $(x_2 y_1)$ verbindet, entspricht der Aufgabe. Unendlich viele Geraden möglich, die einem bestimmten Strahlen-

büschel angehören (vgl. Art. 18, Fig. 21), vorausgesetzt, dass die Büschel nicht perspectivisch sind. Was trifft im letzteren Falle ein? Wie lässt sich diese Aufgabe auf die Construction eines durch zwei conjugierte Punktepaare gegebenen Punktsystems anwenden mit Hilfe eines Lineals allein? Wie lautet die (in der Ebene) reciproke Aufgabe?

e) Die drei Paare Gegenseiten g_1, g'_1; g_2, g'_2; g_3, g'_3 eines vollständigen Viereckes A B C D (Fig. 29) werden durch eine Gerade u in drei Punktepaaren P_1, P'_1; P_2, P'_2; P_3, P'_3 geschnitten. Man soll die Beziehung finden, welche zwischen den letzteren besteht. Betrachtet man nacheinander die Punkte A und D als Projectionscentra, so findet man:

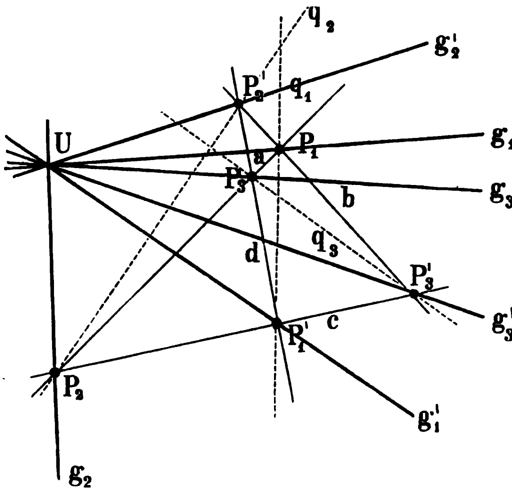
$$(P_1\,P_2\,P_3\,P'_3) = (B\,C\,Q_3\,P'_3) = (P'_2\,P'_1\,P_3\,P'_3),$$

daher auch (Art. 12)

$$(P_1\,P_2\,P_3\,P'_3) = (P'_1\,P'_2\,P'_3\,P_3),$$

d. h. man kann die Punkte P_1, P_2, P_3, P'_3 und P'_1, P'_2, P'_3, P_3 als entsprechende Punkte von zwei aufeinander liegenden projectivischen Punktreihen betrachten, bei welchen sich die Punkte P_3 und P'_3 wechselseitig doppelt entsprechen, welche demnach eine Involution mit den conjugierten Paaren P_1, P'_1; P_2, P'_2; P_3, P'_3 bilden.

Fig. 30.



Wie lässt sich dieses Ergebnis auf die lineare Construction einer Involution von 6 Punkten anwenden, von welcher zwei conjugierte Paare und ein Punkt gegeben sind, z. B. A, A'; B, B' und C?

Man behandle die reciproke Aufgabe (Fig. 30), indem man die drei Paare Gegenpunkte eines vollständigen Vierseites a b c d aus einem Punkte U projiciert u. s. w.

---

5. Abschnitt.

Erzeugnisse projectivischer einförmiger Grundgebilde und die wichtigsten Eigenschaften derselben.

24. Projectivische Grundgebilde in allgemeiner Lage. Bekanntlich sind zwei projectivische Grundgebilde derart aufeinander bezogen, dass jedem Elemente des einen ein Element des anderen und

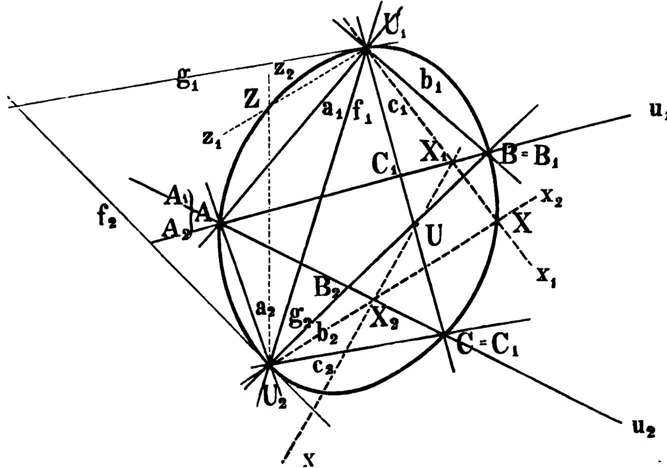
jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen Gebildes eine ebensolche des anderen entspricht. Die perspectivische Lage von zwei Grundgebilden erscheint dadurch charakterisiert (Art. 10), dass entweder sämmtliche Elemente des einen in den entsprechenden Elementen des anderen liegen oder dass die Paare entsprechender Elemente eine stetige Folge neuer Elemente bestimmen, die wieder ein ganz bestimmtes, einförmiges Grundgebilde zusammensetzen, welches zu jenen zwei Gebilden ebenfalls perspectivisch ist. So liegen die Punkte einer Punktreihe z. B. in den entsprechenden Ebenen eines dazu perspectivischen Ebenenbüschels; hingegen bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier Punktreihen oder die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier Ebenenbüschel bei perspectivischer Lage derselben ein Strahlenbüschel, die Schnittpunkte oder Verbindungsebenen zweier perspectivischer Strahlenbüschel eine Punktreihe oder ein Ebenenbüschel u. s. w.

Haben aber die beiden projectivischen Grundgebilde allgemeine Lage zueinander und werden überhaupt durch die Paare entsprechender Elemente neue Elemente bestimmt, so bilden diese wohl noch immer eine stetige Folge, sind aber jetzt nicht mehr die Bestandtheile eines einförmigen Grundgebildes, sondern sie gehören einem neuen, gesetzmäßig entstandenen Gebilde an, dessen Elemente Punkte, Geraden oder Ebenen sind, dessen Träger hingegen eine krumme Linie oder Fläche ist, auf der die Elemente liegen oder die sie umhüllen. Diese neuen Gebilde sieht man als Erzeugnisse der projectivischen Grundgebilde an; ihre Träger bedürfen schon für sich einer besonderen Untersuchung und können auch — wie hier geschehen wird — für sich allein als Erzeugnisse der projectivischen Gebilde aufgefasst werden. Die wichtigste Rolle spielen die Erzeugnisse von zwei projectivischen Strahlenbüscheln oder Punktreihen derselben Ebene. Auf deren Untersuchung kann jene der anderen Gebilde gegründet werden.

25. Linien zweiter Ordnung. Zwei projectivische, nicht concentrische und nicht perspectivische Strahlenbüschel U_1 und U_2 derselben Ebene (Fig. 31) erzeugen eine Linie zweiter Ordnung, die nämlich mit einer Geraden ihrer Ebene zwei Punkte gemein hat, welche real getrennt, zusammenfallend oder imaginär sein können. Denn die Schnittpunkte entsprechender Strahlen bilden eine stetige Folge von Punkten, die laut Voraussetzung nicht auf einer Geraden liegen können, demnach auf einer Curve liegen müssen; von irgend einer Geraden ihrer Ebene werden die Büschel nach zwei projectivischen, aufeinander liegenden Punktreihen geschnitten, deren Doppelpunkte zugleich Schnittpunkte ent-

sprechender Strahlen, also Schnittpunkte der Geraden mit der Curve sind. Diese geht durch die Mittelpunkte U_1 und U_2 der erzeugenden Strahlenbüschel und wird in ihnen von den Strahlen g_1 und f_2 berührt, welche den in der Verbindungslinie $U_1 U_2$ vereinigten Strahlen g_2 und f_1 entsprechen; denn die Schnittpunkte der letzteren mit den ihnen entsprechenden Strahlen g_1 und f_2 sind mit den Punkten U_1 und U_2 identisch; nähert sich ferner ein Punkt Z der Curve dem Punkte U_1,

Fig. 81.



so nähert sich von den ihn bestimmenden Strahlen der Büschel der Strahl z_1 der Tangente in U_1, der Strahl z_2 der Verbindungslinie $U_1 U_2$, bis sie endlich mit diesen zusammenfallen und da der Strahl z_2 dann identisch wird mit g_2, so muss die Tangente in U_1 identisch sein mit g_1.

Die Aufgabe, Punkte der Linie zweiter Ordnung zu finden, fällt mit der Aufgabe zusammen, entsprechende Strahlen der projectivischen Büschel zu construieren (Art. 18). Im vorliegenden Falle bedient man sich hiezu mit Vortheil der durch den Schnittpunkt A irgend eines Paares entsprechender Strahlen a_1 und a_2 nach den beliebigen Punkten B und C der Curve gezogenen Geraden u_1 und u_2, auf welchen die erzeugenden Büschel die projectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$ und $A_2 B_2 C_2 \ldots$ ausschneiden. Diese haben den Punkt A, in dem die Punkte A_1 und A_2 zusammenfallen, entsprechend gemein, sind also perspectivisch und Schnitte eines Strahlenbüschels U. Daher schneidet irgend ein durch U gelegter Strahl x die Geraden u_1 und u_2 in den

entsprechenden Punkten X_1 und X_2, welche wieder die entsprechenden Strahlen x_1 und x_2 der erzeugenden Büschel, sowie in deren Schnittpunkt X einen neuen Punkt der Linie zweiter Ordnung bestimmen.

Aus dieser Construction lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

a) Hält man auf der durch die Strahlenbüschel U_1 und U_2 erzeugten Linie zweiter Ordnung die beliebig gewählten Punkte B, C und X fest, bewegt aber den Punkt A auf der Curve, so beschreiben die Geraden u_1 und u_2 in den Punkten B und C zwei Strahlenbüschel, die man derart aufeinander beziehen kann, dass die einander in A schneidenden Strahlen sich entsprechen. Die Punkte X_1 und X_2, durch welche zwei solche Strahlen gehen, bewegen sich hiebei auf den festen Strahlen $U_1 X = x_1$ und $U_2 X = x_2$, während sich ihre Verbindungslinie x um den ebenfalls festen Punkt U, nämlich den Schnittpunkt der festen Strahlen $U_1 C = c_1$ und $U_2 B = b_2$ dreht. Die Punkte X_1 und X_2 beschreiben daher zwei perspectivische Punktreihen, die Geraden u_1 und u_2 also zwei projectivische Strahlenbüschel. Daraus folgt der Satz:

»Die Punkte einer Linie zweiter Ordnung werden aus irgend zwei derselben durch zwei projectivische Strahlenbüschel projiciert, von welchen sich jene Strahlen entsprechen, welche denselben Punkt projicieren.«

Hiedurch wird der besondere Charakter der Punkte U_1 und U_2 als Mittelpunkte der erzeugenden Strahlenbüschel aufgehoben, da dieselben durch zwei beliebige Punkte der Curve ersetzt werden können, wodurch auch die Möglichkeit geboten ist, in jedem Punkte die Tangente zu construieren.

b) Die Punkte A, B, U_2, X, U_1, C können als die Eckpunkte eines der Curve eingeschriebenen einfachen Sechseckes angesehen werden, bei welchem die Seiten A B und X U_1; B U_2 und U_1 C; U_2 X und C A gegenüberliegende Seiten sind; die Schnittpunkte X_1, U und X_2 dieser drei Paare liegen auf dem Strahle x. Daraus folgt der Satz:

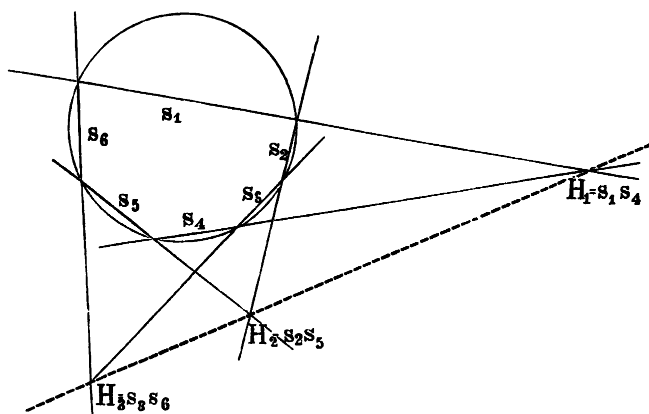
»Die Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten eines einfachen Sechseckes, welches einer Linie zweiter Ordnung eingeschrieben ist, liegen in einer Geraden.«

Dieser Satz führt nach seinem Entdecker den Namen »Pascals Satz«. (Vgl. Fig. 32.)

c) Da für die Feststellung der projectivischen Beziehung zweier Strahlenbüschel die Annahme von je drei, einander entsprechenden Strahlen derselben genügt, so ist durch fünf Punkte, von welchen keine drei in einer Geraden liegen, eine Linie zweiter Ordnung bestimmt.

Denn man kann zwei derselben als Mittelpunkte der zwei Strahlenbüschel wählen, jeden mit den übrigen drei Punkten verbinden, wodurch

Fig. 32

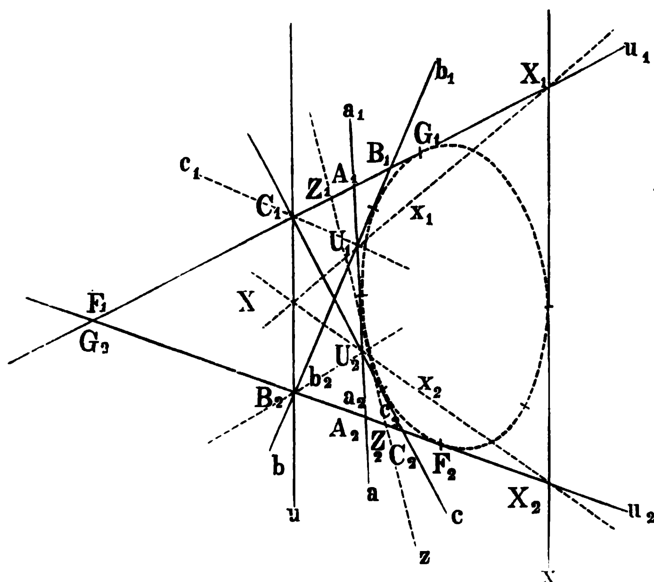


sich drei Paare entsprechender Strahlen ergeben u. s. w. Es könnte scheinen, dass vermöge der verschiedenen Combinationen, welche hiebei möglich sind, auf diese Art mehrere Curven erzeugt werden können, die alle durch die gegebenen fünf Punkte gehen; doch kann leicht gezeigt werden, dass diese nur eine Linie zweiter Ordnung bestimmen. Nimmt man nämlich an, dass durch die fünf Punkte U_1, U_2, A, B, C zwei von einander verschiedene Curven gehen und projiciert die Punkte dieser beiden aus U_1 durch ein Strahlenbüschel, so würde diesem für jede Curve ein projectivisches Strahlenbüschel in U_2 entsprechen, so dass sich in diesem Punkte zwei projectivische Büschel ergeben müssten. Diese aber hätten laut Voraussetzung die drei Strahlen $U_2 A$, $U_2 B$ und $U_2 C$ entsprechend gemein, wären daher identisch u. s. w.

Denkt man zwei von den fünf Punkten zusammenfallend, so kann dieses zum Ausdruck gebracht werden, dass man einen Punkt und die Tangente in demselben annimmt. Demnach ist durch vier Punkte und die Tangente in einem von ihnen oder durch drei Punkte und die Tangenten in zwei von denselben eine Linie zweiter Ordnung ebenfalls bestimmt. Wären z. B. die Punkte U_1, U_2, A, B und die Tangente t_1 in U_1 gegeben, verlegt man dann die Mittelpunkte der erzeugenden Büschel nach U_1 und U_2, so entsprechen den Strahlen $U_1 A$; $U_1 B$; t_1 des Büschels U_1 die Strahlen $U_2 A$; $U_2 B$; $U_2 U_1$ des Büschels U_2, so dass die projectivische Beziehung bei dieser Annahme ebenso bestimmt ist, wie durch fünf Punkte.

26. Linien zweiter Classe. Zwei projectivische, nicht aufeinander liegende und nicht perspectivische Punktreihen u_1 und u_2 derselben Ebene (Fig. 33) erzeugen eine Linie zweiter Classe, an welche

Fig. 33.



nämlich aus einem Punkte ihrer Ebene zwei Tangenten gelegt werden können, die entweder real getrennt, zusammenfallend oder imaginär sind. Denn die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden eine stetige Folge von Strahlen, die laut Voraussetzung nicht durch einen Punkt gehen können, demnach eine Curve umhüllen; aus irgend einem Punkte werden die Punktreihen durch zwei projectivische, concentrische Strahlenbüschel projiciert, deren Doppelstrahlen zugleich Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte, also Tangenten aus dem Punkte an die Curve sind. Diese berührt die Träger u_1 und u_2 der erzeugenden Punktreihen und hat auf ihnen die Berührungspunkte G_1 und F_2, welche den im Schnittpunkte $u_1 u_2$ vereinigten Punkten G_2 und F_1 entsprechen; denn die Verbindungslinien der letzteren mit den ihnen entsprechenden Punkten G_1 und F_2 sind mit den Geraden u_1 und u_2 identisch. Nähert sich ferner eine Tangente z der Curve der Tangente u_1, so nähert sich von den sie bestimmenden Punkten der Punktreihe der Punkt Z_1 dem Berührungspunkte in u_1, der Punkt z_2 dem Schnittpunkte $u_1 u_2$, bis sie endlich mit diesen zusammenfallen und da der

Punkt Z_2 dann identisch wird mit G_2, muss der Berührungspunkt in u_1 identisch sein mit G_1.'

Die Aufgabe, Tangenten der Linie zweiter Classe zu finden, fällt mit der Aufgabe zusammen, entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen zu construieren (Art. 18). Im vorliegenden Falle bedient man sich hiezu mit Vortheil der auf der Verbindungslinie a irgend eines Paares entsprechender Punkte A_1 und A_2 durch irgend zwei Tangenten b und c der Curve ausgeschnittenen Punkte U_1 und U_2, aus welchen die erzeugenden Punktreihen durch die projectivischen Strahlenbüschel $a_1\, b_1\, c_1\, \ldots$ und $a_2\, b_2\, c_2\, \ldots$ projiciert werden. Diese haben den Strahl a, in dem die Strahlen a_1 und a_2 zusammenfallen, entsprechend gemein, sind also perspectivisch und Scheine einer Punktreihe u. Daher wird ein auf u liegender Punkt X aus den Punkten U_1 und U_2 durch die entsprechenden Strahlen x_1 und x_2 projiciert, welche wieder die entsprechenden Punkte X_1 und X_2 der erzeugenden Punktreihen, sowie in deren Verbindungslinie x eine neue Tangente der Linie zweiter Classe bestimmen.

Aus dieser Construction lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

a) Hält man auf der durch die Punktreihen u_1 und u_2 erzeugten Linie zweiter Classe die beliebig gewählten Tangenten b, c und x fest, bewegt aber die Tangente a auf der Curve, so beschreiben die Punkte U_1 und U_2 in den Tangenten b und c zwei Punktreihen, die man derart aufeinander beziehen kann, dass sich die auf a liegenden Punkte entsprechen. Die Strahlen x_1 und x_2, auf welchen zwei solche Punkte liegen, drehen sich hiebei um die festen Punkte $u_1 x = X_1$ und $u_2 x = X_2$, während sich ihr Schnittpunkt X auf der ebenfalls festen Geraden u, nämlich der Verbindungslinie der festen Punkte $u_1 c = C_1$ und $u_2 b = B_2$ bewegt. Die Strahlen x_1 und x_2 beschreiben daher zwei perspectivische Strahlenbüschel, die Punkte U_1 und U_2 also zwei projectivische Punktreihen. Daraus folgt der Satz:

»Die Tangenten einer Linie zweiter Classe werden durch irgend zwei derselben nach zwei projectivischen Punktreihen geschnitten, von welchen sich die Punkte entsprechen, welche auf derselben Tangente liegen.«

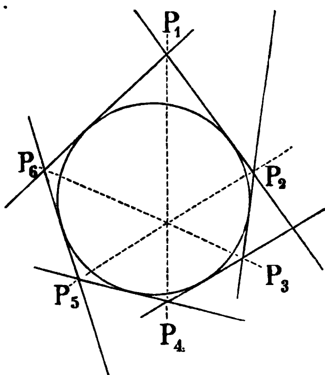
Hiedurch wird der besondere Charakter der Geraden u_1 und u_2 als Träger der erzeugenden Punktreihen aufgehoben, da dieselben durch zwei beliebige Tangenten der Curve ersetzt werden können, wodurch auch die Möglichkeit geboten ist, in jeder Tangente den Berührungspunkt zu construieren.

b) Die Tangenten a, b, u_2, x, u_1, c können als die Seiten eines der Curve umschriebenen einfachen Sechsseites angesehen werden, bei welchem die Eckpunkte $a\,b$ und $x\,u_1$; $b\,u_2$ und $u_1\,c$; $u_2\,x$ und $c\,a$ gegenüberliegende Eckpunkte sind; die Verbindungslinien x_1, u und x_2 dieser drei Paare gehen durch den Punkt X.

Daraus folgt der Satz:

»Die Verbindunglinien der drei Paare gegenüber liegender Eckpunkte eines einfachen Sechsseites, welches einer Linie zweiter Classe umschrieben ist, gehen durch einen Punkt.«

Fig. 34.



Dieser Satz führt nach seinem Entdecker den Namen: »Brianchons Satz«. (Vgl. Fig. 34.)

c) Da für die Herstellung der projectivischen Beziehung zweier Punktreihen die Annahme von je drei, einander entsprechenden Punkten derselben genügt, so ist durch fünf Tangenten, von welchen keine drei durch einen Punkt gehen, eine Linie zweiter Classe bestimmt. Denn man kann zwei derselben als Träger der zwei Punktreihen wählen, jede durch die übrigen drei schneiden lassen, wodurch sich drei Paare entsprechender Punkte ergeben u. s. w. Es könnte scheinen, dass vermöge der verschiedenen Combinationen, welche hiebei möglich sind, auf diese Art mehrere Curven erzeugt werden können, die alle von den gegebenen fünf Tangenten berührt werden; doch kann leicht gezeigt werden, dass diese nur eine Linie zweiter Classe bestimmen. Nimmt man nämlich an, dass durch die fünf Geraden u_1, u_2, a, b, c zwei von einander verschiedene Curven berührt werden und schneidet die Tangenten dieser beiden durch u_1 nach einer Punktreihe, so würde dieser für jede Curve eine projectivische Punktreihe auf u_2 entsprechen, so dass sich auf dieser Geraden zwei projectivische Punktreihen ergeben müssten. Diese aber hätten laut Voraussetzung die drei Punkte $u_2\,a$, $u_2\,b$, $u_2\,c$ entsprechend gemein, wären daher identisch u. s. w.

Denkt man zwei von den fünf Tangenten zusammenfallend, so kann dieses zum Ausdruck gebracht werden, dass man eine Tangente und den Berührungspunkt in derselben annimmt. Demnach ist durch vier Tangenten und den Berührungspunkt in einer derselben oder durch drei Tangenten und die Berührungspunkte in zwei derselben eine Linie zweiter Classe ebenfalls bestimmt. Wären z.B. die Tangenten u_1, u_2, a, b und

der Berührungspunkt T_1 in u_1 gegeben, verlegt man dann die Träger der erzeugenden Punktreihen auf u_1 und u_2, so entsprechen den Punkten $u_1 a, u_1 b, T_1$ der Punktreihe u_1 die Punkte $u_2 a, u_2 b, u_2 u_1$ der Punktreihe u_2, so dass die projectivische Beziehung bei dieser Annahme ebenso bestimmt ist, wie durch fünf Tangenten.

29. Kegelflächen zweiter Ordnung. Zwei projectivische Ebenenbüschel, welche weder die Axe gemeinsam haben, noch perspectivisch sind, deren Axen sich aber schneiden, erzeugen eine Kegelfläche zweiter Ordnung, die nämlich mit einer Ebene ihres Mittelpunktes zwei Strahlen (Erzeugende) gemein hat, welche real getrennt, zusammenfallend oder imaginär sein können. Denn die Schnittlinien entsprechender Ebenen bilden eine den Schnittpunkt der Axen enthaltende stetige Folge von Strahlen, die laut Voraussetzung nicht in einer Ebene liegen können, demnach auf einer Kegelfläche liegen müssen, deren Mittelpunkt mit dem Schnittpunkte der Axen identisch ist; von irgend einer Ebene ihres Mittelpunktes werden die Ebenenbüschel nach zwei projectivischen, concentrischen Strahlenbüscheln geschnitten, deren Doppelstrahlen zugleich Schnittlinien entsprechender Ebenen, also Schnittlinien der Ebene mit der Kegelfläche sind.

Von einer beliebigen Ebene, welche den Mittelpunkt nicht enthält, werden die erzeugenden Ebenenbüschel nach zwei projectivischen, nicht perspectivischen Strahlenbüscheln geschnitten, welche eine in der schneidenden Ebene liegende Linie zweiter Ordnung bestimmen. Die Punkte der letzteren gehören den Schnittlinien entsprechender Ebenen der Ebenenbüschel an, daher ist die Kegelfläche zweiter Ordnung der von ihrem Mittelpunkte aus erhaltene Schein einer Linie zweiter Ordnung und es können die bei letzterer gewonnenen Untersuchungsergebnisse der ersteren (zum Theil) angepasst werden. Man gelangt dadurch zu folgenden Sätzen:

Die Kegelfläche zweiter Ordnung geht durch die Axen der erzeugenden Ebenenbüschel und wird in diesen von den Ebenen berührt, welche den in der Verbindungsebene der Axen vereinigten entsprechen. Sie hat mit einer den Mittelpunkt nicht enthaltenden Geraden zwei reale getrennte, zusammenfallende oder imaginäre Punkte gemein.

Die Erzeugenden eines Kegels zweiter Ordnung werden aus irgend zwei von ihnen durch zwei projectivische Ebenenbüschel projiciert.

Die Schnittlinien der drei Paare gegenüberliegender Seitenflächen eines einfachen Sechskantes, welches einer Kegelfläche zweiter Ordnung eingeschrieben ist, liegen in einer Ebene.

Eine Kegelfläche zweiter Ordnung ist bestimmt durch fünf Strahlen eines Punktes, von welchen keine drei in einer Ebene liegen, oder durch vier Strahlen und die Tangentenebene in einem derselben, oder durch drei Strahlen und die Tangentenebenen in zwei derselben.

28. Kegelflächen zweiter Classe. Zwei concentrische projectivische Strahlenbüschel, welche nicht in einer Ebene liegen und nicht perspectivisch sind, erzeugen eine Kegelfläche zweiter Classe, an welche nämlich aus einer Geraden ihres Mittelpunktes zwei reale getrennte, zusammenfallende oder imaginäre Tangentenebenen gelegt werden können. Denn die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen bilden eine, den gemeinsamen Mittelpunkt der Büschel enthaltende, stetige Folge von Ebenen, die laut Voraussetzung nicht durch eine Gerade gehen können, demnach eine Kegelfläche umhüllen müssen, deren Mittelpunkt mit dem gemeinsamen Mittelpunkte beider Strahlenbüschel identisch ist. Aus irgend einer Geraden ihres Mittelpunktes werden die Strahlenbüschel durch zwei coaxiale Ebenenbüschel projiciert, deren Doppelebenen zugleich Verbindungsebenen entsprechender Strahlen, also Tangentenebenen aus der Geraden an die Kegelfläche sind.

Von einer beliebigen Ebene, welche den Mittelpunkt nicht enthält, werden die erzeugenden Strahlenbüschel nach zwei projectivischen, nicht perspectivischen Punktreihen geschnitten, welche eine in der schneidenden Ebene liegende Linie zweiter Classe bestimmen. Die Tangenten der letzteren gehören den Verbindungsebenen entsprechender Strahlen der Strahlenbüschel an, daher ist die Kegelfläche zweiter Classe der aus ihrem Mittelpunkte erhaltene Schein einer Linie zweiter Classe und es können die bei letzterer gewonnenen Untersuchungsergebnisse der ersteren (zum Theil) angepasst werden. Man gelangt dadurch zu folgenden Sätzen:

Die Kegelfläche zweiter Classe wird von den Ebenen der erzeugenden Strahlenbüschel tangiert, und zwar längs der Strahlen, welche den in der Schnittlinie ihrer Ebenen vereinigten Strahlen entsprechen. Sie wird aus einem mit dem Mittelpunkte nicht zusammenfallenden Punkte durch zwei Tangentenebenen berührt.

Die Tangentenebenen einer Kegelfläche zweiter Classe werden durch irgend zwei von ihnen nach zwei projectivischen Strahlenbüscheln geschnitten.

Die Verbindungsebenen der drei Paare gegenüberliegender Kanten eines einfachen Sechsflaches, welches einer Kegelfläche zweiter Classe umschrieben ist, gehen durch eine Gerade.

Eine Kegelfläche zweiter Classe ist bestimmt durch fünf Ebenen eines Punktes, von welchen keine drei durch eine Gerade gehen, oder durch vier Ebenen und den Berührungsstrahl in einer derselben oder durch drei Ebenen und die Berührungsstrahlen in zwei derselben

Ein Strahlenbüschel und eine zu ihm projectivische, nicht in seiner Ebene liegende Punktreihe erzeugen im allgemeinen auch eine Kegelfläche zweiter Classe.

29. Regelflächen. Zwei projectivische Punktreihen, deren Träger nicht in einer Ebene liegen oder zwei projectivische Ebenenbüschel, deren Axen nicht durch einen Punkt gehen, erzeugen eine Regelfläche zweiter Ordnung, welche nämlich im allgemeinen von einer Geraden in zwei (realen getrennten, vereinigten oder imaginären) Punkten getroffen wird. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Punktreihen oder die Schnittlinien entsprechender Ebenen der Ebenenbüschel bilden die stetige Folge der Erzeugenden der Fläche, von welchen keine zwei einander schneiden können, weil sonst — gegen die Voraussetzung — die Träger der Punktreihen in der Verbindungsebene dieser Erzeugenden liegen oder die Axen der Ebenenbüschel durch den Schnittpunkt derselben gehen müssten.

Die erzeugenden Punktreihen werden — jede aus dem Träger der anderen — durch zwei projectivische Ebenenbüschel projiciert, so dass die Schnittlinie eines Paares entsprechender Ebenen der letzteren zugleich die Verbindungslinie eines Paares entsprechender Punkte der ersteren ist, also die Punktreihen durch die Ebenenbüschel ersetzt werden können. Und die erzeugenden Ebenenbüschel werden — jedes von der Axe des anderen — nach zwei projectivischen Punktreihen geschnitten, so dass die Verbindungslinie eines Paares entsprechender Punkte der letzteren zugleich die Schnittlinie eines Paares entsprechender Ebenen der ersteren ist, daher die Ebenenbüschel durch die Punktreihen vertreten werden können. Damit ist die Identität der Erzeugnisse bewiesen.

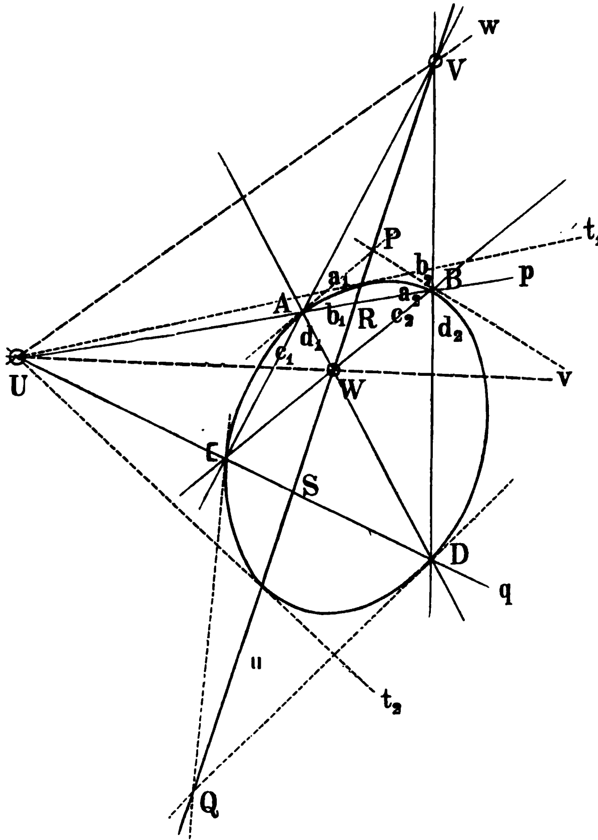
Der Schein aller Erzeugenden einer Regelfläche aus einem Punkte besteht im allgemeinen aus allen Tangentenebenen einer Kegelfläche zweiter Classe; denn die erzeugenden Punktreihen werden aus diesem Punkte durch zwei projectivische Strahlenbüschel projiciert u. s. w.

Eine Regelfläche wird von einer Ebene im allgemeinen nach einer Linie zweiter Ordnung geschnitten; denn die Ebene schneidet die erzeugenden Ebenenbüschel nach zwei projectivischen Strahlenbüscheln u. s. w.

30. Pol und Polare einer Linie zweiter Ordnung. Tangenten und Berührungspunkte. In der Ebene einer Linie zweiter Ordnung

sei ein beliebiger Punkt U gegeben (Fig. 35a und 35b). Durch denselben seien zwei beliebige Strahlen p und q gezogen, welche die Curve

Fig. 35a.

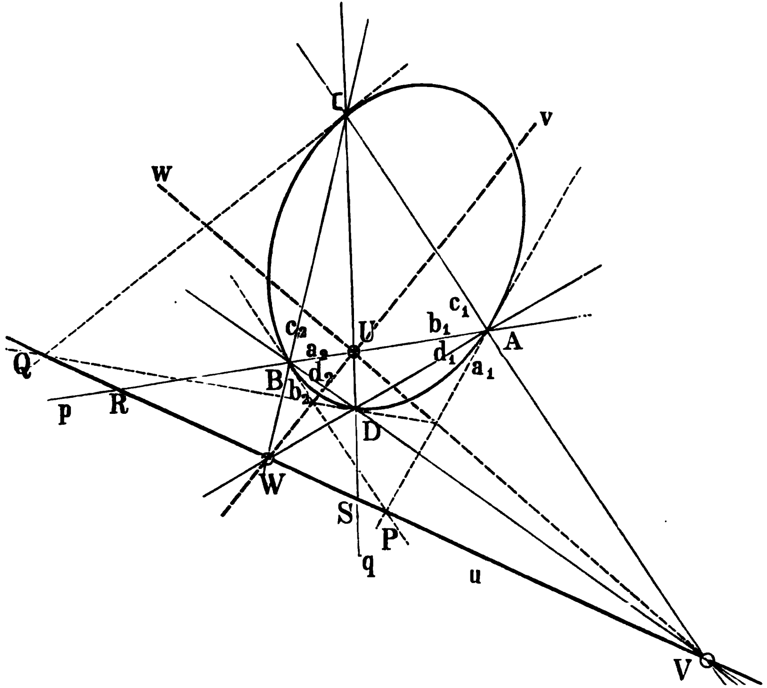


in den Punktepaaren A, B und C, D schneiden. Die vier Punkte A, B, C, D bestimmen ein vollständiges Viereck, von dem U ein Diagonalpunkt ist. Die beiden anderen Diagonalpunkte V und W haben die Diagonale u zur Verbindungslinie, welche im Diagonaldreieck dem Diagonalpunkte U gegenüber liegt. Der Punkt U und die Gerade u werden Pol und Polare in Bezug auf die Linie zweiter Ordnung genannt.

Von der Polare u werden die Strahlen p und q in den Punkten R und S geschnitten, welche zufolge der Eigenschaft des vollständigen Viereckes harmonisch conjugiert sind dem Pole U in Bezug auf die Punktepaare A, B und C, D. Zieht man ferner in A und B die Tangenten

der Curve, so liegt deren Schnittpunkt P auf der Polare u. Denkt man nämlich die Linie zweiter Ordnung durch zwei projectivische

Fig. 85 b.



Strahlenbüschel erzeugt, deren Mittelpunkte A und B sind, so entsprechen bekanntlich den Tangenten a_1 und b_2 dieser Punkte die in AB vereinigten Strahlen a_2 und b_1. Ferner entsprechen den Strahlen $c_1 = AC$ und $d_1 = AD$ des Büschels A die Strahlen $c_2 = BC$ und $d_2 = BD$ des Büschels B. Mithin besteht die Relation

$$(a_1\, b_1\, c_1\, d_1) = (a_2\, b_2\, c_2\, d_2),$$

und weil (siehe Art. 12)

$$(a_2\, b_2\, c_2\, d_2) = (b_2\, a_2\, d_2\, c_2),$$

ist auch

$$(a_1\, b_1\, c_1\, d_1) = (b_2\, a_2\, d_2\, c_2),$$

d. h. die Büschel A und B sind auch dann projectivisch, wenn den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 die Strahlen b_2, a_2, d_2, c_2 zugewiesen werden. Bei dieser Zuweisung haben sie überdies perspectivische Lage, weil die jetzt einander entsprechenden Strahlen b_1 und a_2 zusammenfallen. Die Schnitt-

punkte entsprechender Strahlen liegen also in einer Geraden, d. h. der Punkt $a_1 b_2 = P$ liegt auf der Verbindungslinie der Punkte $c_1 d_2 = V$ und $d_1 c_2 = W$, welche mit der Polare u identisch ist. Ebenso kann gezeigt werden, dass auch der Schnittpunkt Q der Tangenten in C und D auf u liegen muss.

Da die Polare einerseits durch die Punkte P und R, anderseits durch die Punkte Q und S geht, von welchen das erste Paar durch den Strahl p, das zweite durch den Strahl q vollkommen bestimmt ist, so kann sich ihre Lage nicht ändern, wenn einer dieser Strahlen festgehalten, der andere aber um den Pol U gedreht wird, sondern es können sich nur auf ihr die Punktepaare V, W sowie entweder Q, S oder P, R verschieben. Daraus folgt, dass auch aufeinander folgende Drehungen beider Strahlen p und q die Lage der Polare nicht zu ändern vermögen, oder dass man dieselbe Polare erhält, wie immer auch jene Strahlen angenommen worden seien. Die Polare ist also eine ganz bestimmte zum Pol gehörige Gerade. Jeder durch den Pol gelegte Strahl bestimmt auf der Polare einen Punkt, welcher zum Pol harmonisch conjugiert ist in Bezug auf die Schnittpunkte des Strahles mit der Curve und der Schnittpunkt der Tangenten in den letzteren liegt auf der Polare; auf dieser liegen auch zwei Diagonalpunkte eines jeden vollständigen Viereckes, dessen Eckpunkte Punkte der Curve sind und dessen dritter Diagonalpunkt der Pol ist. Geht eine Tangente der Curve durch den Pol, so geht die Polare durch deren Berührungspunkt; denn in diesem fallen die zwei Schnittpunkte der Tangente mit der Curve zusammen, zwischen welchen der Schnittpunkt der Tangente mit der Polare als vierter harmonischer Punkt liegen muss (Fig. 35 a). Daher gehen durch einen Punkt im allgemeinen zwei Tangenten einer Linie zweiter Ordnung und die Polare ist die zugehörige Berührungssecante. Wenn die Curve von der Polare nicht geschnitten wird (Fig. 35 b), spricht man der Vollständigkeit wegen von imaginären Schnittpunkten und von imaginären Tangenten. Ist der Pol ein Punkt der Curve, so fallen die aus ihm an dieselbe gezogenen Tangenten in der Tangente jenes Punktes zusammen und vereinigen sich daselbst mit der Polare. Für jeden Punkt der Curve ist also dessen Tangente die Polare.

Die Construction der Tangenten aus irgend einem Punkte an eine Linie zweiter Ordnung ist nach dem vorigen auf die Ermittlung der Polare zurückgeführt und diese lässt sich, wenn die Curve gezeichnet vorliegt, mit Hilfe eines Lineals allein bewerkstelligen.

Zu einer gegebenen Geraden u wird umgekehrt der Pol gefunden. wenn man die den zwei beliebigen Punkten P und Q derselben zugehörigen Berührungssecanten (Polaren) p und q zum Schnitt bringt.

In dem für die Construction der Polare eines Punktes verwendeten vollständigen Viereck A B C D waren der Diagonalpunkt U und die Diagonale u Pol und Polare. Aus demselben Grunde sind die Diagonalen U V = w und U W = v die Polaren der Diagonalpunkte W und V. Die Polare v des Punktes V geht durch den Punkt U und ihr Pol V liegt auf der Polare u dieses Punktes. Dreht sich v um den Punkt U, so muss sich V auf der Polare u dieses Punktes bewegen. Hiebei erzeugt v ein Strahlenbüschel im Mittelpunkte U, V eine Punktreihe auf dem Träger u und diese beiden Gebilde sind projectivisch. Wird nämlich bei dieser Drehung der Strahl p festgehalten, so bleiben die Punkte A und B fest, während sich der Schnittpunkt v u = W auf u bewegt und eine Punktreihe erzeugt, welche mit dem von v erzeugten Strahlenbüschel perspectivisch ist. Ferner dreht sich der Strahl B W um B und erzeugt ein mit der von W beschriebenen Punktreihe ebenfalls perspectivisches Strahlenbüschel. Mit diesem ist aber das hiebei vom Strahl A C in A erzeugte Strahlenbüschel projectivisch, weil sich je zwei entsprechende Strahlen A C und B C = B W in einem Punkte C der Curve schneiden. Nun liegt aber der Pol V auf dem Strahle A C, die von ihm beschriebene Punktreihe ist daher perspectivisch zum Büschel der Strahlen A C, also projectivisch zu jenem, welches die Polare v um U beschreibt. Daraus folgt der Satz:

»Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polare dieses Punktes. Das von der Geraden beschriebene Strahlenbüschel und die von ihrem Pole beschriebene Punktreihe sind projectivisch.«

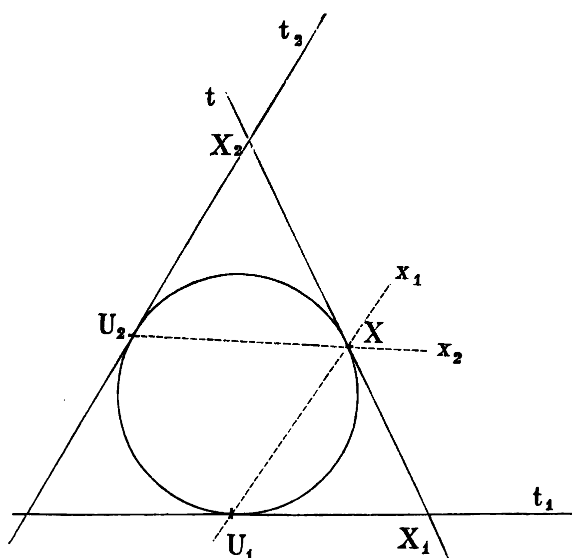
Ist insbesondere der Drehungspunkt ein Punkt der Curve, so beschreibt der Pol der Geraden eine Punktreihe auf der Tangente dieses Punktes, weil diese nun seine Polare ist.

Die den vorstehenden reciproken Betrachtungen führen auf Polare und Pol der Linie zweiter Classe.

31. Identität der Linien zweiter Ordnung und zweiter Classe. Eine Linie zweiter Ordnung sei (Fig. 36) durch zwei projectivische Strahlenbüschel U_1 und U_2 erzeugt worden. Die Tangenten t_1 und t_2 in den Punkten U_1 und U_2 mögen von der Tangente t des beliebigen Punktes X der Curve in den Punkten X_1 und X_2 getroffen werden, deren Polaren also die einander entsprechenden Strahlen $U_1 X = x_1$ und $U_2 X = x_2$ der erzeugenden Büschel sind. Bewegt sich

nun der Punkt X mit der Tangente t auf der Curve, so beschreiben die Punkte X_1 und X_2 auf den Tangenten t_1 und t_2 Punktreihen, welche zu den von den Strahlen x_1 und x_2 in U_1 und U_2 beschriebenen Strahlenbüscheln, also — zufolge Voraussetzung — auch zu einander

Fig. 36.



projectivisch sind (Art. 30 und 25). Die Curve kann demnach (Art. 26) als das Erzeugnis von zwei projectivischen Punktreihen t_1 und t_2 angesehen werden, ist somit auch eine Linie zweiter Classe.

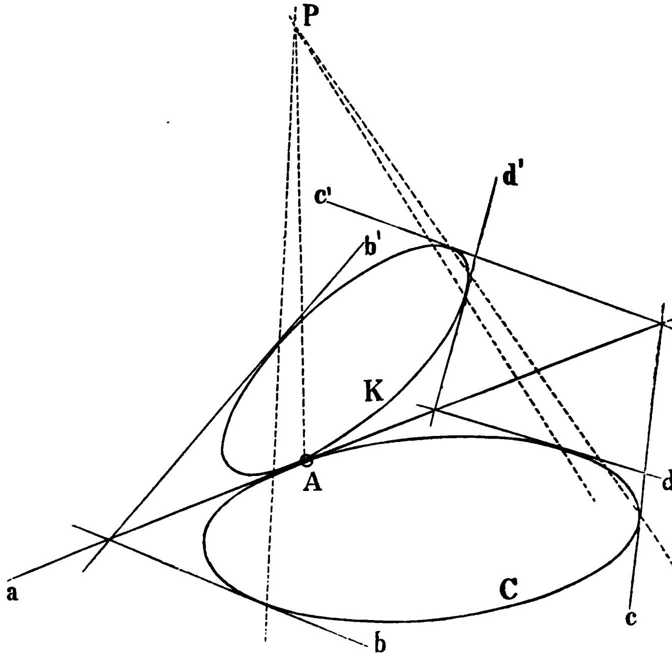
Durch die reciproke Betrachtung zeigt man, dass eine Linie zweiter Classe auch eine Linie zweiter Ordnung ist.

Dementsprechend pflegt man eine Linie zweiter Ordnung oder zweiter Classe auch eine Linie zweiten Grades zu nennen.

32. Identität der Linien zweiten Grades mit den Kegelschnitten. Ein Kreis kann bekanntlich als das Erzeugnis von zwei projectivisch gleichen Strahlenbüscheln angesehen werden. Aus einem beliebigen Punkte wird der Kreis durch einen Kreiskegel, die projectivisch gleichen Strahlenbüschel werden durch projectivische Ebenenbüschel projiciert. Durch eine beliebige Ebene, welche nicht das Projectionscentrum enthält, wird der Kreiskegel nach einem Kegelschnitt (Ellipse, Hyperbel oder Parabel), die Ebenenbüschel werden nach projectivischen Strahlenbüscheln geschnitten, als deren Erzeugnis sich der Kegelschnitt darstellt. Dieser ist daher eine Curve zweiten Grades. Umgekehrt lässt

sich zeigen, dass jede Curve zweiten Grades als Schnitt eines Kreiskegels angesehen werden kann. Zu diesem Zwecke sei (Fig. 37) durch

Fig. 37.

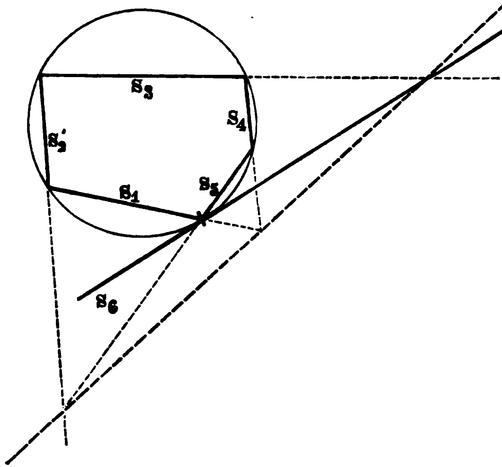


die Tangente a der Curve C eine beliebige Ebene und in dieser ein Kreis K von beliebigem Radius derart angenommen, dass die Tangente a ihn und die Curve in demselben Punkte A berühre; die Tangenten b, c, d der Curve mögen sich mit den Tangenten b′, c′, d′ des Kreises auf a schneiden. Die drei Ebenen b b′, c c′, d d′ bestimmen einen Punkt P, aus welchem der Kreis auf die Ebene der Curve durch einen Kreiskegel als Kegelschnitt (Curve zweiten Grades) projiciert wird. Dieser hat mit der Curve C die vier Tangenten a, b, c, d und den Berührungspunkt A auf a gemein, ist folglich (Art. 25 c) mit ihr identisch. Daher ist die gegebene und somit jede Curve zweiten Grades ein Kegelschnitt, nämlich eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel.

33. Tangenten in gegebenen Punkten und Berührungspunkte auf gegebenen Tangenten. Nach dem Satz von Pascal liegen bei einem dem Kegelschnitte eingeschriebenen einfachen Sechseck die Schnittpunkte der drei Paare einander gegenüber liegender Seiten s_1, s_4; s_2, s_5; s_3, s_6 in einer Geraden. Lässt man die auf einer Seite — etwa s_6

— befindlichen Eckpunkte immer näher aneinander rücken, bis sie sich vereinigen, so bleibt der Satz fortwährend giltig; da aber (Fig. 38) aus

Fig. 38.

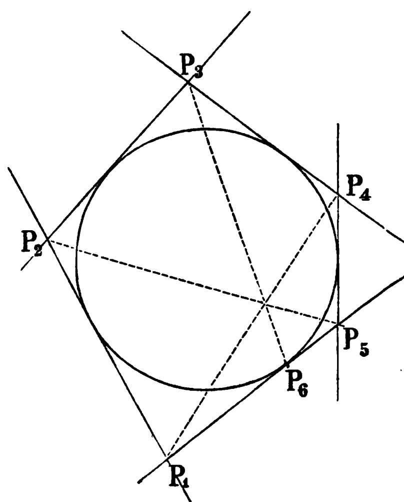


dem Sechseck schließlich ein Fünfeck und aus der Seite s_6 die Tangente im Eckpunkte $s_1 s_5$ geworden ist, spricht er nun aus, dass bei dem eingeschriebenen Fünfecke die Verbindungslinie der Schnittpunkte von zwei Paaren nicht aufeinander folgender Seiten durch den Schnittpunkt der übrig bleibenden Seite mit der Tangente in dem ihr gegenüberliegenden Eckpunkte geht. Damit ist die Aufgabe gelöst, die Tangenten eines durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnittes in diesen zu construieren (Fig. 39).

Nach dem Satz von Brianchon gehen bei einem dem Kegelschnitte umschriebenen Sechsseit die Verbindungslinien der drei Paare einander gegenüberliegender Eckpunkte P_1, P_4; P_2, P_5; P_3, P_6 durch einen Punkt. Lässt man die in einem Eckpunkte — etwa P_6 — zusammenstoßenden Seiten immer näher aneinander rücken, bis sie sich vereinigen, so bleibt der Satz fortwährend giltig; da aber (Fig. 40) aus dem Sechsseit schließlich ein Fünfseit und aus dem Eckpunkte P_6 der Berührungspunkt auf der Tangente $P_1 P_5$ geworden ist, spricht er nun aus, dass bei dem umschriebenen Fünfseite der Schnittpunkt der Verbindungslinien von zwei Paaren nicht aufeinander folgender Eckpunkte auf der Verbindungslinie des übrig bleibenden Eckpunktes mit dem Berührungspunkte der ihm gegenüberliegenden Seite liegt. Damit ist die Aufgabe

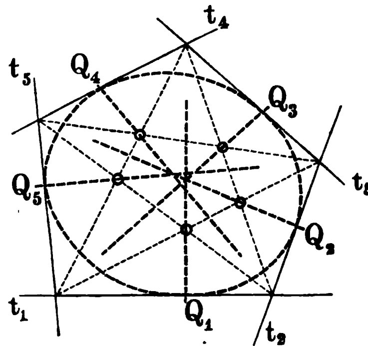
Fig. 39.

Fig. 40.



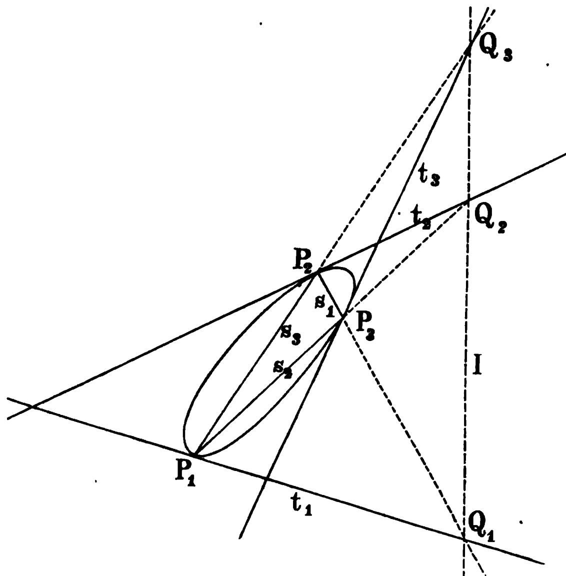
gelöst, die Berührungspunkte eines durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnittes auf diesen zu bestimmen (Fig. 41).

Fig. 41.



Die Seiten s_1, s_2, s_3 des einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreieckes $P_1\,P_2\,P_3$ und die Tangenten t_1, t_2, t_3 in den Eckpunkten desselben (Fig. 42), können als die Seiten eines eingeschriebenen einfachen

Fig. 42.

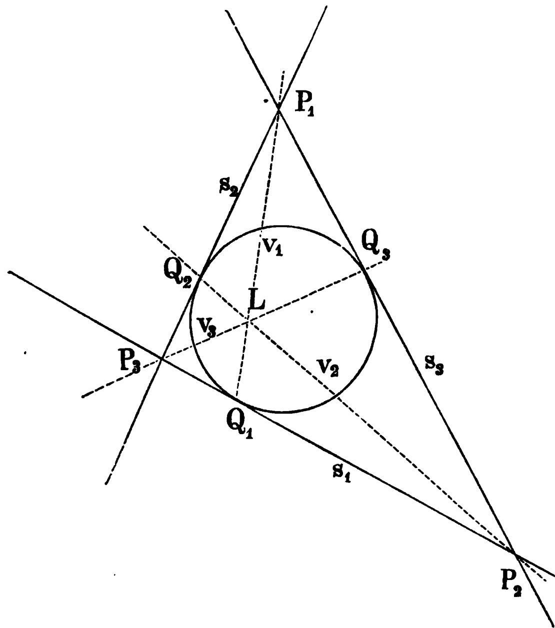


Sechseckes angesehen werden, von dem in P_1, P_2, P_3 je ein Paar Eckpunkte vereinigt sind; in diesem Sinne haben sie die Reihenfolge $s_1, t_3, s_2, t_1, s_3, t_2$, so dass nach Pascals Satz die Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q_3

von s_1 und t_1; s_2 und t_2; s_3 und t_3 in einer Geraden l liegen. Damit wird die Aufgabe gelöst: Wenn ein Kegelschnitt durch drei Punkte und die Tangenten in zwei derselben gegeben ist, die Tangente im dritten Punkte zu ermitteln. Wären z. B. P_1, P_2, P_3, t_1, t_2 bekannt, so zieht man $P_2 P_3$ bis Q_1 auf t_1; $P_1 P_3$ bis Q_2 auf t_2; dann $Q_1 Q_2$ bis Q_3 auf $P_1 P_2$ und erhält in $Q_3 P_3$ die gesuchte Tangente.

Die Eckpunkte P_1, P_2, P_3 des einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiseites $s_1 s_2 s_3$ und die Berührungspunkte Q_1, Q_2, Q_3 auf den Seiten desselben (Fig. 43) können als die Eckpunkte eines umschriebenen

Fig. 43.



einfachen Sechsseites angesehen werden, von dem in s_1, s_2, s_3 je ein Paar Seiten vereinigt sind; in diesem Sinne haben sie die Reihenfolge $P_1, Q_3, P_2, Q_1, P_3, Q_2$, so dass nach Brianchons Satz die Verbindungslinien v_1, v_2, v_3 von P_1 und Q_1; P_2 und Q_2; P_3 und Q_3 durch einen Punkt L gehen. Damit wird die Aufgabe gelöst: Wenn ein Kegelschnitt durch drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zwei derselben gegeben ist, den Berührungspunkt auf der dritten Tangente zu ermitteln. Wären z. B. s_1, s_2, s_3, Q_1, Q_2 bekannt, so zieht man $Q_1 P_1$ und $Q_2 P_2$, verbindet den Schnittpunkt L mit P_3 und erhält dadurch auf s_3 den gesuchten Berührungspunkt Q_3.

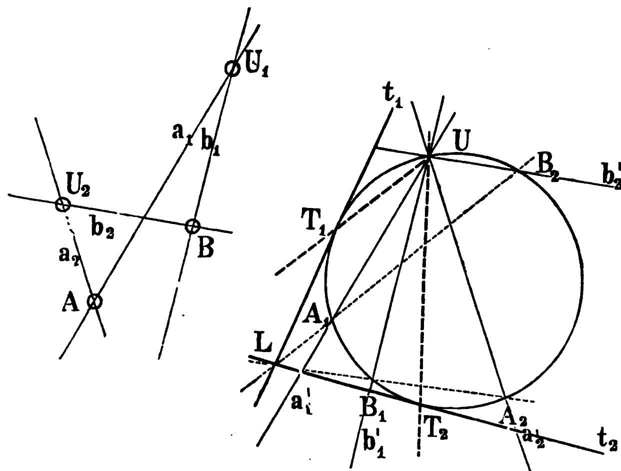
34. Classification der Erzeugnisse projectivischer Strahlenbüschel oder Punktreihen. Bekanntlich ist die Gattung eines Kegelschnittes durch seine unendlich fernen Punkte charakterisiert: Die Hyperbel hat zwei reale getrennte, die Parabel zwei reale vereinigte, die Ellipse zwei imaginäre unendlich ferne Punkte.

Ist der Kegelschnitt das Erzeugnis von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, nämlich der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen, so wird jeder unendlich ferne Punkt desselben durch ein Paar paralleler, entsprechender Strahlen der Büschel angezeigt. Verschiebt man die erzeugenden Büschel parallel zu sich selbst, bis ihre Mittelpunkte zur Deckung gelangen, so kommen die parallelen Strahlen aufeinander zu liegen und bilden nun die Doppelstrahlen der auf diese Art erhaltenen concentrischen Büschel. Daher lässt sich die Gattung des Kegelschnittes durch Construction dieser Doppelstrahlen erkennen. Zwei reale getrennte Doppelstrahlen geben die Asymptotenrichtungen einer Hyperbel, zwei reale vereinigte die Durchmesserrichtung der Parabel, zwei imaginäre zeigen eine Ellipse an.

Wenn der Kegelschnitt durch fünf Punkte gegeben ist, nimmt man zwei davon als Mittelpunkte der erzeugenden Strahlenbüschel an, verbindet sie mit den drei übrigen u. s. w.

Diese Betrachtungen finden eine nützliche Anwendung bei der Aufgabe, durch vier gegebene Punkte U_1, U_2, A, B (Fig. 44) eine Parabel

Fig. 44.



zu legen. Wählt man U_1 und U_2 als Mittelpunkte der projectivischen Büschel und zieht durch einen beliebigen Punkt U Parallele zu den

Strahlen a_1, b_1, a_2, b_2, so hat man von den erhaltenen concentrischen Büscheln zwar nur je zwei Strahlen, aber es tritt die Bedingung hinzu, dass die bei der Construction der Doppelstrahlen auftretende Gerade u (Fig. 24) den Hilfskreis berühren muss. Aus dem Schnittpunkte L der Geraden $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ sind im allgemeinen zwei Tangenten möglich, die real getrennt, vereinigt oder imaginär sein können. Daher hat die Aufgabe zwei verschiedene, zwei identische Lösungen oder sie ist unmöglich. Die Tangenten t_1 und t_2 berühren den Kreis in den Punkten T_1 und T_2, deren Verbindungslinien mit U die Durchmesserrichtungen der gesuchten Parabeln angeben und je einen fünften (unendlich fernen) Punkt ersetzen. Indem man zu einer von ihnen durch U_1 und U_2 Parallele zieht, erhält man ein drittes Paar entsprechender Strahlen der erzeugenden Büschel u. s. w. Daraus geht noch hervor, dass vier Punkte des endlichen Bereiches und ein unendlich ferner (durch eine Richtung gegebener) Punkt im allgemeinen eine Hyperbel bestimmen, weil durch die ersten vier Punkte zwei Parabeln gegeben sind, deren unendlich ferne Punkte mit dem beliebig angenommenen nicht identisch zu sein brauchen.

Wenn ein Kegelschnitt das Erzeugnis von zwei projectivischen Punktreihen ist, wenn er nämlich von allen Verbindungslinien entsprechender Punkte berührt wird, dann lässt sich der Fall der Parabel direct erkennen; diese kann nur von ähnlichen Punktreihen erzeugt werden, weil sie von der unendlich fernen Geraden berührt wird, so dass sich die unendlich fernen Punkte beider Punktreihen entsprechen müssen. Sind letztere nicht ähnlich, so liegt eine Hyperbel oder Ellipse vor, je nachdem die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier paralleler Tangenten von irgend einer dritten Tangente zwischen diesen geschnitten wird oder nicht.

DRITTER THEIL.

Analytische Geometrie.

Einleitung.

Die analytische Geometrie lehrt geometrische Aufgaben in algebraische Form einkleiden, indem sie gegebene Figuren durch Gleichungen ersetzt, aus diesen neue Gleichungen, welchen andere Figuren entsprechen, ableitet, den Zusammenhang zwischen gegebenen und abgeleiteten Figuren sucht und auf diese Art zur Entdeckung geometrischer Sätze durch Rechnung führt. Hiezu bedient sie sich des Mittels, die Raumelemente durch Zahlen zu charakterisieren, welche deren Lage in Bezug auf feste Raumelemente bestimmen und Coordinaten genannt werden. Die festen Raumelemente bilden das Coordinatensystem.

Die Untersuchungen können sich auf Gebilde einer Ebene beschränken oder Gebilde umfassen, die nicht einer einzigen Ebene angehören. Dementsprechend unterscheidet man eine analytische Geometrie der Ebene und eine analytische Geometrie des Raumes.

I. Abtheilung.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Abschnitt.

Grundbegriffe und vorbereitende Aufgaben.

1. Punkte einer Geraden. Zwei Punkte A und B einer Geraden bestimmen die Strecken AB und BA, welche von gleicher Länge, aber einander direct entgegengesetzt gerichtet sind, daher als entgegengesetzt gleich angesehen werden müssen, so dass $AB = -BA$. Welche Strecke als positiv und welche als negativ zu rechnen ist, wird durch die positive Richtung der Geraden entschieden, die entweder gegeben

sein oder willkürlich angenommen und durch eine der Geraden angesetzte Pfeilspitze angedeutet werden kann.

Für irgend drei Punkte A, B, C einer Geraden besteht immer die Beziehung

$$AB + BC = AC,$$

welche für die Anordnung A, B, C evident ist, für die Anordnung A, C, B aus $AC + CB = AB$, für die Anordnung C, A, B aus $CA + AB = CB$ folgt, wenn man $CB = -BC$ und $CA = -AC$ setzt.

Wählt man einen gegebenen oder willkürlich angenommenen Punkt der Geraden als Nullpunkt, von welchem nämlich die Abstände anderer Punkte gezählt werden, und ist die positive Richtung der Geraden festgesetzt, so hat man das Mittel gewonnen, die Lage eines jeden Punktes der Geraden zu bestimmen, indem man seinen mit dem entsprechenden Vorzeichen versehenen Abstand vom Nullpunkte — die Abscisse — angibt. Zwischen zwei Punkten mit entgegengesetzt gleichen Abscissen liegt der Nullpunkt in der Mitte.

Sind x_1 und x_2 die Abscissen der auf den Nullpunkt O bezogenen Punkte P_1 und P_2 (Fig. 45), so findet man, da

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2,$$
$$P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1,$$

Fig. 45.



d. h. die Distanz des Punktes P_2 von dem Punkte P_1 ist gleich der Differenz der Abscissen des zweiten und des ersten Punktes. Daher ist

$$P_2P_1 = OP_1 - OP_2 = x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1) = -P_1P_2.$$

Ist x die Abscisse des Punktes P, welcher in Bezug auf die Punkte P_1 und P_2 das Theilverhältnis

$$\frac{P_1P}{P_2P} = \lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

hat, so ist

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}.$$

Der Mittelpunkt P_m der Strecke P_1P_2 hat das Theilverhältnis $\lambda = -1$, daher ist

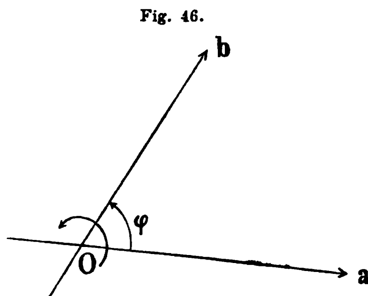
$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Sind $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ Punkte der Geraden mit den Abscissen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, so ist

$$P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \ldots + P_{n-1}P_n = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \ldots$$
$$\ldots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_1 = P_1P_n.$$

2. Geraden eines Punktes. Für die Beurtheilung der gegenseitigen Lage von zwei sich schneidenden Geraden soll einer von den zwei Winkeln in Betracht kommen, welche die positiven Richtungen a und b bestimmen (Fig. 46). Eine aus der Lage a in die Lage b um den Scheitel O gedrehte Richtung kann entweder den einen oder den anderen Winkel durchlaufen. Die von ihr hiezu vollführten Drehungen sind einander entgegengesetzt und erscheinen einem in O stehenden Beobachter als Drehungen linksum oder rechtsum. Die Winkel selbst müssen daher als entgegengesetzt bezeichnete Größen in Rechnung gezogen werden; welcher positiv und welcher negativ zu nehmen ist, wird durch Feststellung des positiven Drehungssinnes entschieden, der gegeben sein oder willkürlich angenommen (und etwa durch einen gekrümmten Pfeil angedeutet) werden kann.

Fig. 46.



Wenn es sich bloß um zwei Geraden handelt, soll unter dem Ausdruck ab der im Bogenmaße gemessene hohle Winkel ihrer positiven Richtungen verstanden sein, dessen Vorzeichen von dem in Geltung stehenden positiven Drehungssinne abhängt, so dass die Winkel ab und ba als entgegengesetzt gleiche Größen angesehen werden müssen, zwischen welchen die Beziehung $ab + ba = O$ besteht. Werden aber mehrere Winkel zusammengesetzt oder beliebig große Drehungen bestimmt, dann können Winkel in Frage kommen, welche eine halbe Umdrehung ($\pm \pi$) überschreiten. Hat man in einem solchen Falle mit dem Auftragen der Winkel oder dem Zählen der Drehung bei dem Schenkel a begonnen und bei dem Schenkel b aufgehört, so stellt ab die algebraische Summe der Größen aller Drehungen vor, die eine um den Scheitel gedrehte Richtung hiebei vollführt hat, um aus der Lage a in die Lage b zu gelangen, was auf unendlich viele Arten durch Überschreitung beliebiger Zahlen voller Umläufe möglich ist. Bezeichnet man daher mit φ den hohlen Winkel der Richtungen a und b, mit n eine ganze positive Zahl, so ist unter dieser Voraussetzung

$$ab = \varphi + n.2\pi$$

eine im allgemeinen unbestimmte, erst durch nähere Angaben zu präcisierende Größe. Da es für die trigonometrischen Functionen von a b gleichgiltig ist, wie viele volle Umdrehungen eine um den Scheitel gedrehte Richtung vollführt hat, während sie sich aus der Anfangslage a in die Endlage b bewegte, und in welchem Drehungssinne dies geschah, so sind sie von n unabhängig; es ist

$$f(\varphi \pm n.2\pi) = f(\varphi),$$

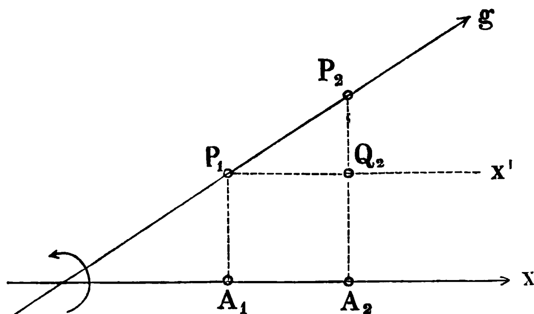
wenn unter f (z) irgend eine trigonometrische Function des Winkels (Bogens) z gemeint wird. Daher lassen sich zwischen den trigonometrischen Functionen von Winkeln — ähnlich wie für Strecken — Relationen aufstellen, welche von der Zählung unabhängig sind und als Fundamentalformeln angeführt werden:

$$\sin ab + \sin ba = o,$$
$$\sin ba = -\sin ab,$$
$$\cos ba = \cos ab,$$
$$\sin (ab + bc) = \sin ac,$$
$$\sin (cb - ca) = \sin ab,$$
$$\sin (g_1 g_2 + g_2 g_3 + \ldots + g_{n-1} g_n) = \sin g_1 g_n.$$

u. s. w.

3. Orthogonale Projectionen von Strecken und Streckenzügen. Eine Strecke $P_1 P_2$ der Geraden g wird auf die Gerade (Projectionsaxe) x durch die darauf Senkrechten aus den Punkten P_1 und P_2 projiciert. Die Fußpunkte A_1 und A_2 bestimmen die orthogonale Projection $A_1 A_2$. Länge und Vorzeichen der Projection hängen von der Länge der Strecke und von dem Winkel ab, welchen die positiven Richtungen der Geraden x und g bestimmen. Es sei der positive Drehungssinn linksum angenommen (Fig. 47) der Winkel x g kleiner als ein Rechter und die Strecke $P_1 P_2$ positiv. Zieht man durch P_1 die zu x gleichsinnig parallele x', von welcher $P_2 A_2$ in Q_2 geschnitten wird, so ist

Fig. 47.



$$A_1 A_2 = P_1 Q_2 = P_1 P_2 \,.\, \cos x'g,$$

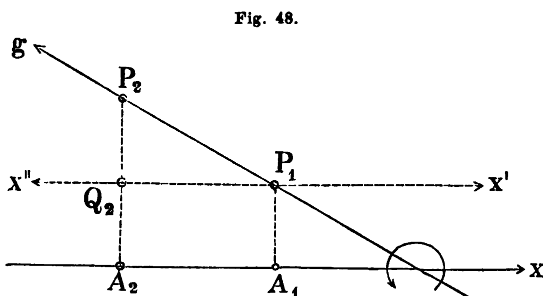
also

$$A_1 A_2 = P_1 P_2 \cos\, xg.$$

Da in diesem Falle cos xg positiv sein muss, hat auch die Projection einen positiven Wert, was durch den Anblick der Figur bestätigt wird.

Nun sei der Winkel xg größer als ein Rechter (Fig. 48) und die Strecke $P_1 P_2$ noch immer positiv. Dann schneidet die Parallele x' das Loth $P_2 A_2$ in ihrer Rückverlängerung x''. Die Projection hat daher einen negativen Wert:

Fig. 48.



$$A_1 A_2 = P_1 Q_2 =$$
$$= - P_1 P_2 \cos x''g,$$

und weil $\cos x''g = \cos gx'' = - \cos x'g$, so ist wieder

$$A_1 A_2 = P_1 P_2 \cos\, xg.$$

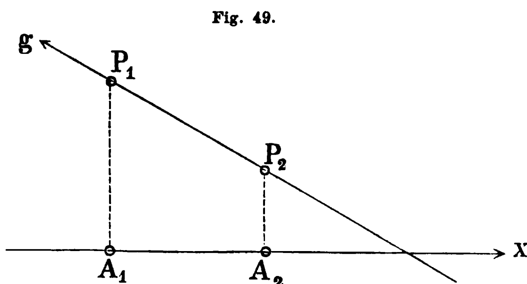
Hier hat cos xg einen negativen Wert, so dass sich auch die Projection negativ ergibt.

Man sieht ferner leicht ein, dass für $xg > \pi$ und $xg > \frac{3\pi}{2}$ immer

$$A_1 A_2 = P_1 P_2 \cos xg.$$

Schließlich sei (Fig. 49) die Strecke $P_1 P_2$ negativ. Dann ist $P_2 P_1$ positiv,

Fig. 49.



$$A_2 A_1 = P_2 P_1 \cos\, xg$$

und

$$- A_1 A_2 = - P_1 P_2 \cos\, xg;$$

demnach wieder

$$A_1 A_2 = P_1 P_2 \cos\, xg.$$

Es kann also in voller Allgemeinheit der Satz ausgesprochen werden:

Die Projection einer Strecke der Geraden g auf die beliebige Projectionsaxe x ist gleich dem Producte aus der Strecke mit dem Cosinus des Winkels der positiven Richtungen beider Geraden.

Eine Aufeinanderfolge von Strecken P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, ... $P_{n-1}P_n$, welche aneinander anschließen, aber nicht alle in derselben Geraden liegen, soll ein Streckenzug genannt werden. Unter der Projection eines Streckenzuges auf eine Gerade versteht man die algebraische Summe der Projectionen der Strecken, welche ihn zusammensetzen. Da $A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = A_0A_n$ und A_0A_n die Projection der Schlusslinie P_0P_n des Streckenzuges ist. ergeben sich folgende Sätze:

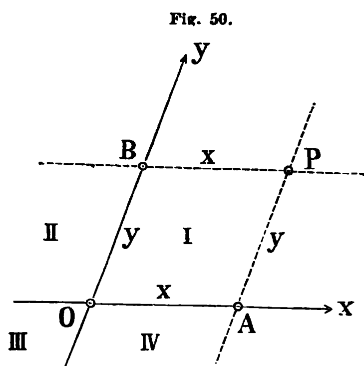
Die Projection eines Streckenzuges auf eine Gerade ist gleich der Projection seiner Schlusslinie auf dieselbe Gerade.

Streckenzüge mit derselben Schlusslinie haben gleiche Projectionen auf eine beliebige Projectionsaxe.

4. Coordinatensysteme. Die Lage eines Punktes der Ebene wird durch seine Coordinaten bestimmt. Denkbar sind unendlich viele Systeme von Coordinaten, wirklich angewendet werden nur wenige.

a) System der Parallel-Coordinaten. Es besteht (Fig. 50) aus zwei Geraden x und y, Coordinatenaxen genannt, welche sich in dem Nullpunkte O (Ursprung, Anfangspunkt) schneiden. Die positiven Richtungen der Coordinatenaxen können willkürlich angenommen oder gegeben sein. Positiv ist jener Drehungssinn. dem zufolge der hohle Winkel x y positiv erscheint. Das System ist ein rechtwinkeliges oder orthogonales, wenn die Axen zueinander senkrecht sind, in allen anderen Fällen ein schiefwinkeliges. Ein beliebiger Punkt P der Ebene wird durch Parallele zu den Coordinatenaxen nach den Punkten A auf x und B auf y projiciert. Die Abscissen OA = x und OB = y der Punkte A und B heißen die Coordinaten des Punktes P, welchen sie vollkommen bestimmen; denn durch die Coordinaten werden zunächst die Projectionen A und B bestimmt und die durch letztere gelegten Parallelen zu den Axen

Fig. 50.



(Projectionsstrahlen) schneiden sich in P. Da AP = OB und BP = OA, so kann P auch durch einen der Streckenzüge OAP oder OBP in übersichtlicher Weise dargestellt werden. Den vier Feldern, in welche die Ebene durch die Coordinatenaxen getheilt wird, entsprechen verschiedene Vorzeichencombinationen der Coordinatenwerte:

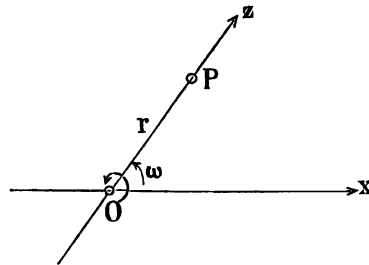
	x	y
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Für Punkte der x-Axe oder y-Axe ist y = o oder x = o, für den Nullpunkt ist x = o und y = o.

Die Projectionsstrahlen aller Punkte der Ebene bilden zwei Scharen paralleler Geraden, deren Richtungen durch die Coordinatenaxen angegeben werden. Durch einen Punkt geht von jeder Schar eine Gerade.

b) System der Polar-Coordinaten. Es besteht (Fig. 51) aus einer Geraden x, welche die Axe, und aus einem darauf liegen Punkte O, welcher der Pol genannt wird. Die positive Richtung der Axe und der positive Drehungssinn sind gegeben oder werden willkürlich angenommen. Ein beliebiger Punkt der Ebene wird mit dem Pole durch die Gerade z verbunden und in dieser die positive Richtung — wenn sie nicht im vorhinein gegeben — derart festgestellt, dass die Strecke OP (Vector, Radius vector) positiv erscheint. Der Winkel (die Anomalie) $xz = \omega$ und der Vector OP = r heißen die Polar-Coordinaten des Punktes P, welchen sie vollkommen bestimmen; denn durch ω ist die Gerade z und auf ihr durch r der Punkt P festgelegt.

Fig. 51.

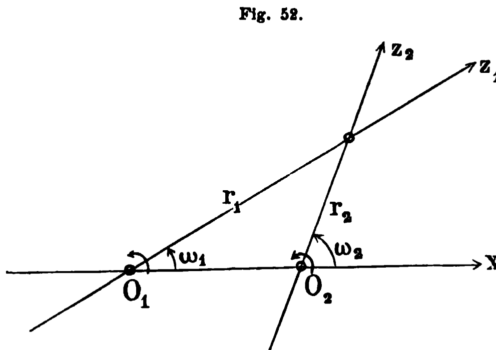


Ein beliebiger Punkt erscheint auch als einer der Schnittpunkte der Geraden z mit einem aus O beschriebenen Kreise vom Radius r, wobei die Wahl unter ihnen durch das Vorzeichen des r entschieden wird. Allen Punkten der Ebene entspricht eine Schar von Geraden durch den Pol und eine Schar concentrischer Kreise um den Pol als Mittelpunkt. Davon gehen durch jeden Punkt eine Gerade und ein Kreis.

Besonders zu bemerken ist, dass der (im Bogenmaße gemessene) Winkel ω einen oder mehrere volle Umläufe erreichen und überschreiten kann.

c) **System der Bipolar-Coordinaten.** Es besteht (Fig. 52) aus zwei Polen O_1 und O_2 deren Verbindungslinie x die Axe und deren Distanz $O_1 O_2 = 2e$ die Basis des Systems genannt werden möge. Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Ebene mit den Polen durch die Geraden z_1 und z_2, so können entweder die Anomalien $x z_1 = \omega_1$ und $x z_2 = \omega_2$ oder die Vectoren $O_1 P = r_1$ und $O_2 P = r_2$ als seine Coordinaten angesehen werden. Nimmt man im ersten Falle den positiven Drehungssinn, ferner die positiven Richtungen der Axe, so wie der Geraden z_1 und z_2 an, z. B. derart, dass $O_1 O_2$, $O_1 P$ und $O_2 P$ positiv erscheinen, so ist der Punkt P durch die Anomalien ω_1 und ω_2 unzweideutig festgelegt und als Schnittpunkt der Geraden z_1 und z_2 dargestellt.

Fig. 52.



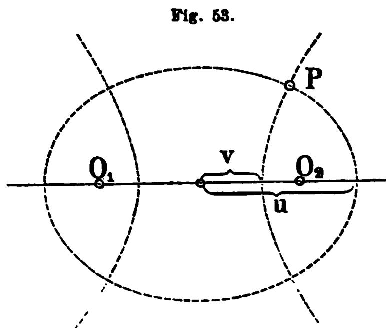
Im zweiten Falle wird durch die Vectoren r_1 und r_2 außer dem Punkte P noch ein zweiter, zu ihm in Bezug auf die Axe symmetrisch liegender Punkt bestimmt, beide als die Schnittpunkte der Kreise, welche um die Pole O_1 und O_2 mit den Radien r_1 und r_2 beschrieben werden. Man kann diese Punkte von einander nach den Feldern unterscheiden, in welche die Ebene durch die Axe getheilt wird, indem man z. B. die Vectoren der Punkte des einen Feldes beide positiv, jener des anderen beide negativ rechnet. Für reale Punkte ist immer $r_1 + r_2 \geqq 2e$ oder $r_1 + r_2 < -2e$.

Sämmtlichen Punkten der Ebene entsprechen zwei Scharen von Geraden, welche durch den einen oder den anderen Pol gehen, oder zwei Scharen concentrischer Kreise, deren Mittelpunkte die Pole sind. Durch jeden Punkt geht von jeder Schar eine Gerade oder ein Kreis.

Dieses System steht an Brauchbarkeit den beiden ersten weit nach und wird nur in vereinzelten Fällen angewendet.

Anmerkung. Bei den bisher betrachteten Coordinatensystemen wird der zu bestimmende Punkt als Schnittpunkt von zwei Geraden, von einer Geraden mit einem Kreise oder von zwei Kreisen dargestellt und der Gesammtheit der Punkte einer Ebene entsprechen zwei Scharen von Linien derart, dass durch einen beliebigen Punkt von jeder Schar eine Linie geht. Dadurch erscheinen die Coordinatensysteme unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt gebracht, welcher zu der Erweiterung des Coordinatenbegriffes Anlass gibt, indem an Stelle der Geraden oder Kreise irgend welche Curven gedacht werden. Fasst man z. B. die Pole O_1 und O_2 in dem System der Bipolar-Coordinaten als Brennpunkte einer Ellipse und einer Hyperbel auf (Fig. 53), von welchen etwa die Brennpunktsaxen 2u und 2v gegeben sein mögen, so sind hie-

Fig. 53.

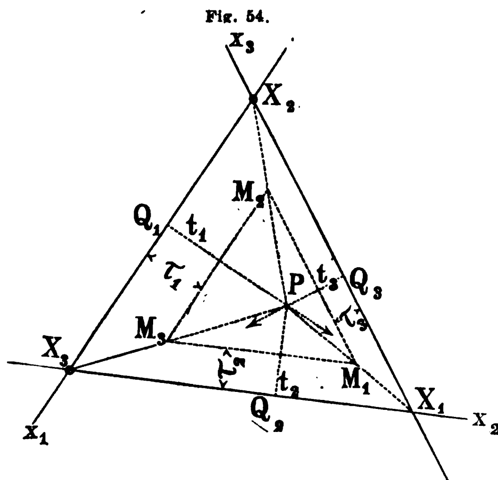


durch diese Curven vollkommen bestimmt. Sie schneiden sich in vier Punkten, von welchen man einen — er sei P genannt — durch besondere Annahmen auszeichnen und in Betracht ziehen kann. Dieser Punkt erscheint dann festgelegt durch die Bestimmungsstücke u und v, die man also seine Coordinaten nennen darf. In der That findet man mit Rücksicht auf die Annahmen bezüglich des Vorzeichens der Vectoren (Pkt. *c*) und auf die Eigenschaften von Ellipse und Hyperbel $r_1 + r_2 = \pm 2u$; $r_1 - r_2 = \pm 2v$, daher $r_1 = \pm (u + v)$; $r_2 = \pm (u - v)$, und kann den Punkt nun auch mittelst der Vectoren construieren.

Ein solches Coordinatensystem findet, jedoch mit anderen Bestimmungsstücken für Ellipse und Hyperbel, bei gewissen Aufgaben, deren Natur es angepasst ist, vortheilhafte Anwendung (elliptische Coordinaten). Ebenso können zwei Größen u und v als die Coordinaten eines Punktes angesehen werden, wenn sie irgend zwei durch den Punkt gehende Curven vollkommen bestimmen.

d) System der Dreiecks-Coordinaten. Es besteht aus einem durch die Geraden x_1, x_2, x_3 (Fig. 54) — die Fundamentallinien — gebildeten Coordinaten-Dreieck, dessen Eckpunkte X_1, X_2, X_3 Fundamentalpunkte heißen. Fällt man aus einem Punkte P die Senkrechten auf die Fundamentallinien und nimmt in jeder die positive Richtung an; bezeichnet man ferner mit Q_1, Q_2, Q_3 die Schnittpunkte der Senkrechten mit den entsprechenden Fundamentallinien, so sind die Abstände des Punktes P von den letzteren $Q_1 P = t_1$; $Q_2 P = t_2$; $Q_3 P = t_3$ der Größe und dem Vorzeichen nach vollkommen bestimmt. Hingegen ist umgekehrt der Punkt schon durch zwei seiner Abstände, z. B. t_1, t_2 als Schnittpunkt der in diesen Abständen Parallelen zu den Fundamentallinien x_1, x_2 festgelegt und damit auch t_3 vollkommen bestimmt; man darf also die drei Abstände nicht willkürlich annehmen. Wohl aber ist es gestattet, ihnen die Bedingung aufzuerlegen, dass sie drei gegebenen Zahlen τ_1, τ_2, τ_3 proportional sein sollen, dass also $t_1 : t_2 : t_3 = \tau_1 : \tau_2 : \tau_3$.

Fig. 54.



Verbindet man nämlich den Punkt M_1, welcher von den Fundamentalinien x_2 und x_3 die Abstände τ_2 und τ_3 hat, mit dem Fundamentalpunkte X_1, so muss die Verbindungslinie $X_1 M_1$ durch P gehen, weil $\tau_2 : \tau_3 = t_2 : t_3$. Auf dieselbe Art findet man die Geraden $X_2 M_2$ und $X_3 M_3$, welche ebenfalls durch P gehen, sobald die Punkte M_2 und M_3 die Abstände τ_1 und τ_3 von x_1 und x_3; τ_1 und τ_2 von x_1 und x_2 haben.

Also ist durch das Verhältnis $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3$ der Punkt P als gemeinsamer Punkt von drei Geraden, welche ihn aus den Fundamentalpunkten projicieren, festgelegt und die Verhältniszahlen τ_1, τ_2, τ_3 könnten als seine Coordinaten gelten. Um den Punkt P zu erhalten, hat man das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ zu construieren, dessen Seiten die Parallelen zu den Fundamentallinien in den Abständen τ_1, τ_2, τ_3 oder $m\tau_1$, $m\tau_2$, $m\tau_3$ (bei beliebigem m) sind. Dann gehen die Strahlen $X_1 M_1$; $X_2 M_2$; $X_3 M_3$ durch P. Durch dieses

Verfahren erscheinen alle Theile des Coordinatensystems gleichmäßig zur Bestimmung des Punktes herangezogen.

Indessen pflegt man der größeren Allgemeinheit wegen die Dreiecks-Coordinaten eines Punktes als drei Zahlen x_1, x_2, x_3 zu definieren, welche proportional sind den mit drei beliebigen, jedoch festen Constanten k_1, k_2, k_3 multiplicierten Abständen t_1, t_2, t_3, so dass

$$x_1 : x_2 : x_3 = k_1 t_1 : k_2 t_2 : k_3 t_3$$

oder, wenn σ einen Proportionalitätsfactor bedeutet

$$\sigma x_1 = k_1 t_1,$$
$$\sigma x_2 = k_2 t_2,$$
$$\sigma x_3 = k_3 t_3.$$

Da sich aus diesen Beziehungen

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{x_1}{k_1} : \frac{x_2}{k_2} : \frac{x_3}{k_3}$$

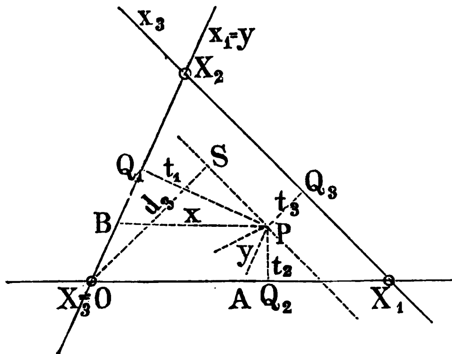
ergibt, ist der Punkt durch das Verhältnis $x_1 : x_2 : x_3$ unzweideutig bestimmt. Setzt man $k_1 = k_2 = k_3$, so folgt

$$x_1 : x_2 : x_3 = t_1 : t_2 : t_3$$

als specieller Fall.

Aber auch das System der Parallel-Coordinaten ist nur ein besonderer Fall der Dreiecks-Coordinaten. Um das zu zeigen, lässt man (Fig. 55) die Fundamentallinien x_1 und x_2 mit den Axen y und x eines Systems Parallel-Coordinaten zusammenfallen, so dass der Fundamentalpunkt X_3 auf dessen Nullpunkt O zu liegen kommt. Der Winkel der Axen x und y sei mit Θ und der Abstand S O des Nullpunktes von der Parallelen zu x_3 durch P sei mit d_3 bezeichnet. Dann ist $t_3 + d_3$ der Abstand des Nullpunktes von der Fundamentallinie x_3, also für ein gegebenes Coordinaten-Dreieck eine constante Größe. Die Wahl der Constanten k_1, k_2, k_3 steht frei,

Fig. 55.



man kann daher $k_1 = k_2 = \frac{1}{\sin\Theta}$; $k_3 = \frac{1}{t_3 + d_3}$ setzen. Dadurch gehen die Gleichungen

$$\sigma x_1 = k_1 t_1; \ \sigma x_2 = k_2 t_2; \ \sigma x_3 = k_3 t_3$$

über in

$$\sigma x_1 = \frac{t_1}{\sin\Theta} = x; \ \sigma x_2 = \frac{t_2}{\sin\Theta} = y; \ \sigma x_3 = \frac{t_3}{t_3 + d_3} = \frac{1}{1 + \frac{d_3}{t_3}}.$$

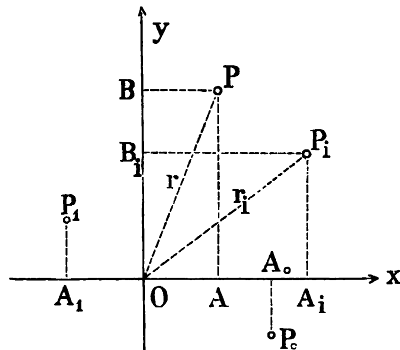
Sobald nun die Fundamentallinie x_3 mit der unendlich fernen Geraden der Ebene zusammenfällt, wird $\frac{d_3}{t_3} = 0$ und $\sigma x_3 = 1$. Setzt man jetzt, was gestattet ist, da x_1, x_2, x_3 Verhältniszahlen sind, $x_3 = 1$, so wird auch $\sigma = 1$ und

$$x_1 = x;$$
$$x_2 = y.$$

Die Dreiecks-Coordinaten bieten den Vortheil, dass ihre Anwendung zu homogenen Gleichungen führt. Sie eignen sich vorzugsweise für die Behandlung allgemeiner Lagebeziehungen der Gebilde und bringen das Gesetz der Reciprocität besser zum Ausdruck als andere Coordinatensysteme.

5. Rechtwinkelige Coordinaten. Bezeichnung und Bestimmung der Punkte. Abstand eines Punktes vom Nullpunkte. In der Folge soll ausschließlich das rechtwinkelige Coordinatensystem Anwendung finden. Feste, gegebene Punkte werden mit $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_i, \ldots$ bezeichnet; ein veränderlicher oder erst zu bestimmender mit P. Der Punkt $P(P_i)$ hat die Coordinaten x, y (x_i, y_i); seine orthogonalen Projectionen auf die Axen sind A und B (A_i und B_i). Er wird (Fig. 56) durch den Streckenzug OAP (OA_iP_i) festgelegt. Punkte von besonderer Bedeutung werden auch mit anderen Buchstaben bezeichnet werden. Der Abstand $OP = r$ des Punktes P vom Nullpunkte ergibt sich aus dem rechtwinkeligen Dreiecke OAP mittelst der Beziehung:

Fig. 56.



$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1$$

oder $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Von den beiden Vorzeichen der Wurzel wird in der Regel das positive genommen werden.

Analog findet man für $OP_i = r_i$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Der Punkt P_1 (4, 3) hat den Abstand vom Nullpunkte

$$r_1 = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

b) Die Punkte P_2 (— 1, 5); P_3 (— 3, — 2); P_4 (3, — 5) haben die Abstände

$$r_2 = \sqrt{1+25} = \sqrt{26};\ r_3 = \sqrt{9+4} = \sqrt{13};\ r_4 = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}.$$

c) Der Punkt P soll derart bestimmt werden, dass er vom Nullpunkte den Abstand $r = 13$ hat. Wie viele Lösungen sind möglich? Man suche jene heraus, wo $x = 5$ oder $y = 5$ ist. Wie groß ist dann y oder x?

6. Bestimmung einer Richtung. Parallele Geraden haben dieselbe Richtung. Eine von ihnen bestimmt die Richtung der übrigen. Es ist zweckmäßig, jene Gerade, welche die Richtung repräsentieren soll, in den Nullpunkt zu verlegen und den positiven Sinn durch eine ihr angesetzte Pfeilspitze anzudeuten. Eine solche Gerade g soll kurzweg als Richtung bezeichnet werden. Sie ist (Fig. 57) durch einen in ihr liegenden Punkt P_1 bestimmt, ebenso durch Punkte $P_2, P_3, \ldots$ wenn die Strecken $O P_1, O P_2, O P_3, \ldots$ mit Rücksicht auf die Pfeilspitze positiv erscheinen. Da

Fig. 57.

$$x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_3 : y_3 = \ldots,$$

so ist eine Richtung auch durch das constante Verhältnis der Coordinaten der sie bestimmenden Punkte festgelegt, welches durch $a : b$ dargestellt und Richtungsverhältnis genannt werden möge. Die Verhältniszahlen a und b kann man als Componenten der Richtung bezeichnen. Die Richtung wird construiert, indem man einen Punkt R, dessen Coordinaten den Richtungscomponenten a und b proportional oder gleich sind, mit dem Nullpunkte verbindet. Das Richtungsverhältnis $-a : -b$ stellt die der Richtung $a : b$ direct entgegengesetzte Richtung vor. Der Punkt Π, welcher die Richtung bestimmt und den Abstand $O\Pi = 1$ vom Nullpunkte hat, heißt der Einheitspunkt. Sind α und β seine Coordinaten, so besteht zwischen diesen (Art. 5, Gl. 1) die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Sie werden die Coordinaten der Richtung (Richtungscoordinaten) genannt und haben auch eine trigonometrische Bedeutung.

Aus den Dreiecken $O A \Pi$ und $O B \Pi$ folgt nämlich

$$\alpha = \frac{OA}{1} = \frac{OA}{O\Pi} = \cos x g$$

$$\beta = \frac{OB}{1} = \frac{OB}{O\Pi} = \cos y g.$$

also sind α und β die Cosinus der Winkel, welche die Richtung mit den Coordinatenaxen bildet. In dieser Eigenschaft führen sie auch den Namen »Richtungscosinus«.

Da eine Richtung durch das Richtungsverhältnis $a:b$ vollkommen bestimmt ist, müssen ihre Richtungscoordinaten α und β durch a und b ausgedrückt werden können. In der That findet man, wenn der Richtungspunkt R die Coordinaten a und b, also den Abstand $OR = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ vom Nullpunkte hat, aus dem Dreiecke OMR

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos xg = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \beta &= \cos yg = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Ist in der Normalen n einer Richtung g die positive Richtung derart bestimmt, dass mit Rücksicht auf den positiven Drehungssinn der Ebene $gn = \frac{\pi}{2}$, so findet man

$$\cos xn = \cos(xg + gn) = \cos(xy + yg + gn) = \cos(\pi + yg) = \\ = -\cos yg$$

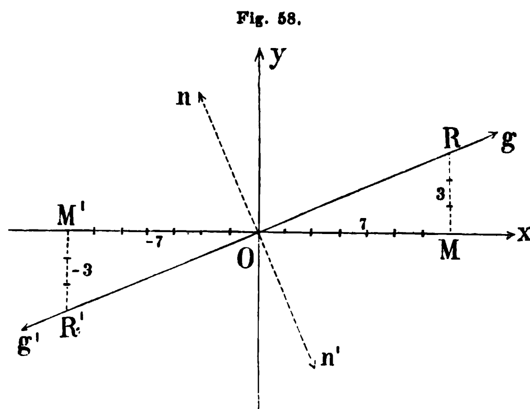
$$\cos yn = \cos(yg + gn) = \cos(yx + xg + gn) = \cos xg,$$

also

$$\left.\begin{aligned} \cos xn &= \alpha_n = -\beta \\ \cos yn &= \beta_n = \alpha \\ \alpha_n : \beta_n &= -\beta : \alpha = -b : a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Von gegebenen Richtungen $g_1, g_2, g_3, \ldots g', \ldots$ sollen in Hinkunft die Normalen mit $n_1, n_2, n_3, \ldots n', \ldots$ die Richtungspunkte mit $R_1, R_2, R_3, \ldots \ldots R', \ldots$ die Einheitspunkte mit $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots \Pi', \ldots$ bezeichnet werden; ihre Richtungsverhältnisse mit $a_1 : b_1; a_2 : b_2; a_3 : b_3; \ldots a' : b'; \ldots$, ihre Richtungscoordinaten mit $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3; \ldots \alpha', \beta'; \ldots$ und jene der Normalen mit $\alpha_{n_1}, \beta_{n_1}; \alpha_{n_2}, \beta_{n_2}; \alpha_{n_3}, \beta_{n_3} \ldots$

Fig. 58.



Beispiele und Aufgaben.

a) Bei der Richtung g (7 : 3) ist (Fig. 58) $\rho = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$, also

also
$$\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}};\ \beta = \frac{3}{\sqrt{58}};\ \alpha_n = -\frac{3}{\sqrt{58}};\ \beta_n = \frac{7}{\sqrt{58}}.$$

Die direct entgegengesetzte Richtung ist g' $(-7:-3)$ mit $\rho = \sqrt{58}$ und
$$\alpha' = -\frac{7}{\sqrt{58}};\ \beta' = -\frac{3}{\sqrt{58}};\ \alpha'_n = \frac{3}{\sqrt{58}};\ \beta'_n = -\frac{7}{\sqrt{58}}.$$

b) Die positive Richtung der x-Axe ist durch das Verhältnis $a:0$ und die Richtungscoordinaten 1, 0; jene der y-Axe durch das Verhältnis $0:b$ und die Richtungscoordinaten 0, 1 dargestellt.

c) Ist $xg = \varphi$, so ist $a:b = \cos\varphi : \sin\varphi$; $\alpha = \cos\varphi$: $\beta = \sin\varphi$; $\alpha_n = -\sin\varphi$; $\beta_n = \cos\varphi$.

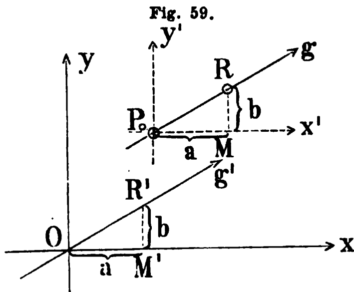
d) Man gebe die Coordinaten der Richtung g $(-12:5)$ und jene der ihr entgegengesetzten Richtung an.

e) Man drücke $\tan xg$ durch a und b oder α und β aus.

f) Man bestimme $xg = \varphi$ für die Richtungen $g_1\left(\sqrt{3}:1\right)$; $g_2\left(-\sqrt{3}:1\right)$; $g_3\left(1:1\right)$; $g_4\left(-1:-1\right)$; $g_5\left(1:-1\right)$.

7. Richtung einer beliebigen Geraden. Wenn eine Gerade g (Fig. 59) nicht durch den Nullpunkt geht, so werden ihr Richtungsverhältnis $a:b$ und ihre Richtungscoordinaten (Richtungscosinus) α, β an einer durch den Nullpunkt gelegten zu ihr Parallelen g' bestimmt. Man kann auch durch einen beliebigen Punkt P_0 der Geraden Parallele x' und y' zu den Coordinatenaxen ziehen u. s. w., denn es ist $x'g = xg = xg'$; $y'g = yg = yg'$. Soll eine Gerade durch den Punkt P_0 mit der Richtung $a:b$ gelegt werden, so kann dieses auf zwei Arten geschehen: Entweder construiert man in O die Richtung $a:b$ und zieht durch P_0 eine Gerade dieser Richtung, oder man trägt von P_0 die Strecke a parallel zu x der Größe und dem Vorzeichen entsprechend auf bis zum Punkte M und schließt hier die Strecke b parallel zu y ebenso an. Hiedurch erhält man den Richtungspunkt R, welcher mit P_0 die Gerade bestimmt. In allen Fällen ist aber

Fig. 59.



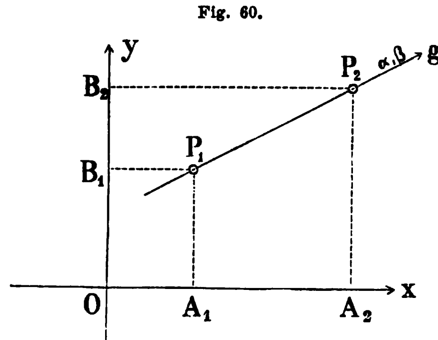
$$\alpha = \cos xg;\ \beta = \cos yg.$$

Aufgabe.

Durch die Punkte $P_1(1, 3)$; $P_2(3, 5)$; $P_3(-2, -7)$; $P_4(0, -2)$ sollen die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mit den Richtungen $12:5$; $-3:1$; $4:-3$; $-24:-7$ gelegt und deren Richtungscoordinaten α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3; α_4, β_4 berechnet werden.

8. Länge der Strecke und Richtung der Verbindungslinie zweier Punkte. Zwei Punkte P_1 und P_2 (Fig. 60) bestimmen eine unbegrenzte Gerade g — ihre Verbindungslinie — und in dieser die Strecke $P_1 P_2$. Wenn die Wahl der positiven Richtung von g frei steht, soll diese so angenommen werden, das $P_1 P_2$ positiv erscheint. Die Länge $P_1 P_2 = r$ und die Richtungscoordinaten α, β von g berechnet man mit Hilfe der orthogonalen Projectionen der Strecke auf die Axen. Da nämlich

Fig. 60.



$$A_1 A_2 = O A_2 - O A_1 = x_2 - x_1 = P_1 P_2 \cos x g = r \alpha,$$
$$B_1 B_2 = O B_2 - O B_1 = y_2 - y_1 = P_1 P_2 \cos y g = r \beta,$$

ergeben sich zunächst die Gleichungen

$$x_2 - x_1 = r \alpha; \; y_2 - y_1 = r \beta.$$

Aus diesen folgt, wenn man quadriert und addiert, weil $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots (5$$

ferner, weil jetzt r bekannt,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{x_2 - x_1}{r}; \; \beta = \frac{y_2 - y_1}{r} \\ \alpha : \beta = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (6$$

Man kann die Coordinaten-Differenzen $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ die Componenten der Strecke nennen. Dann lassen sich folgende Sätze aussprechen:

Das Quadrat einer Strecke ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Componenten. Die Richtungscoordinaten der Verbindungslinie von zwei Punkten sind gleich den Componenten der von den letzteren bestimmten Strecke, dividiert durch die Strecke; die Componenten der Strecke sind zugleich die Richtungscomponenten der Verbindungslinie.

Beispiele und Aufgaben.

a) Gegeben sind die Punkte P_1 (2, 3) und P_2 (5, 8). Die Componenten der Strecke $P_1 P_2$ sind $5 - 2 = 3$ und $8 - 3 = 5$; daher

$$r = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}; \; \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}; \; \beta = \frac{5}{\sqrt{34}}; \; \alpha : \beta = 3 : 5.$$

b) Gegeben sind die Punkte P_1 (5, — 8) und P_2 (3, 4). Die Componenten der Strecke $P_1 P_2$ sind $3 - 5 = -2$ und $4 - (-8) = 12$, daher

$$r = \sqrt{148} = 2\sqrt{37};\ \alpha = -\frac{2}{2\sqrt{37}} = -\frac{1}{\sqrt{37}};\ \beta = \frac{6}{\sqrt{37}}$$

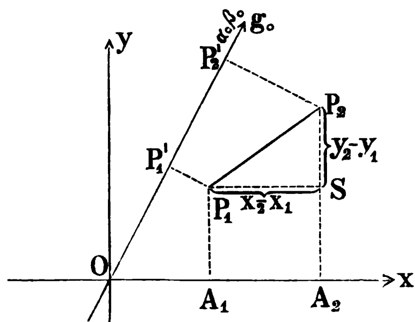
$$\alpha : \beta = -2 : 12 = -1 : 6.$$

c) Gegeben sind die Punkte P_0 $(-1, 3)$; P_1 $(2, 5)$; P_2 $(-3, -7)$; P_3 $(5, -8)$; man bestimme die Längen der Strecken P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3, P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3, ferner die Richtungscoordinaten und Richtungsverhältnisse der betreffenden Verbindunglinien.

d) Es soll ein Punkt $P(x, y)$ gefunden werden, welcher von dem Punkte P_0 $(7, 9)$ den Abstand $r = 5$ hat. Wie viele Auflösungen hat diese Aufgabe? Man suche jene heraus, wo $x = 10$ oder $y = 13$ und berechne das zugehörige y oder x.

9. Projection einer Strecke auf eine Gerade. Zieht man durch die Endpunkte P_1 und P_2 einer Strecke (Fig. 61) die Parallelen zur x- und y-Axe, die sich in dem Punkte S schneiden mögen, so sind die Stücke P_1S und SP_2 dem Vorzeichen und dem Werte nach gleich den Componenten der Strecke: $P_1S = x_2 - x_1$; $SP_2 = y_2 - y_1$. Sie bilden den Streckenzug P_1SP_2, dessen Schlusslinie P_1P_2 ist. Um die orthogonale Projection $P'_1P'_2$ der letzteren auf die Gerade g_0 mit den Richtungscoordinaten α_0, β_0 zu erhalten, projiciert man (Art. 3) den Streckenzug P_1SP_2 auf dieselbe und erhält

Fig. 61.



$$P'_1P'_2 = P_1S \cdot \cos g_0 x + SP_2 \cdot \cos g_0 y,$$

also

$$P'_1P'_2 = (x_2 - x_1)\,\alpha_0 + (y_2 - y_1)\,\beta.$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die von den Punkten P_1 $(3, 5)$ und P_2 $(8, 7)$ begrenzte Strecke P_1P_2 soll auf eine Gerade g_0 von der Richtung $4 : 7$ projiciert werden. Da

$$x_2 - x_1 = 5;\ y_2 - y_1 = 2;\ \alpha_0 = \frac{4}{\sqrt{65}};\ \beta_0 = \frac{7}{\sqrt{65}};$$

findet man

$$P'_1P'_2 = 5 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} + 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{34}{\sqrt{65}}.$$

b) Die Projection der zwischen den Punkten P_1 $(4, -2)$; P_2 $(-3, 5)$ enthaltenen Strecke auf eine Gerade von der Richtung $2 : -3$ zu berechnen. Es ist

$$x_2 - x_1 = -7;\ y_2 - y_1 = 7;\ \alpha_0 = \frac{2}{\sqrt{13}};\ \beta_0 = -\frac{3}{\sqrt{13}},$$

daher

$$P'_1 P'_2 = -7 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 7 \cdot \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{35}{\sqrt{13}}.$$

c) Gegeben sind die Punkte $P_0(1,1)$; $P_1(4,3)$; $P_2(2,7)$; $P_3(-3,5)$; $P_4(-2,-2)$; $P_5(3,-4)$. Man berechne die Projectionen des Streckenzuges $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ und seiner Schlusslinie P_0P_5 auf eine Gerade g_0 von der Richtung $2:-1$ und zeige, dass dieselben gleich sind. Warum ist die Projection desselben Streckenzuges auf die Gerade g von der Richtung $5:2$ gleich Null?

10. Coordinaten der Punkte einer Geraden. Eine Gerade möge durch einen Punkt und die Richtung oder durch zwei Punkte gegeben sein. Ist die Lage eines anderen Punktes der Geraden in Bezug auf deren feste Elemente bekannt, so kann man auch die Coordinaten dieses Punktes berechnen.

I. Die Gerade gehe durch den Punkt $P_0(x_0, y_0)$ und habe die Richtungscoordinaten α, β. Ein beliebiger Punkt $P(x,y)$ der Geraden habe von P_0 den Abstand $P_0P = r$. Dann ist (Art. 8)

$$x - x_0 = r\alpha;\ y - y_0 = r\beta;$$

also

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + r\alpha \\ y = y_0 + r\beta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden finden, indem man dem r den entsprechenden Wert erteilt.

Fällt P_0 mit dem Nullpunkte zusammen, so wird

$$\left.\begin{array}{l} x = r\alpha \\ y = r\beta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7^{I}$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Coordinaten der Punkte P_1 und P_2 zu berechnen, welche auf der durch $P_0(5, 3)$ oder $O(o, o)$ und die Richtung $12:5$ bestimmten Geraden in den Abständen $r_1 = 26$ und $r_2 = -13$ von P_0 oder O liegen. Man findet allgemein

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 + \frac{12}{13} r \\ y = 3 + \frac{5}{13} r \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} x = \frac{12}{13} r \\ y = \frac{5}{13} r \end{array}\right\},$$

also speciell

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 5 + \frac{12}{13} \cdot 26 = 29 \\ y_1 = 3 + \frac{5}{13} \cdot 26 = 13 \end{array}\right\} \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 24 \\ y_1 = 10 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 5 + \frac{12}{13} \cdot (-13) = -7 \\ y_2 = 3 + \frac{5}{13} \cdot (-13) = -2 \end{array}\right\} \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} x_2 = -12 \\ y_2 = -5 \end{array}\right\}.$$

b) Eine Gerade sei durch den Punkt $P_0\,(-2, -5)$ und die Richtung $4:5$ gegeben. Die Coordinaten der Punkte P_1 und P_2 zu berechnen, welche auf ihr liegen und von P_0 die Abstände $r_1 = -4$; $r_2 = 7$ haben. Welche Abstände von P_0, und welche Coordinaten haben die Schnittpunkte der Geraden mit den Coordinatenaxen, ferner die Punkte der Geraden, deren Abstände vom Nullpunkte 2 und 11 sind?

II. Die Gerade sei durch die Punkte $P_1\,(x_1, y_1)$ und $P_2\,(x_2, y_2)$ gegeben. Ein beliebiger Punkt $P\,(x,y)$ derselben habe das Theilverhältnis λ in Bezug auf P_1 und P_2 als Fundamentalpunkte. Aus den Beziehungen

$$\lambda = \frac{P_1 P}{P_2 P} = \frac{A_1 A}{A_2 A} = \frac{x - x_1}{x - x_2},$$

$$\lambda = \frac{P_1 P}{P_2 P} = \frac{B_1 B}{B_2 B} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

findet man

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden $P_1 P_2$ berechnen, indem man dem λ den entsprechenden Wert ertheilt. Setzt man $\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, so wird

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Für den Mittelpunkt P_m der Strecke $P_1 P_2$ ist $\lambda = -1$, daher

$$\left.\begin{array}{l} x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Eine Gerade sei durch die Punkte P_1 (5, 4) und P_2 (7, 8) bestimmt. Es sollen die Coordinaten der Punkte P_3, P_4, P_5 mit den Theilverhältnissen

$$\lambda_3 = \frac{5}{4}; \; \lambda_4 = -\frac{3}{2}; \; \lambda_5 = \frac{4}{5},$$

ferner jene des Mittelpunktes P_m der Strecke $P_1 P_2$ berechnet werden. Man findet allgemein:

$$x = \frac{5 - 7\lambda}{1 - \lambda}; \; y = \frac{4 - 8\lambda}{1 - \lambda},$$

folglich

$$x_3 = \frac{5 - 7 \cdot \frac{5}{4}}{1 - \frac{5}{4}} = \frac{20 - 35}{4 - 5} = 15; \; y_3 = \frac{4 - 8 \cdot \frac{5}{4}}{1 - \frac{5}{4}} = \frac{16 - 40}{4 - 5} = 24;$$

$$x_4 = \frac{5 + 7 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{10 + 21}{2 + 3} = \frac{31}{5}; \; y_4 = \frac{4 + 8 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{8 + 24}{2 + 3} = \frac{32}{5};$$

$$x_5 = \frac{5 - 7 \cdot \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{25 - 28}{5 - 4} = -3; \; y_5 = \frac{4 - 8 \cdot \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{20 - 32}{5 - 4} = -12;$$

$$x_m = \frac{5 + 7}{2} = 6; \; y = \frac{4 + 8}{2} = 6.$$

b) Hat ein Punkt P das Theilverhältnis λ in Bezug auf die Einheitspunkte Π_1 und Π_2 der Richtungen g_1 und g_2, auf deren Verbindungslinie er liege, so sind seine Coordinaten

$$\frac{\alpha_1 - \lambda \alpha_2}{1 - \lambda}; \; \frac{\beta_1 - \lambda \beta_2}{1 - \beta},$$

daher ist das Richtungsverhältnis des Strahles O P

$$(\alpha_1 - \lambda \alpha_2) : (\beta_1 - \lambda \beta_2);$$

den Lagen P_m und P_u des Halbierungspunktes und des unendlich fernen Punktes von $\Pi_1 \Pi_2$ entsprechen die Theilverhältnisse $\lambda_m = -1$ und $\lambda_u = 1$. Die Strahlen OP_m und OP_u sind die Halbierungslinien der Winkel der Richtungen $g_1 g_2$, deren Richtungsverhältnisse demnach:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) : (\beta_1 + \beta_2) \text{ und } (\alpha_1 - \alpha_2) : (\beta_1 - \beta_2).$$

Für $\alpha_1 : \beta_1 = 12 : 5$; $\alpha_2 : \beta_2 = 3 : 4$ findet man die Richtungen der Winkelhalbierenden

$$\left(\frac{12}{13} \pm \frac{3}{5}\right) : \left(\frac{5}{13} \pm \frac{4}{5}\right) = (60 \pm 39) : (25 \pm 52),$$

also $9 : 7$ und $7 : -9$.

c) Eine Gerade sei durch die Punkte P_1 (5, 3) und P_2 (— 7, — 2) gegeben. Es sollen die Coordinaten des Mittelpunktes P_m der Strecke $P_1 P_2$, ferner jene der Punkte P_3 ($\lambda = 5$); $P_4\left(\lambda = -\frac{1}{5}\right)$; $P_5\left(\lambda = \frac{3}{7}\right)$ berechnet werden. Welche Theilverhältnisse und Coordinaten haben die Schnittpunkte der Geraden $P_1 P_2$ mit den Coordinatenaxen?

d) Die Fundamentalstrecke $P_1 P_2$ wird in n gleiche Theile getheilt und diese Theilung außerhalb der Strecke fortgesetzt. Welche Coordinaten hat der k^{te} Theilpunkt von P_1 gezählt, innerhalb der Strecke, welche haben die k^{ten} Theilpunkte, von P_1 oder P_2 gezählt, außerhalb der Strecke?

e) Welches Theilverhältnis und welche Coordinaten besitzt der Punkt, der auf der Verbindungslinie der Punkte P_1 (—3, —4) und P_2 (5, 2) in dem Abstande $r = 10$ vom Nullpunkte oder im Abstande $r_0 = 5$ vom Punkte P_0 (3, 4) liegt?

f) Die Richtungen der Winkelhalbierenden der Richtungen $2 : -1$ und $-1 : -7$ zu finden.

11. Flächen ebener, geradliniger Figuren. Der Umfang des durch die Punkte A, B und C bestimmten Dreieckes kann von einem Punkte P von A über B und C oder von A über C und B durchlaufen werden. Der von einem innerhalb des Dreieckes liegenden Punkte M ausgehende Vector MP beschreibt im ersten Falle die Fläche ABC, im zweiten die Fläche ACB und vollführt dabei Drehungen um M, welche einander direct entgegengesetzt sind, so dass man die Flächen ABC und ACB als entgegengesetzt gleiche Größen ansehen muss, zwischen welchen die Beziehung

$$ABC = -ACB \text{ oder } ABC + ACB = 0$$

besteht.

Dementsprechend sind die Flächen ABC, BCA, CAB untereinander gleich, ebenso die Flächen ACB, CBA, BAC. Dreht sich der Vector MP in dem für die Ebene festgesetzten positiven Drehungssinne, während P den Weg ABCA zurücklegt, so wird die Fläche ABC als positiv in Rechnung gezogen und die Aufeinanderfolge der Punkte A, B, C als dem positiven Drehungssinn entsprechend bezeichnet. Dasselbe gilt von den Flächen und Aufeinanderfolgen BCA und CAB, während die Flächen ACB, CBA, BAC als negativ anzusehen sind, und die zugehörigen Aufeinanderfolgen dem negativen Drehungssinne entsprechen. Damit ist das Vorzeichen der Fläche eines jeden Dreieckes der Ebene bestimmt, sobald angegeben ist, wie die Eckpunkte aufeinander folgen sollen. Die Dreiecke ABC' und ABC'' haben gleich oder verschieden bezeichnete Flächen, je nachdem die Punkte C' und C'' auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen.

Mit Rücksicht auf diese Vorzeichenregel ist für jede Lage des Punktes M in der Ebene des Dreieckes

$$ABC = MAB + MBC + MCA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10$$

Diese Beziehung ist evident, wenn M in dem Dreiecke liegt. Dann sind die Flächen der Dreiecke MAB, MBC, MCA und ABC von gleichem Vorzeichen und die ersten drei setzen die vierte zusammen.

Liegt M außerhalb des Dreieckes, aber in dem Winkel BCA, so ist

$$MAB + MBC + MCA = MBC + MCA - MBA = ABC.$$

Liegt endlich M in dem Scheitelwinkel von BCA, so ist

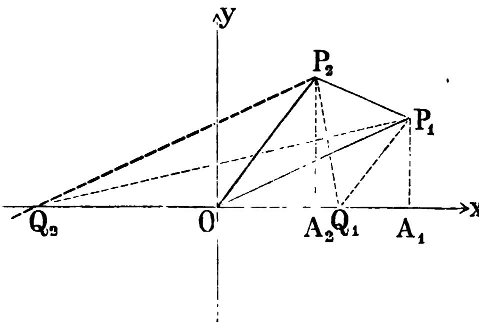
$$MAB + MBC + MCA = MAB - MCB - MAC = ABC$$

u. s. w.

Die über das Vorzeichen der Fläche des Dreieckes angestellten Betrachtungen können auf das Viereck, Fünfeck, überhaupt auf jedes Vieleck ausgedehnt werden. Durch die Eckpunkte eines solchen und die festgesetzte Aufeinanderfolge derselben ist seine Fläche der Größe und dem Vorzeichen nach bestimmt, muss also durch die Coordinaten der Eckpunkte darstellbar sein.

I. Für die Ermittlung der Fläche des Dreieckes OP_1P_2 (Fig. 62) möge folgender Vorgang eingehalten werden: durch den Eckpunkt P_1 wird eine Parallele zu der Seite OP_2 gezogen, welche die x-Axe in Q_1 schneidet. Dann sind die Flächen der Dreiecke OP_1P_2 und OQ_1P_2 gleich, man hat daher

Fig. 62.



$$OP_1P_2 = OQ_1P_2 =$$
$$= \frac{1}{2} OQ_1 \,.\, A_2P_2 =$$
$$= \frac{1}{2} OQ_1 \cdot y_2$$

und überzeugt sich leicht, dass in allen möglichen Fällen die Vorzeichenregel durch die Vorzeichen der Strecken OQ_1 und A_2P_2 bestätigt wird.

Da

$$Q_1A_1 : A_1P_1 = OA_2 : A_2P_2,$$

und

$$Q_1 A_1 = \frac{O A_2 . A_1 P_1}{A_2 P_2} = \frac{x_2 y_1}{y_2} = O A_1 - O Q_1,$$

findet man

$$O Q_1 = O A_1 - Q_1 A_1 = x_1 - \frac{x_2 y_1}{y_2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2},$$

$$y_2 . O Q_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

demnach

$$2 f = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11$$

Um denselben Vorgang auf das Dreieck $O P_2 P_1$ anzuwenden, hat man durch P_2 die Parallele zu $O P_1$ zu ziehen, welche die x-Axe in Q_2 schneidet. Nun ist

$$f' = O P_2 P_1 = O Q_2 P_1 = \frac{1}{2} O Q_2 . A_1 P_1 = \frac{1}{2} O Q_2 . y_1,$$

ferner

$$Q_2 A_2 : A_2 P_2 = O A_1 : A_1 P_1,$$

$$Q_2 A_2 = \frac{O A_1 . A_2 P_2}{A_1 P_1} = \frac{x_1 y_2}{y_1} = O A_2 - O Q_2$$

und

$$O Q_2 = O A_2 - Q_2 A_2 = x_2 - \frac{x_1 y_2}{y_1} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1},$$

also

$$y_1 . O Q_2 = 2 f' = x_2 y_1 - x_1 y_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

so dass sich, wie zu erwarten stand,

$$f' = - f$$

ergibt.

Beispiele und Aufgaben.

a) Wenn die Punkte P_1 (4, 2) und P_2 (7, 9) gegeben sind, so findet man

$$2 O P_1 P_2 = 2 f = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 22,$$

also

$$f = 11.$$

Die Aufeinanderfolge $O P_1 P_2$ entspricht dem positiven Drehungssinn. Hingegen ist

$$2 O P_2 P_1 = 2 f' = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = - 22,$$

also

$$f' = - 11,$$

wo die Aufeinanderfolge $O P_2 P_1$ dem negativen Drehungssinne entspricht.

b) Es soll die Fläche des Dreieckes berechnet werden, welches durch die Punkte O, P_1 (—3, 5) und P_2 (4, —9) bestimmt ist.

c) Entspricht die Aufeinanderfolge der Punkte $O, P_1\,(5, 3)$ und $P_2\,(-7, -9)$ dem positiven oder dem negativen Drehungssinn?

d) Gegeben ist der Punkt $P_0\,(5, 13)$. Es soll der Punkt $P\,(x, y)$ derart ermittelt werden, dass $O\,P\,P_0 = 65$ wird. Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Wie groß ist y, wenn $x = 10$?

e) Gegeben ist der Punkt $P_0\,(x_0, y_0)$. Einen Punkt $P\,(x, y)$ so zu bestimmen, dass $O\,P\,P_0 = 0$. Anzahl der Lösungen? Wie groß ist x wenn $y = y_1$?

II. Die Fläche eines beliebigen Dreieckes $P_1\,P_2\,P_3$ ergibt sich aus der Beziehung

$$P_1\,P_2\,P_3 = O\,P_1\,P_2 + O\,P_2\,P_3 + O\,P_3\,P_1$$

(siehe Gl. 10). Indem man die Flächen doppelt nimmt, erhält man

$$2\,f = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},$$

oder weil rechts die Entwicklung einer Determinante 3. Grades auftritt:

$$2\,f = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (12$$

Auf dieselbe Art findet man

$$P_1\,P_3\,P_2 = f' = O\,P_1\,P_3 + O\,P_3\,P_2 + O\,P_2\,P_1,$$

$$2\,f' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = -\,2\,f.$$

Also

$$f' = -\,f,$$

wodurch wieder die Vorzeichenregel bestätigt wird.

Die wirkliche Ausrechnung einer Dreiecksfläche geschieht bequem durch die Anwendung des Schemas

$$\begin{array}{ccccccc} & -4 & & -5 & & -6 & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_1 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & +1 & & +2 & & +3 & \end{array},$$

welches für das Dreieck $P_1\,P_2\,P_3$ gilt und erhalten wird, indem man die untereinander gestellten Coordinaten der Eckpunkte nebeneinander ansetzt und zum Schluss die Coordinaten des ersten Punktes noch einmal anfügt. Bildet man dann die Producte im Sinne der Pfeile, versieht sie bei 1, 2, 3 mit dem positiven, bei 4, 5, 6 mit dem negativen Vorzeichen und addiert, so folgt

$$2\,f = x_1\,y_2 + x_2\,y_3 + x_3\,y_1 - y_1\,x_2 - y_2\,x_3 - y_3\,x_1.$$

In allen Fällen ist bei den Ansätzen auf die genaue Einhaltung der gegebenen Reihenfolge der Eckpunkte zu sehen.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Fläche des von den Punkten $P_1(2,3)$; $P_2(7,5)$; $P_3(5,9)$ bestimmten Dreieckes zu berechnen. Nach dem Schema

$$\begin{matrix} 2 & & 7 & & 5 & & 2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 3 & & 5 & & 9 & & 3 \end{matrix}$$

findet man

$$2f = 10 + 63 + 15 - 21 - 25 - 18 = 24$$

oder

$$f = 12.$$

Nach Gl. 11 ist

$$2f = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 24.$$

b) Gegeben sind die Punkte $P_1(-3,-5)$; $P_2(-2, 7)$; $P_3(5,-4)$. Die Fläche $P_1 P_2 P_3$ zu berechnen und zu entscheiden, ob die Reihenfolge $P_1 P_2 P_3$ dem positiven oder negativen Drehungssinne entspricht. Aus dem Schema

$$\begin{matrix} -3 & & -2 & & 5 & & -3 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -5 & & 7 & & -4 & & -5 \end{matrix}$$

ergibt sich

$$2f = -21 + 8 - 25 - 10 - 35 - 12 = -95,$$
$$f = -47{\cdot}5.$$

Die Reihenfolge entspricht dem negativen Drehungssinne.

c) Die Fläche des Dreieckes zu berechnen, welches durch die Punkte $P_1(5,7)$; $P_2(-8,-3)$; $P_3(3,9)$ bestimmt wird. Welchem Drehungssinne entspricht die angegebene Reihenfolge dieser Punkte?

d) Gegeben sind die Punkte $P_1(4,4)$; $P_2(16,8)$. Einen Punkt $P(x,y)$ so zu bestimmen, dass die Fläche $P_1 P_2 P$ gleich ± 27 wird. Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Wie groß ist y, wenn $x = 10$?

e) Einen Punkt $P(x,y)$ so zu ermitteln, dass er mit den Punkten $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ ein Dreieck von der Fläche Null bildet. Wo liegt P? Wie groß ist y wenn $x = x_3$?

III. Ist $P_1 P_2 P_3 \ldots P_{n-1} P_n P_1$ ein geschlossener Streckenzug und M ein beliebiger Punkt in der Ebene desselben, so ist die Summe der Dreiecke MP_1P_2, MP_2P_3, ... $MP_{n-1}P_n$, MP_nP_1, eine ganz bestimmte, von der Lage des Punktes M unabhängige Größe.

Setzt man nämlich

$$MP_1P_2 + MP_2P_3 + MP_3P_4 + \ldots + MP_{n-2}P_{n-1} + MP_{n-1}P_n + MP_nP_1 = \Sigma$$

und zieht nun einen Punkt M' in Betracht, so hat man für diesen zunächst (Gl. 10)

$$\begin{array}{lllll} M'P_1P_2 & = MP_1P_2 & + MP_2M' & + MM'P_1; \\ M'P_2P_3 & = MP_2P_3 & + MP_3M' & + MM'P_2; \\ M'P_3P_4 & = MP_3P_4 & + MP_4M' & + MM'P_3; \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M'P_{n-2}P_{n-1} & = MP_{n-2}P_{n-1} & + MP_{n-1}M' & + MM'P_{n-2}; \\ M'P_{n-1}P_n & = MP_{n-1}P_n & + MP_nM' & + MM'P_{n-1}; \\ M'P_nP_1 & = MP_nP_1 & + MP_1M' & + MM'P_n; \end{array}$$

Durch Summierung folgt, da sich die Glieder der zweiten und dritten Colonne rechts gegenseitig aufheben, indem $MP_2M' + MM'P_2 = 0$ u. s. w.

$$M'P_1P_2 + M'P_2P_3 + M'P_3P_4 + \ldots + M'P_{n-2}P_{n-1} + M'P_{n-1}P_n + \\ + M'P_nP_1 = \Sigma.$$

Setzt man voraus, dass der Streckenzug keine verschlungene, in mehrere Zellen abgetheilte Figur, sondern ein Vieleck im gebräuchlichen Sinne mit einer einzigen Zelle bildet; kann ferner in diesem der Punkt M so angenommen werden, dass die Vectoren $MP_1, MP_2, \ldots$ von der Umfangslinie des Vieleckes nicht zwischen M und P_1, M und $P_2, \ldots$ getroffen werden, so stellt Σ für diese, also überhaupt für jede Lage von M offenbar die Fläche des Vieleckes dar. Ist eine solche Lage des Punktes M nicht vorhanden, lässt sich aber das Vieleck durch die Diagonale P_kP_{k+s} in die Theile $P_1P_2 \ldots P_k\,P_{k+s}\,P_{k+s+1} \ldots P_nP_1$ und $P_kP_{k+1} \ldots P_{k+s-1}P_{k+s}P_k$ zerlegen, so dass in dem ersten ein Punkt M', in dem zweiten ein Punkt M'' von der verlangten Eigenschaft ermittelt werden kann, dann sind die Flächen dieser Theile ausgedrückt durch

$$\Sigma' = M'P_1P_2 + M'P_2P_3 + \ldots + M'P_{k-1}P_k \underline{+ M'P_kP_{k+s}} + \\ + M'P_{k+s}P_{k+s+1} + \ldots + M'P_{n-1}P_n + M'P_nP_1$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma'' &= M''P_kP_{k+1} + M''P_{k+1}P_{k+2} + \ldots + M''P_{k+s-1}P_{k+s} + \\ &\qquad + M''P_{k+s}P_k = \\ &= M'P_kP_{k+1} + M'P_{k+1}P_{k+2} + \ldots + M'P_{k+s-1}P_{k+s} + \\ &\qquad \underline{+ M'P_{k+s}P_k}; \end{aligned}$$

und die Fläche des Vieleckes durch

$$\Sigma' + \Sigma'' = M' P_1 P_2 + M' P_2 P_3 + \ldots + M' P_{n-1} P_n + M' P_n P_1 = \Sigma,$$

weil

$$M' P_k P_{k+s} + M' P_{k+s} P_k = 0.$$

Wenn nöthig, kann man das Vieleck in mehr als zwei Theile zerlegt denken und die obige Schlussfolgerung anwenden, das Ergebnis bleibt immer dasselbe. Für die Fläche f des Vieleckes ergibt sich daher, unabhängig von der Lage des Punktes M in dessen Ebene:

$$f = M P_1 P_2 + M P_2 P_3 + \ldots + M P_{n-1} P_n + M P_n P_1 \quad . \quad . \quad (13$$

Verlegt man M in den Nullpunkt, so wird

$$f = O P_1 P_2 + O P_2 P_3 + \ldots + O P_{n-1} P_n + O P_n P_1$$

und durch die Coordinaten der Eckpunkte ausgedrückt

$$2f = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad . \quad (14$$

Die wirkliche Ausrechnung erfolgt mit Vortheil nach dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & - & - & - & & & - & - & - & - \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & . \; , \; . & . & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n & x_1 \\
 & \times & \times & \times \; \times & & & \times & \times & \times & \times \\
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & . \; . \; . & . & y_{n-2} & y_{n-1} & y_n & y_1 \\
 & \searrow & \searrow & \searrow & & & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \\
 & + & + & + & & & + & + & + & +
\end{array}$$

und liefert

$$2f = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + \ldots + x_{n-2} y_{n-1} + x_{n-1} y_n + x_n y_1 -$$
$$- y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_4 - \ldots - y_{n-2} x_{n-1} - y_{n-1} x_n - y_n x_1.$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Fläche des von den Punkten $P_1 (3, 2)$; $P_2 (5, 3)$; $P_3 (7, 9)$; $P_4 (2, 5)$ bestimmten Viereckes zu berechnen. Nach dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & & 5 & & 7 & & 2 & & 3 \\
 & \times & & \times & & \times & & \times & \\
2 & & 3 & & 9 & & 5 & & 2
\end{array}$$

erhält man

$$2f = 9 + 45 + 35 + 4 - 10 - 21 - 18 - 15 = 29,$$
$$f = 14{\cdot}5.$$

Die Reihenfolge der Punkte entspricht dem positiven Drehungssinne, weil sich eine positive Zahl ergeben hat.

b) Man zeichne das von den Punkten $P_1(-5, -3)$; $P_2(-7, 2)$; $P_3(-3, 5)$; $P_4(1, 7)$; $P_5(4, 2)$; $P_6(6, -3)$; $P_7(3, -6)$ bestimmte Siebeneck und berechne dessen Fläche.

Anmerkung. Wenn der geschlossene Streckenzug $P_1 P_2 \ldots P_n P_1$ ein verschlungenes Vieleck bildet, dessen Fläche aus zwei oder mehreren Zellen besteht, kann die Frage nach der Bedeutung jener Zahl aufgeworfen werden, welche dem angegebenen Verfahren gemäß berechnet, für ein nicht verschlungenes Vieleck die Fläche angibt.

Die Berechnung beruht auf der Summierung der theils positiven, theils negativen Flächen der Dreiecke, welche den Nullpunkt O als gemeinsamen Eckpunkt, die Strecken $P_1P_2, P_2P_3, \ldots P_{n-1}P_n, P_nP_1$ als die ihm gegenüberliegenden Seiten haben und sich zu zweien oder auch zu mehreren theilweise decken können. Bei der Summenbildung heben sich entgegengesetzt bezeichnete Flächen in dem Maße auf, dass ein Überschuss der positiven oder negativen verbleibt, welcher bei dem nicht verschlungenen Vielecke den Flächeninhalt der einzigen Zelle desselben darstellt. Bei dem verschlungenen Vielecke aber kann es geschehen, dass auf einer von seinen k Zellen u positive und v negative Flächen liegen, so dass diese Zelle nicht einfach, sondern $(u-v)$-fach zu rechnen ist. Nennt man $u - v = c$ den Coëfficienten der betreffenden Zelle, deren einfache, absolut genommene Fläche φ sei, so ist die Summe der genannten Dreiecke gleichwertig der Summe $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_k\varphi_k$, durch welche also die Fläche des verschlungenen Vieleckes definiert wird:

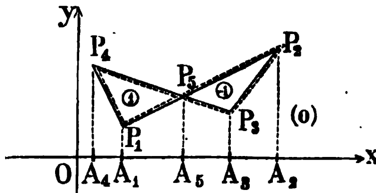
$$f = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_k\varphi_k.$$

Die Coëfficienten $c_1, c_2, \ldots c_k$ können positiv, negativ oder auch Null sein. Ihre Ermittlung stützt sich darauf, dass eine positive Dreiecksfläche OP_iP_{i+1} von dem Vector OP im positiven Drehungssinne überstrichen wird, wenn sich P von P_i nach P_{i+1} bewegt, eine negative hingegen im negativen Drehungssinne. Wenn daher P den Weg $P_1 P_2 \ldots P_n P_1$ zurücklegt, wird eine Zelle von dem Vector OP so oft im positiven und so oft im negativen Sinne überstrichen, als sich positive oder negative Dreiecksflächen auf ihr decken. Setzt man den positiven Drehungssinn »linksum« voraus und bezeichnet die im Sinne der Bewegung des Punktes P linke Seite (linkes Ufer) des Streckenzuges durch eine punktierte Linie, so liegt diese mit O auf einerlei Seite der betreffenden Strecke oder nicht, je nachdem sich der Vector OP im positiven oder negativen Sinne dreht. Zwei mit O in einer Geraden liegende Punkte werden von dem Vector gleich oft überstrichen, wenn sie in derselben Zelle liegen, so dass in einer Zelle nicht verschiedene Coëfficienten auftreten können. Liegen sie aber in benachbarten, durch die Strecke P_iP_{i+1} getrennten Zellen, so kann der Vector OP den vom Nullpunkte entfernteren nur zugleich mit dem diesem näher liegenden überstreichen; dieser wird aber allein überstrichen, wenn P die trennende Strecke passiert, und zwar im positiven oder negativen Sinne, je nachdem er sich auf der punktierten Seite derselben befindet oder nicht. Man erkennt daraus, dass von zwei durch eine Strecke getrennten Nachbarzellen die auf der punktierten Seite liegende einen um die Einheit größeren Coëfficienten besitzt. Der unendlichen Fläche außerhalb des Umrisses der Figur muss der Coëfficient Null zugeschrieben werden; indem man von dort aus die Zellen des Vieleckes nach und nach betritt, erhält man deren Coëfficienten, wenn man eine Einheit hinzufügt oder abzieht, je nachdem der Übertritt von einer nicht punktierten Seite der Trennungslinie auf eine punktierte oder umgekehrt erfolgt.

Beispiele und Aufgaben.

a) Das Viereck der Punkte $P_1(3, 2)$; $P_2(13, 7)$; $P_3(10, 3)$; $P_4(1, 6)$ dessen Seiten P_1P_2 und P_3P_4 sich in dem Punkte $P_5(7, 4)$ schneiden (Fig. 63) besitzt die zwei Zellen $P_4P_1P_5$ und $P_3P_2P_5$ mit den Coëfficienten $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$. Aus dem Schema

Fig. 63.



$$\begin{matrix}3 && 13 && 10 && 1 && 3\\ & \times && \times && \times && \times & \\ 2 && 7 && 3 && 6 && 2\end{matrix}$$

findet man

$$2f = 21 + 39 + 60 + 2 - 26 - 70 - 3 - 18 = 5;$$
$$f = 2{\cdot}5.$$

Die Flächen der Zellen sind:

$P_4P_1P_5$ nach dem Schema $\begin{matrix}1 && 3 && 7 && 1\\ & \times && \times && \times & \\ 6 && 2 && 4 && 6\end{matrix}$,

$$2\varphi_1 = 2 + 12 + 42 - 18 - 14 - 4 = 20$$
$$\varphi_1 = 10;$$

$P_3P_2P_5$ nach dem Schema $\begin{matrix}10 && 13 && 7 && 10\\ & \times && \times && \times & \\ 3 && 7 && 4 && 3\end{matrix}$,

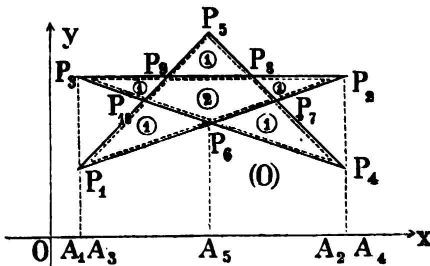
$$2\varphi_2 = 70 + 52 + 21 - 39 - 49 - 40 = 15,$$
$$\varphi_2 = 7{\cdot}5.$$

Demnach

$$f = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = 10 - 7{\cdot}5 = 2{\cdot}5.$$

b) Die Punkte $P_1(1, 3)$; $P_2(13, 7)$; $P_3(1, 7)$; $P_4(13, 3)$; $P_5(7, 9)$ bestimmen ein Pentagramm (Fig. 64), bestehend aus fünf dreieckigen Zellen mit dem Coëfficienten 1 und einer fünfeckigen mit dem Coëfficienten 2 und den Eckpunkten $P_6(7, 5)$; $P_7(10, 6)$; $P_8(9, 7)$; $P_9(5, 7)$; $P_{10}(4, 6)$. Durch das festgesetzte Verfahren findet man

Fig. 64.



$$2f = 72.$$

Für die dreieckigen Zellen ergibt sich

$$2\varphi_1 = 12;\ 2\varphi_2 = 12;\ 2\varphi_3 = 4;\ 2\varphi_4 = 8;\ 2\varphi_5 = 4.$$

Für die fünfeckige

$$2\varphi_0 = 16,$$

daher

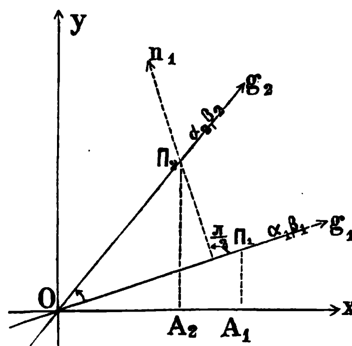
$$12 + 12 + 4 + 8 + 4 + 2 \times 16 = 72 = 2f.$$

Man controliere diese Zahlen.

c) Das durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{16}$ mit den Coordinaten: (10, 4); (10, 9); (6, 9); (6, 5); (5, 5); (5, 6); (9, 6); (9, 10); (4, 10); (4, 1); (2, 1); (2, 3); (3, 3); (3, 2); (1, 2); (1, 4) bestimmte verschlungene Vieleck soll gezeichnet und untersucht werden. Man bestimme die Zellencoëfficienten, berechne mit ihrer Hilfe die Fläche und controliere das Ergebnis durch Berechnung derselben aus den Coordinaten der Eckpunkte.

12. Bestimmung des Winkels zweier Richtungen. Es mögen zwei Richtungen g_1 und g_2 durch die Richtungscoordinaten α_1, β_1 und α_2, β_2 gegeben sein, so dass die Einheitspunkte Π_1 und Π_2 die Coordinaten α_1, β_1 und α_2, β_2 haben (Fig. 65). Projiciert man den Streckenzug $O A_2 \Pi_2$ und dessen Schlusslinie $O \Pi_2$ auf g_1, so erhält man

Fig. 65.



$$\begin{aligned} O \Pi_2 \cos g_1 g_2 &= \\ = O A_2 \cos g_1 x + A_2 \Pi_2 \cos g_1 y &= \\ = \alpha_2 \cos x g_1 + \beta_2 \cos y g_1, \end{aligned}$$

also

$$\cos g_1 g_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 \quad \ldots \ldots \quad (15$$

Projiciert man hingegen denselben Streckenzug sammt Schlusslinie auf die Normale n_1 von g_1 $\left(g_1 n_1 = \frac{\pi}{2}\right)$, so folgt

$$\begin{aligned} O \Pi_2 \sin g_1 g_2 &= O A_2 \cos n_1 x + A_2 \Pi_2 \cos n_1 y = \\ &= \alpha_2 \cos x n_1 + \beta_2 \cos y n_1 = \\ &= \alpha_2 \cdot (-\beta_1) + \beta_2 \cdot \alpha_1 \end{aligned}$$

(siehe Gl. 4), mithin

$$\sin g_1 g_2 = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (16$$

Beachtet man, dass die doppelte Fläche des Dreieckes $O \Pi_1 \Pi_2$ durch $O \Pi_1 . O \Pi_2 . \sin g_1 g_2 = \sin g_1 g_2$ und auch durch $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$ ausgedrückt werden kann, so erhält man durch Vergleich dasselbe Resultat für $\sin g_1 g_2$.

Schließlich findet man

$$\tan g_1 g_2 = \frac{\sin g_1 g_2}{\cos g_1 g_2} = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2} \quad \ldots \ldots \quad (17$$

Sind die Richtungen g_1 und g_2 durch die Verhältnisse $a_1 : b_1$ und $a_2 : b_2$ gegeben, so ist $\alpha_1 = \frac{a_1}{\rho_1} \ldots$, also

$$\left.\begin{aligned}\cos g_1 g_2 &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\rho_1 \rho_2} \\ \sin g_1 g_2 &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\rho_1 \rho_2} \\ \tan g_1 g_2 &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18$$

$$\rho_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2};\; i = 1,\, 2.$$

Wenn die Richtungen zu einander senkrecht sind, ist $g_1 g_2 = \frac{\pi}{2}$ oder $g_1 g_2 = \frac{3\pi}{2}$; $\cos g_1 g_2 = 0$. Daher

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 &= 0 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Für die Richtungen $g_1 (5:3)$ und $g_2 (4:7)$ findet man

$$\alpha_1 = \frac{5}{\sqrt{34}};\; \beta_1 = \frac{3}{\sqrt{34}};\; \alpha_2 = \frac{4}{\sqrt{65}};\; \beta_2 = \frac{7}{\sqrt{65}},$$

also

$$\cos g_1 g_2 = \frac{5.4 + 3.7}{\sqrt{34}.\sqrt{65}} = \frac{41}{\sqrt{34}.\sqrt{65}};$$

$$\sin g_1 g_2 = \frac{5.7 - 3.4}{\sqrt{34}.\sqrt{65}} = \frac{23}{\sqrt{34}.\sqrt{65}};$$

$$\tan g_1 g_2 = \frac{23}{41}.$$

b) Den Winkel der Richtungen $g_1 (1:2)$ und $g_2 (-1:3)$ zu finden. Es ist

$$\cos g_1 g_2 = \frac{-1+6}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\sin g_1 g_2 = \frac{3+2}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\tan g_1 g_2 = 1;$$

daher

$$g_1 g_2 = \frac{\pi}{4}.$$

c) Man setze $x g_1 = \varphi_1$; $x g_2 = \varphi_2$ und drücke $\sin g_1 g_2$, $\cos g_1 g_2$, $\tan g_1 g_2$ durch trigonometrische Functionen von φ_1 und φ_2 aus.

d) Wie groß muss a sein, damit die Richtung $a : 10$ senkrecht sei zu der Richtung $5 : 3$?

13. Bestimmung des senkrechten Abstandes eines Punktes von einer Geraden. Der senkrechte Abstand t eines Punktes P von einer Geraden g (Fig. 66) sei von der Geraden zum Punkte gezählt. Wird also g von der Senkrechten aus P in dem Punkte P_t getroffen, so ist

$$t = P_t\, P.$$

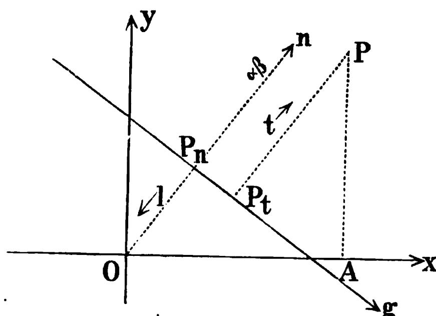


Fig. 66.

Wenn zwei Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, haben ihre Abstände entgegengesetzte Vorzeichen, daher ist es nöthig — etwa in der durch den Nullpunkt gelegten Normale n — die positive Richtung festzustellen. Dieses geschieht durch das Richtungsverhältnis a : b oder die daraus berechneten Richtungscoordinaten α, β der Normale.

Die Gerade g ist bestimmt durch die Normale n und den Punkt P_n, in dem sie von dieser getroffen wird, also wenn $P_n\, O = l$ gegeben, durch die Stücke α, β, l.

Projiciert man nun die Streckenzüge $O\, P_n\, P_t\, P$ und $O\, A\, P$, welche die gemeinsame Schlusslinie $O\, P$ haben, auf die Normale n und bedenkt, dass die Projectionen der Strecken $O\, P_n$ und $P_t\, P$ gleich sind den Strecken selbst, während $P_n\, P_t$ die Projection Null hat, so erhält man

$$O\, P_n + O + P_t P = O\, A \cos n\, x + A\, B \cos n\, y$$

oder

$$-l + t = x \,.\, \cos x\, n + y \cos y\, n,$$

mithin

$$t = \alpha x + \beta y + l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20$$

Diese Gleichung liefert den gesuchten Abstand der Größe und dem Vorzeichen nach, und zwar erscheint derselbe bei jenen Punkten positiv, die auf der Seite liegen, nach welcher durch die positive Normalenrichtung von P_n aus hingewiesen wird und welche kurzweg als die positive Seite der Geraden bezeichnet werden kann.

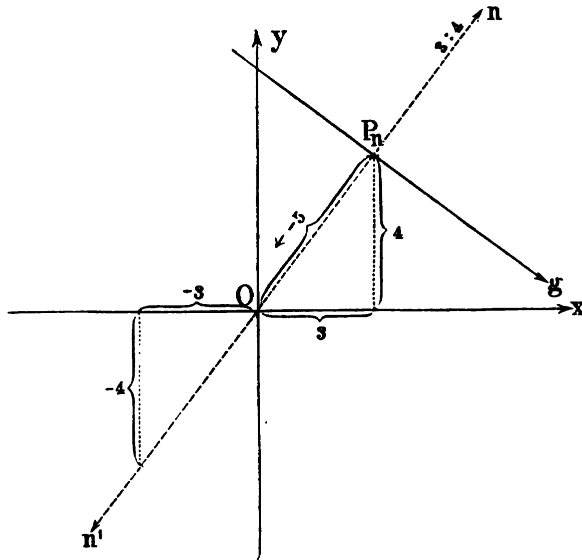
Beispiele und Aufgaben.

a. Eine Gerade sei durch n (3 : 4) und l $= -5$ gegeben; für dieselbe soll die Distanzformel aufgestellt und zur Berechnung der Abstände der Punkte $P_1\,(5, 9)$; $P_2\,(4, 3)$; $P_3\,(2, 1)$; $P_4\,(-3, -4)$ benützt werden. Durch das Richtungsverhältnis 3 : 4

ist die positive Richtung von n bestimmt (Fig. 67). Da $l = P_n O = -5$, ist $O P_n = 5$, also von O aus in der positiven Richtung aufzutragen. Wegen $\alpha = \frac{3}{5}$; $\beta = \frac{4}{5}$ findet man

$$t = \frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y - 5 = \frac{3x + 4y - 25}{5}$$

Fig. 67.



und

$$t_1 = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 9 - 25}{5} = 5{\cdot}2,$$

ebenso

$$t_2 = -0{\cdot}2;\ t_3 = -3;\ t_4 = -10.$$

Dieselbe Gerade ist offenbar auch durch $n'(-3:-4)$ und $l = 5$ bestimmt, nur dass die positive Normalenrichtung der früheren direct entgegengesetzt angenommen wurde. Nun ist $P_n O = 5$, daher $O P_n = -5$. Die Distanzformel

$$t' = \frac{-3x - 4y + 25}{5}$$

liefert jetzt für die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 dieselben Abstände, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen.

b) Die durch $n(-4:5)$ und $l = 7$ bestimmte Gerade zu construieren, ihre Distanzformel anzugeben und mit Hilfe derselben die Abstände der Punkte $P_1(5, 3)$; $P_2(3, -9)$; $P_3(-2, -11)$ zu berechnen. Welche Lage in Bezug auf die Gerade hat der Punkt $P_4\left(3, \frac{12 - 7\sqrt{41}}{5}\right)$?

c) Die Coordinaten des Punktes P_n sind $-l\alpha$ und $-l\beta$; jene des Punktes P_t sind $x-\alpha t$ und $y-\beta t$; warum?

d) Gegeben sei die Gerade g durch die Bestimmungsstücke $n(-12:5)$ und $l=7$. Man zeichne diese Gerade und ermittle den Punkt $P(x, y)$ welcher von ihr den Abstand $t=10$ hat. Wie viele Lösungen sind möglich? Wie groß ist x, wenn $y=-3$? Welche Coordinaten haben P_n und P_t in diesem Falle?

e) Setzt man $xn=\varphi$ und $OP_n=-l=p$, so kann t durch $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ und p ausgedrückt werden. Wie lautet dann die Distanzformel? Und wie für $\varphi=\frac{\pi}{6}$; $p=5$?

14. Geometrische Bedeutung der Gleichungen.

I. Die Aufgabe, einen Punkt P zu ermitteln, dessen Coordinaten x und y einer gegebenen Gleichung

$$f(x, y)=0$$

genügen, ist eine unbestimmte. Da nämlich eine Gleichung mit zwei Unbekannten unendlich viele Lösungen zulässt, existieren unendlich viele Punkte von der verlangten Eigenschaft, deren Vertheilung in der Ebene durch die Gleichung geregelt ist. Je nach ihrer Beschaffenheit kann die Gleichung $f(x, y)=0$ für irgend einen Wert von x einen Wert, aber auch zwei und mehr Werte von y ergeben, so dass im allgemeinsten Falle jedem der Werte $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ von x je n Werte $y'_1, y''_1, \ldots y^{(n)}_1; y'_2, y''_2, \ldots y^{(n)}_2; y'_3, y''_3, \ldots y^{(n)}_3; \ldots$ von y entsprechen, welche in die n Serien $y_1', y_2', y_3', \ldots; y_1'', y_2'', y_3'', \ldots; \ldots; y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, y_3^{(n)}, \ldots$ geordnet werden mögen. Bei den Gleichungen, welche in Betracht kommen, sind im allgemeinen zwei aufeinander folgende Werte y_k, y_{k+1} einer Serie umsoweniger von einander verschieden, je geringer der Unterschied der Werte x_k, x_{k+1} ist, zu welchen sie gehören, d. h. die Differenzen $y_{k+1}-y_k$ und $x_{k+1}-x_k$ werden — absolut genommen — gleichzeitig immer kleiner und verschwinden gleichzeitig. Mit ihnen nimmt aber auch der Abstand der entsprechenden Punkte $P_k P_{k+1}=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}$ ab, bis er Null wird und die Punkte zusammenfallen. Denkt man also die Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ derart angenommen, dass die auf der x-Axe durch dieselben festgelegten Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ dicht aufeinander folgen, so erscheinen auch die von ihnen mit irgend einer Serie zugehörigen Werte $y_1, y_2, y_3, \ldots$ bestimmten Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ dicht aneinander gereiht, bilden daher, wenn x eine stetige Folge von Werten durchläuft, die stetige Folge der Punkte einer Linie, welche aus so viel Theilen besteht, als Serien vorhanden sind. Zwischen dieser Linie und der Gleichung besteht ein Zusammenhang, welcher sich darin

äußert, dass jeder Punkt, dessen Coordinaten der Gleichung genügen, auf der Linie liegt und umgekehrt die Coordinaten eines jeden Punktes der Linie die Gleichung identisch erfüllen. Dieser Zusammenhang wird dadurch gekennzeichnet, dass man sagt, die Gleichung

$$f(x,y) = 0$$

stellt eine Linie vor. Die Construction der Linie aus der Gleichung erfolgt auf die Art, dass man hinreichend viele, nahe aneinander liegende Werte von x annimmt, die zugehörigen Werte von y berechnet, die entsprechenden Punkte einzeichnet und durch einen stetigen Zug verbindet.

Es kann auch vorkommen, dass für die Lage eines Punktes P das Gesetz in Worten ausgedrückt ist. Lässt sich dasselbe durch eine einzige Gleichung zwischen x und y darstellen, so ist der Ort des Punktes eine Linie, welche durch jenes Gesetz und auch durch die Gleichung charakterisiert erscheint.

Endlich kann der Fall eintreten, dass eine gezeichnet vorliegende Linie analytisch durch ihre Gleichung dargestellt werden soll. Dann nimmt man auf der Linie eine Anzahl hinreichend nahe aneinander liegender Punkte $P_1, P_2, \ldots P_m$ an, bestimmt deren Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_m$; $y_1, y_2, \ldots y_m$ durch Messung und untersucht, ob bei denselben nicht irgend ein Gesetz deutlich hervortritt, welches durch eine Gleichung ausgedrückt werden könnte. Ist dieses nicht der Fall, so muss man sich mit einer Annäherung begnügen, indem man

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)}y_2 + \\ + \ldots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}y_m$$

setzt. Die Linie, welche durch die Gleichung vorgestellt wird, fällt in den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_m$ mit der gegebenen Linie zusammen, wie man sich durch Einsetzung der Coordinaten überzeugen kann. Sie schließt sich zwischen P_1 und P_m der gegebenen Linie offenbar um so näher an, je größer m genommen wurde. Dieses Verfahren setzt voraus, dass die gegebene Linie von P_1 bis P_m stetig und endlich verlaufe; trifft dies nicht zu, so müssen einzelne Theile derselben auf die angegebene Art behandelt werden.

Wenn sich das Polynom der Gleichung

$$f(x,y) = 0$$

in mehrere Factoren $f_1(x,y), f_2(x,y), \ldots$ zerlegen lässt, die Gleichung also in der Form $f_1(x,y) \cdot f_2(x,y) \ldots = 0$ dargestellt werden kann, stellt sie die Gesammtheit der Linien vor, welche die Gleichungen

$$f_1(x, y) = 0,$$
$$f_2(x, y) = 0,$$
$$\vdots$$

repräsentieren, die nämlich erhalten werden, wenn man die einzelnen Factoren gleich Null setzt. Denn durch Einsetzung der Coordinaten eines Punktes, welcher auf irgend einer dieser Linien liegt, verschwindet der betreffende Factor, also auch das ganze Product; mithin genügen die Coordinaten eines jeden solchen Punktes der Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

und diese charakterisiert wirklich eine Gruppe von Linien. Dies gelangt bei der Construction dadurch zum Ausdruck, dass sich Serien von Punkten ergeben, welche verschiedenen Linien angehören.

Beispiele und Aufgaben.

a) Aus der Gleichung

$$x - 3y + 6 = 0$$

ergibt sich für die Werte $-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ von x nur die eine Serie: $-\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}, 5, \frac{16}{3}$ der Werte von y. Die Construction der entsprechenden Punkte zeigt, dass dieselben in einer Geraden liegen. Bekräftigt wird dieses durch die Thatsache, dass die Verbindungslinie von irgend zwei Punkten immer dieselbe Richtung 3 : 1 hat.

b) Die Gleichung

$$x^2 - y^2 + 2x + 6y = 0$$

liefert durch Auflösung

$$y = 3 \pm \sqrt{x^2 + 2x + 9},$$

also für jeden Wert von x zwei Werte von y. Den Werten $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ von x entsprechen die Serien

$$3 + \sqrt{12}, 6, 3 + \sqrt{8}, 6, 3 + \sqrt{12}, 3 + \sqrt{17}, 3 + \sqrt{24}, 3 + \sqrt{33}$$

und

$$3 - \sqrt{12}, 0, 3 - \sqrt{8}, 0, 3 - \sqrt{12}, 3 - \sqrt{17}, 3 - \sqrt{24}, 3 - \sqrt{33}.$$

der Werte von y. Durch Verbindung der entsprechenden Punkte ergeben sich zwei Äste der Curve, welche durch Berechnung neuer Punkte beiderseits bis in das Unendliche fortgesetzt zu denken sind.

c) Wenn ein Punkt P gesucht werden soll, dessen Abstand von der y-Axe gleich ist seinem Abstande von dem Punkte F (p, o) auf der x-Axe, so wird das ausgesprochene Gesetz durch die Gleichung

$$\overline{BP}^2 = FP^2$$

oder

$$x^2 = (x - p)^2 + y^2$$

dargestellt, aus welcher nach Reduction

$$y^2 - 2px + p^2 = 0$$

folgt. Also ist der Ort des Punktes eine Linie (bekanntlich eine Parabel, deren Leitlinie die y-Axe und deren Brennpunkt F ist).

d) Durch Messung wurden die Coordinaten einer Anzahl von Punkten einer Linie bestimmt: $P_1(1, 2)$; $P_2(2, 3)$; $P_3(3, 4)$; $P_4(4, 5)$; $P_5(5, 6)$.

Bei denselben tritt deutlich das Gesetz

$$y = x + 1$$

hervor.

e) Man construiere die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6 &= 0; \\ x^2 - 6y + 9 &= 0; \\ y^2 - 4x + 12 &= 0; \\ x^2 - 5x + 6 &= 0; \\ y^2 - 7y + 12 &= 0; \\ x^3 - 2x^2y - 4xy + 8y^2 + 4x - 8y &= 0 \end{aligned}$$

charakterisierten Linien.

f) Einen Punkt zu suchen, welcher von der x-Axe denselben Abstand hat wie von dem Punkte $F(0, 2)$.

g) Wo liegt der Punkt, dessen Abstand von dem Punkte $P_0(5, 3)$ gleich ist seinem senkrechten Abstande von der Geraden mit den Bestimmungsstücken $\alpha : \beta = 4 : 3$, $l = -3$ (Art. 13).

h) Bei einer gezeichnet vorliegenden Curve ergibt die Messung die Coordinaten der Punkte

$$P_1\left(1, \frac{1}{2}\right);\ P_2(2, 2);\ P_3\left(3, \frac{9}{2}\right);\ P_4(4, 8).$$

Man soll die Gleichung der Curve einmal durch Ergründung des zugrunde liegenden Gesetzes, ein andermal durch Benützung der im Texte gegebenen Formel aufstellen.

II. Ein Punkt P, dessen Coordinaten den zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 0 \\ \psi(x, y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

genügen sollen, muss auf jeder von den zwei Linien liegen, welche durch die Gleichungen repräsentiert werden, ist also ein Schnittpunkt dieser Linien. Daher stellen zwei Gleichungen eine Gruppe von Punkten beschränkter Anzahl, nämlich sämmtliche Schnittpunkte der durch sie

charakterisierten Linien vor. Die Coordinaten der Schnittpunkte werden durch Auflösung der Gleichungen erhalten. Sie können sich zum Theil oder alle imaginär ergeben.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichungen (das Gleichungssystem)

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 13 = 0 \\ 5x - y - 7 = 0 \end{array}\right\}$$

bestimmen einen einzigen Punkt $P_0(2, 3)$, weil sie nur eine Auflösung haben.

b) Das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{array}\right\}$$

stellt die Punkte $P_1(4, 3)$ und $P_2(3, 4)$ vor.

c) Man berechne die Coordinaten der Punkte, in welchen sich die Linien

$$\left.\begin{array}{l} 13x^2 + 10xy + 13y^2 - 52 = 0 \\ 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 52 = 0 \end{array}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 2xy - y^2 - 11 = 0 \\ 3x^2 + xy + 3y^2 - 33 = 0 \end{array}\right\}$$

schneiden. (Je vier Punkte.)

III. Wenn aus zwei gegebenen Gleichungen

$$f_1(x, y) = 0,$$
$$f_2(x, y) = 0$$

durch Multiplication mit den willkürlichen Factoren λ_1, λ_2 und darauffolgende Addition die neue Gleichung

$$\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) = 0$$

combiniert wird, so stellt diese eine Linie vor, welche durch sämmtliche Schnittpunkte der von den gegebenen Gleichungen repräsentierten Linien geht. Ist nämlich P_0 ein Schnittpunkt der letzteren, so hat man

$$f_1(x_0, y_0) = 0 \text{ und } f_2(x_0, y_0) = 0,$$

daher auch

$$\lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \lambda_2 f_2(x_0, y_0) = 0.$$

Dividiert man die combinierte Gleichung durch λ_1 und setzt $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\lambda$, so nimmt sie die Form

$$f_1(x, y) - \lambda f_2(x, y) = 0$$

an. Soll die ihr entsprechende Linie noch durch einen beliebigen Punkt $P_1(x_1, y_1)$ gehen, muss

$$f_1(x_1, y_1) - \lambda f_2(x_1, y_1) = 0$$

sein, woraus

$$\lambda = \frac{f_1(x_1, y_1)}{f_2(x_1, y_1)}$$

und durch Einsetzung dieses Wertes

$$f_1(x, y) - \frac{f_1(x_1, y_1)}{f_2(x_1, y_1)} \cdot f_2(x, y) = 0$$

oder

$$\frac{f_1(x, y)}{f_1(x_1, y_1)} - \frac{f_2(x, y)}{f_2(x_1, y_1)} = 0$$

als Gleichung einer Linie folgt, welche durch die Schnittpunkte von zwei Linien und durch einen gegebenen Punkt geht.

Lassen sich für drei Gleichungen

$$f_1(x, y) = 0; \; f_2(x, y) = 0; \; f_3(x, y) = 0$$

die Factoren λ_1, λ_2, λ_3 derart ermitteln, dass

$$\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) + \lambda_3 f_3(x, y) \equiv 0,$$

d. h. dass für jedes Wertepaar x, y der Ausdruck links verschwindet (identisch Null wird), so stellen die Gleichungen drei Curven vor, von welchen jede durch die Schnittpunkte der beiden anderen geht; denn es ist in diesem Falle

$$\lambda_1 f_1(x, y) \equiv -\left[\lambda_2 f_2(x, y) + \lambda_3 f_3(x, y)\right],$$

daher sind die Gleichungen

$$\lambda_1 f_1(x, y) = 0$$

und

$$-\left[\lambda_2 f_2(x, y) + \lambda_3 f_3(x, y)\right] = 0$$

identisch, also ist die Gleichung $f_1(x, y) = 0$ aus den Gleichungen $f_2(x, y) = 0$ und $f_3(x, y) = 0$ durch lineare Combination entstanden.

Beispiele und Aufgaben.

a) Wenn man die Gleichungen (II. Beisp. *a*)

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 13 &= 0 \\ 5x - y - 7 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

einmal mit Hilfe der Factoren $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$ ein anderes Mal mittelst der Factoren $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 2$ linear combiniert, erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 7x + 2y - 20 = 0 \\ 16x + 7y - 53 = 0 \end{array}\right\}$$

Die von diesen repräsentierten Linien gehen ebenso durch den Punkt P_0 (2, 3) wie die den gegebenen Gleichungen entsprechenden.

b) Durch die Schnittpunkte der Linien (II. Aufg. *c*)

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 - 52 = 0$$
$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 52 = 0$$

geht jede Linie, deren Gleichung die Form

$$(13x^2 + 10xy + 13y^2 - 52) - \lambda(13x^2 - 10xy + 13y^2 - 52) = 0$$

hat. Soll aber dieselbe durch den Punkt P_1 (2, 5) gehen, muss

$$13.4 + 10.2.5 + 13.25 - 52) - \lambda(13.4 - 10.2.5 + 13.25 - 52) = 0$$

oder

$$425\lambda - 225 = 0,$$
$$\lambda = \frac{425}{225} = \frac{17}{9}$$

sein, so dass sich die ganz bestimmte Gleichung

$$9(13x^2 + 10xy + 13y^2 - 52) - 17(13x^2 - 10xy + 13y^2 - 52) = 0$$

ergibt, welche nach Reduction die Form

$$26x^2 - 65xy + 26y^2 - 104 = 0$$

annimmt.

c) Die Linien, welche die Gleichungen

$$\begin{array}{l} 9x^2 + 5xy + 17y^2 + 3x + 15y + 7 = 0, \\ x^2 + 3y^2 + 2x + 3 = 0, \\ 3x^2 + 2xy + 5y^2 + 6y + 1 = 0 \end{array}$$

vorstellen, gehen durch dieselbe Gruppe von Punkten, denn es ist

$$2(9x^2 + 5xy + 17y^2 + 3x + 15y + 7) - 3(x^2 + 3y^2 + 2x + 3) -$$
$$- 5(3x^2 + 2xy + 5y^2 + 6y + 1) \equiv 0.$$

d) Man lege durch die Schnittpunkte der Linien (II. Aufg. *c*)

$$2x^2 - 2xy - y^2 - 11 = 0,$$
$$3x^2 + xy + 3y^2 - 33 = 0$$

eine Linie, welche durch den Punkt P_1 (— 3, 1) geht.

e) Es soll nachgewiesen werden, dass die Linien

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3 = 0, \\ 5x + 7y + 1 = 0, \\ 15x + 24y + 17 = 0 \end{array}$$

durch einen und denselben Punkt gehen. Welche Coordinaten hat dieser Punkt?

IV. Die Abhängigkeit der Coordinaten eines Punktes von einander kann mit Hilfe eines Parameters t durch zwei Gleichungen

$$x = \varphi(t) \text{ und } y = \psi(t)$$

dargestellt werden. Denn nimmt man für x irgend einen Wert an, so kann man aus der ersten Gleichung den zugehörigen Wert von t berechnen und in die zweite einsetzen, welche den entsprechenden Wert von y ergibt, und weil man dieses Verfahren unendlich oft wiederholen kann, erscheinen durch die zwei Gleichungen unendlich viele Punkte der Ebene festgelegt. Leitet man nun durch Elimination des Parameters t aus jenen Gleichungen die neue Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

ab, so drückt diese die zwischen x und y bestehende Beziehung direct aus, indem sie für jeden Wert von x denselben Wert von y liefert, welcher durch Vermittlung des Parameters t erhalten wurde. Die Gleichungen

$$x = \varphi(t); \; y = \psi(t)$$

stellen daher die Curve vor, welche durch die Eliminationsgleichung

$$f(x, y) = 0$$

charakterisiert ist.

Umgekehrt wieder ist der Übergang von einer Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

auf Parametergleichungen denkbar, indem man eine willkürlich gewählte Gleichung

$$F(x, y, t) = 0$$

hinzunimmt und dieses System nach x und y auflöst.

Parametergleichungen können sich durch Einfachheit und dadurch nützlich erweisen, dass sie die Construction der Punkte einer Linie erleichtern oder als Übergang bei der Aufstellung von Gleichungen aus den in Worten ausgesprochenen Gesetzen dienen.

Eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, t) = 0$$

repräsentiert eine Schar von Linien. Ertheilt man nämlich dem Parameter t die Werte $t_1, t_2, t_3, \ldots$ so erhält man die Gleichungen

$$F(x, y, t_1) = 0; \; F(x, y, t_2) = 0; \; F(x, y, t_3) = 0; \ldots,$$

von welchen jede eine Linie vorstellt. Die beiden Gleichungen

$$F_1(x, y, t) = 0; \; F_2(x, y, t) = 0$$

repräsentieren demnach zwei Scharen von Linien, die man so aufeinander beziehen kann, dass einer Linie der einen Schar eine Linie der anderen entspricht, wenn die Gleichungen beider Linien denselben Parameterwert enthalten. Zwei entsprechende Linien bestimmen einen Punkt (oder eine Gruppe von Punkten), nämlich ihren Schnittpunkt (Schnittpunkte) und der Gesammtheit aller Linienpaare entspricht eine Gesammt-

heit von Punkten, die alle einer neuen Linie angehören. Denn aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, t) = 0 \\ F_2(x, y, t) = 0 \end{array}\right\}$$

kann man

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}$$

berechnet denken u. s. w. Daher ist durch zwei Scharen von Linien, welche in der angegebenen Art aufeinander bezogen sind, eine neue Linie festgelegt, deren Gleichung durch Elimination des Parameters aus den Gleichungen der Scharen abgeleitet wird.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichungen (Art 10, I)

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + r\alpha \\ y = y_0 + r\beta \end{array}\right\},$$

für die Coordinaten der Punkte einer Geraden, welche durch den Punkt P_0 und ihre Richtungscoordinaten α, β gegeben ist, können als Parametergleichungen derselben mit r als Parameter angesehen werden; durch Elimination von r folgt

$$\frac{x - x_0}{\alpha} - \frac{y - y_0}{\beta} = 0.$$

b) Durch den Nullpunkt wird eine Gerade g gezogen und aus einem auf der x-Axe im Abstande 2 a vom Nullpunkte liegenden Punkt S die Senkrechte darauf gefällt. Der Schnittpunkt P der beiden beschreibt eine Linie, wenn sich g um O dreht. Setzt man $xg = \varphi$, so ist

$$OP = SP \cos xg = 2a \cos\varphi;$$

daher

$$x = OA = OP \cos\varphi = 2a\cos^2\varphi,$$

$$y = AP = OP \sin\varphi = 2a\cos\varphi \sin\varphi.$$

Also sind die Parametergleichungen der Linie

$$\left.\begin{array}{l} x = 2a\cos^2\varphi \\ y = 2a\cos\varphi\sin\varphi \end{array}\right\},$$

woraus durch Elimination des Parameters φ die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

folgt.

c) Die Gleichung

$$x^3 + axy + y^3 = 0$$

erfordert für die Berechnung zusammengehöriger Coordinatenwerte die umständliche Auflösung von Gleichungen 3. Grades. Setzt man aber $y = t \, . \, x$, so folgt daraus

$$x^3 + atx^2 + t^3x^3 = 0$$

und

$$x = -\frac{a\,t}{1 + t^3},$$

so dass sich die Parametergleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{a\,t}{1 + t^3} \\ y &= -\frac{a\,t^2}{1 + t^3} \end{aligned}\right\}$$

ergeben, durch welche sich zusammengehörige Coordinatenwerte leicht ermitteln lassen.

d) Die zwei von den Gleichnngen

$$2\,a\,x\cos^2\varphi + y^2 - 4\,a^2\cos^2\varphi = 0$$
$$2\,a\,x\sin^2\varphi - y^2 = 0$$

repräsentierten Scharen bestimmen eine Linie, deren Gleichung man durch die Elimination von φ erhält. Hiezu bestimmt man aus der ersten Gleichung

$$\cos^2\varphi = \frac{y^2}{4\,a^2 - 2\,a\,x}$$

und setzt in die zweite

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \frac{y^2}{4\,a^2 - 2\,a\,x}$$

ein. Nach gehöriger Reduction fließt daraus die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\,a\,x = 0.$$

Wenn man aber die Gleichungen addiert, so folgt

$$x = 2\,a\cos^2\varphi$$

und nach Einsetzung in die zweite

$$y = 2\,a\cos\varphi\sin\varphi,$$

aus welchen man durch Elimination von φ wieder

$$x^2 + y^2 - 2\,a\,x = 0$$

erhält. (Vgl. Aufgabe *a*).

e) Man suche aus den Parametergleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi \\ y &= b\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\cos\varphi} \\ y &= b\tan\varphi \end{aligned}\right\}$$

die Construction der durch sie repräsentierten Linien zu ermitteln und leite die gewöhnliche Gleichung derselben durch Elimination von φ ab.

f) Man berechne die Coordinaten jener Punkte der Curve

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \cos \varphi \\ y = 2 \sin \varphi \end{array}\right\},$$

für welche

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi.$$

g) Durch den Nullpunkt wird eine Gerade g unter dem Winkel $x g = \varphi$ gegen die x-Axe gezogen. Sie schneide die zu ihr Senkrechte und die zur y-Axe Parallele durch S (2 a, 0) in den Punkten M und Q. Nun mache man auf g die Strecke $OP = MQ$, wodurch ein Punkt P bestimmt wird. Es sollen die Parametergleichungen und die gewöhnliche Gleichung der Linie aufgestellt werden, welche P beschreibt, wenn sich g um O dreht.

h) Die Parametergleichungen der Linien

$$x^5 - 5x^2 + 2y^5 = 0,$$
$$y^4 - xy^3 - 2x^2y + x^3 = 0,$$
$$x^5y^4 - xy - x - 2 = 0$$

sollen derart ermittelt werden, dass je nach Zweckmäßigkeit $y = tx$ oder $y = \frac{t}{x}$ gesetzt wird.

i) Man ermittle die Gleichung der von den zwei Linienscharen

$$2a(x^2 + y^2) - t^2x - 3aty = 0,$$
$$tx - ay = 0$$

bestimmten Linie und stelle auch ihre Parametergleichungen auf (vgl. Aufg. *g*).

V. Eine Linie wird eine algebraische oder eine transcendente genannt, je nachdem ihre Gleichung eine algebraische oder transcendente ist.

Bei den Gleichungen wird die unentwickelte Form

$$f(x, y) = 0$$

von der entwickelten

$$y = \varphi(x) \text{ oder } x = \psi(y)$$

unterschieden. In der unentwickelten Form erscheint ein die Coordinaten enthaltender Ausdruck gleich Null gesetzt. Durch Auflösung nach y oder x ergibt sich die entwickelte Form. Die Auflösung ist aber oft undurchführbar, so dass durch die unentwickelte Form der allgemeinere Fall dargestellt erscheint. Eine algebraische Gleichung heißt geordnet, wenn ein geordneter algebraischer, ganzer, rationaler Ausdruck der Coordinaten gleich Null gesetzt ist. Kommt darin mindestens ein Glied vor, in welchem die Summe der Exponenten der Coordinaten gleich ist der ganzen positiven Zahl n, und kein Glied mit einer größeren Exponentensumme, so ist die Gleichung vom n^{ten} Grade.

Sie ist homogen vom Grade n, wenn in jedem Gliede die Summe der Exponenten n beträgt. Eine algebraische Linie ist von der n^{ten} Ordnung, wenn ihre Gleichung vom n^{ten} Grade ist.

Beispiele und Aufgaben.

a) Geordnete algebraische Gleichungen sind, und zwar vom 1. Grade:

$$ax + by + c = 0;$$

vom 2. Grade:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \quad axy + b = 0$$

u. s. w; vom 3. Grade:

$$ax^3 + bx^2y + cy^2 + dx + e = 0; \quad ax^2y + bxy^2 + cy + d = 0;$$

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} - 1 = 0; \quad 3x^3 + 6x^2y + 4xy^2 - y^3 = 0.$$

u. s. w.; vom 7. Grade:

$$ax^6y + bx^5y^2 + cx^4y^3 + dy^7 + cx^5 + fy + g = 0$$

u. s. w.

b) Transcendente Gleichungen sind:

$$a^{x+y} + bx + cy + d = 0; \quad ax^y + by^x + c = 0;$$

$$\log(x - y) + a(x^2 + y^2) + b = 0; \quad xy - m \,.\, \sin\frac{x}{y} = 0$$

u. s. w. in unentwickelter,

$$y = me^{\frac{x}{m}}; \quad y = e^{-x^2}; \quad y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right); \quad y = x\log x$$

$$y = a\sin x; \quad y = a\arctan x$$

u. s. w. in entwickelter Form.

c) Aus der unentwickelten Form

$$x^5 + ax^3y + by^2 + c = 0$$

lässt sich die entwickelte nur durch Auflösung nach y ableiten:

$$y = \frac{-ax^3 \pm \sqrt{a^2x^6 - 4b(x^5 + c)}}{b}.$$

d) Man ordne die Gleichung

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{x^2+y^2},$$

gebe ihren Grad und die nach y entwickelte Form an.

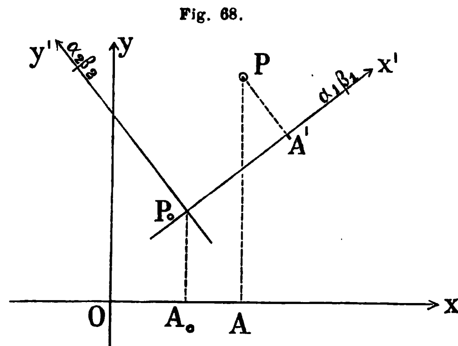
VI. Anmerkung. Den Betrachtungen über die geometrische Bedeutung der Gleichungen wurde das rechtwinkelige Coordinatensystem zugrunde gelegt, sie gelten indessen für jedes Coordinatensystem, wenn an die Stelle von x und y die betreffenden Coordinaten treten (und Gleichungen in Dreieckscoordinaten homogen sind).

Eine Gleichung stellt daher immer eine Linie vor, ob sie nun auf Parallelcoordinaten oder Polarcoordinaten u. s. w. bezogen sei, aber nicht dieselbe Linie; ja es

werden nicht einmal Linien derselben Gattung repräsentiert, wenn die Natur der Coordinatensysteme verschieden ist. Man versuche z. B. die Linien zu zeichnen, welche die Gleichungen $x + y - 6 = 0$; $r + \omega - 6 = 0$; $r_1 + r_2 - 6 = 0$ vorstellen, indem man die erste auf die Systeme Parallelcoordinaten mit $xy = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$; die zweite auf ein System Polarcoordinaten, die dritte auf ein System Bipolarcoordinaten mit $O_1 O_2 = 2e = 4$ bezieht (Art. 4, *a*, *b*, *c*), zusammengehörige Wertepaare berechnet, die Punkte construiert u. s. w.

15. Transformation der Coordinaten. Eine ebene Linie kann auf mehrere, in ihrer Ebene angenommene Coordinatensysteme bezogen, also durch verschiedene Gleichungen dargestellt werden. Je mehr ein Coordinatensystem der Gestalt einer Linie angepasst ist, desto deutlicher müssen deren Eigenschaften in der Gleichung zum Ausdruck gelangen; daher kann der Übergang von einem Coordinatensystem auf ein anderes das Mittel sein, die Eigenschaften einer Linie zu erforschen. Aus der Gleichung einer Linie in Bezug auf irgend ein Coordinatensystem kann jene in Bezug auf ein anderes, neues, dadurch abgeleitet werden, dass man die alten Coordinaten eines Punktes durch seine neuen ausdrückt und in die Gleichung einsetzt, wodurch sich eine Beziehung zwischen den neuen Coordinaten ergibt. Hiezu muss die Lage des neuen zum alten durch entsprechende Bestimmungsstücke präcisiert sein. Der Vorgang führt den Namen »Transformation der Coordinaten«. Im folgenden wird nur der Übergang von einem rechtwinkeligen auf ein zweites rechtwinkeliges Coordinatensystem behandelt.

Fig. 68.



In dem Coordinatensystem (x, y) sei (Fig. 68) der Punkt $P_0 (x_0, y_0)$ als Nullpunkt eines neuen Coordinatensystems (x', y') gegeben, dessen Axen x' und y' die Richtungscoordinaten α_1, β_1 und α_2, β_2 haben mögen. Zwischen den letzteren bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= 1 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (21$$

Bedenkt man, dass die alten Axen x und y in Bezug auf die neuen die Richtungscoordinaten α_1, α_2 und β_1, β_2 besitzen, so gelangt man auch zu den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 = 1\\ \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 = 1\\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (22$$

welche Folgen der Gleichungen 21 sind.

Ein Punkt P habe die alten Coordinaten x und y, die neuen x' und y'. Die Beziehungen zwischen beiden werden mittelst der Streckenzüge OAP und $OA_0P_0A'P$ gefunden, welche dieselbe Schlusslinie OP, also gleiche Projectionen auf irgend eine Gerade haben. Projiciert man dieselben einmal auf die x-Axe und ein anderesmal auf die y-Axe, so erhält man:

$$OA + 0 = OA_0 + 0 + P_0A' \cos xx' + A'P \cos xy',$$

$$0 + AP = 0 + A_0P_0 + P_0A' \cos yx' + A'P \cos yy'$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}x = x_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y'\\ y = y_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y'\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (23$$

Diese Gleichungen drücken die alten Coordinaten des Punktes P durch die neuen aus. Löst man sie nach x' und y' auf, indem man x_0 und y_0 auf die linke Seite schafft und beiderseits addiert, nachdem man mit α_1 und β_1 oder α_2 und β_2 multipliciert hat, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l}x' = \alpha_1(x - x_0) + \beta_1(y - y_0)\\ y' = \alpha_2(x - x_0) + \beta_2(y - y_0)\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24$$

für den Übergang von dem neuen Coordinatensystem auf das alte.

Specielle Fälle treten ein, wenn die neuen Axen den alten parallel sind oder wenn der neue Nullpunkt in den alten fällt.

Im ersten Falle ist zu unterscheiden, ob die Axen im gleichen, theilweise im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Ist $xx' = 0$; $yy' = 0$, so gehen die Gleichungen 23 und 24, weil $\alpha_1 = \beta_2 = 1$; $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, über in

$$\left.\begin{array}{l}x = x_0 + x'\\ y = y_0 + y'\end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (25$$

$$\left.\begin{array}{l}x' = x - x_0\\ y' = y - y_0\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26$$

Ist $xx' = \pi$; $yy' = 0$, so ergeben sich, weil $\alpha_1 = -1$; $\beta_2 = 1$; $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}x = x_0 - x'\\ y = y_0 + y'\end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l}x' = -x + x_0\\ y' = y - y_0\end{array}\right\}.$$

Ist aber $xx' = 0$; $yy' = \pi$, somit $\alpha_1 = 1$; $\beta_2 = -1$; $\alpha_2 = \beta_1 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + x' \\ y = y_0 - y' \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x' = \quad x - x_0 \\ y' = -y + y_0 \end{array}\right\},$$

endlich wenn $x x' = y y' = \pi$, also $\alpha_1 = \beta_2 = -1$; $\alpha_2 = \beta_1 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 - x' \\ y = y_0 - y' \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x' = -x + x_0 \\ y' = -y + y_0 \end{array}\right\}.$$

Im zweiten Falle ist $x_0 = y_0 = 0$ und man erhält die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28$$

die man auch benützen kann, um die Beziehungen zwischen den Richtungscoordinaten α, β und α', β' einer Richtung in den zwei Coordinatensystemen zu ermitteln. Da hier der neue Nullpunkt nicht in Betracht kommt, sondern bloß die Richtungen der neuen Axen maßgebend sind, ergeben sich diese Beziehungen, wenn man den Punkt P mit dem Einheitspunkte Π der Richtung zusammenfallen lässt, wodurch die Gleichungen 27 und 28 übergehen in

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 \alpha' + \alpha_2 \beta' \\ \beta = \beta_1 \alpha' + \beta_2 \beta' \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = \alpha_1 \alpha + \beta_1 \beta \\ \beta' = \alpha_2 \alpha + \beta_2 \beta \end{array}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30$$

Wie man sieht, sind immer die Coordinaten des einen Systems durch die des anderen in linearer Weise ausgedrückt. Der Grad einer algebraischen Gleichung kann daher durch eine Transformation nicht zunehmen. Aber er kann auch nicht abnehmen, indem sich etwa die Glieder mit der höchsten Exponentensumme gegenseitig tilgen. Denn würde man in diesem Falle zurücktransformieren, so müsste der Grad der Gleichung dadurch wieder erhöht werden, was nicht möglich ist.

Wendet man die Transformationsformeln 23 auf die Endpunkte der Strecke $P_1 P_2$ an, so erhält man durch Subtraction

$$x_2 - x_1 = \alpha_1 (x'_2 - x'_1) + \alpha_2 (y'_2 - y'_1);$$
$$y_2 - y_1 = \beta_1 (x'_2 - x'_1) + \beta_2 (y'_2 - y'_1);$$

demnach

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2,$$

d. h. es ergibt sich immer dieselbe Streckenlänge, ob man dieselbe aus den alten oder aus den neuen Coordinaten berechnet. Damit ist nachgewiesen, dass die Gestalt einer

Linie durch die Transformation ihrer Gleichung nicht geändert wird, weil alle ihre Ausmaßen ungeändert bleiben.

Nach vollführter Transformation einer Gleichung kann man die Strichweiser auch weglassen und sich bloß merken, auf welches System sie nun bezogen ist.

Beispiele und Aufgaben.

a) Wenn der Übergang von dem Coordinatensystem (x, y) auf ein neues geschehen soll, welches gegeben ist durch P_0 (5, 3); x' (2 : — 1); y' (1 : 2), so sind die Transformationsgleichungen

$$x = 5 + \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y';$$
$$y = 3 - \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'.$$

Die Gleichung

$$5 x^2 + 8 y^2 + 4 x y - 62 x - 68 y + 221 = 0$$

geht nach Einsetzung (und Weglassung der Strichweiser) über in

$$4 x^2 + 9 y^2 - 36 = 0.$$

Wäre aber die Gleichung

$$4 x'^2 + 9 y'^2 - 36 = 0$$

bezogen auf (x', y') gegeben, so wird dieselbe auf (x, y) transformiert mittelst der Gleichungen

$$x' = \frac{2}{\sqrt{5}} (x - 5) - \frac{1}{\sqrt{5}} (y - 3);$$
$$y' = \frac{1}{\sqrt{5}} (x - 5) + \frac{2}{\sqrt{5}} (y - 3).$$

Für eine durch die Richtungscoordinaten $\alpha = \frac{3}{5}$; $\beta = \frac{4}{5}$ gegebene Richtung findet man die neuen Richtungscoordinaten:

$$\alpha' = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5\sqrt{5}};$$
$$\beta' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{5\sqrt{5}},$$

welche der Grundgleichnng $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$ genügen.

b) Ist das neue Coordinatensystem durch seinen Nullpunkt P_0 und den Winkel $x x' = \varphi$ gegeben, so ist unter der Voraussetzung, dass $x' y' = \frac{\pi}{2}$:

$$\alpha_1 = \cos\varphi;\ \beta_1 = \sin\varphi;\ \alpha_2 = -\sin\varphi;\ \beta_2 = \cos\varphi;$$

die Transformationsgleichungen sind nun

$$x = x_0 + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = y_0 + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi;$$

und speciell für $P_0\,(4, 8)$; $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ hat man $\cos\varphi = 0$; $\sin\varphi = -1$, also

$$x = 4 + y';$$
$$y = 8 - x'.$$

Die Anwendung dieser Transformationsgleichungen führt die Gleichung

$$x^2 - 8x + 2y = 0$$

über in

$$y^2 - 2x = 0.$$

c) Man stelle die Transformationsgleichungen für den Übergang zum Coordinatensystem $P_0\,(1, 1)$; $x'\,(4 : 3)$; $y'\,(-3 : 4)$ auf und transformiere die Gleichung

$$y^2 - 4x = 0;$$

ferner berechne man α und β, wenn $\alpha' : \beta' = 1 : 1$.

d) Man transformiere die Gleichung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

auf parallele Coordinaten mit dem Nullpunkte P_0 unter Berücksichtigung der vier möglichen Fälle.

e) Die Gleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$$

soll auf das neue Coordinatensystem transformiert werden, welches man durch Drehung des alten um einen rechten Winkel erhält.

f) Man transformiere die Gleichung

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

auf ein neues Coordinatensystem, welches sich durch Drehung des alten um einen beliebigen Winkel φ ergibt.

2. Abschnitt.

Gerade und Punkt.

16. Linien erster Ordnung. Die Gleichung 1. Grades

$$ax + by + c = 0$$

stellt eine Linie erster Ordnung vor, deren Beschaffenheit durch folgende

Betrachtung ergründet werden kann. Es sei P_0 ein fester Punkt der Linie, also

$$a x_0 + b y_0 + c = 0;$$

durch Subtraction ergibt sich

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

und man erkennt, dass die Richtung

$$(x - x_0) : (y - y_0)$$

der Verbindungslinie des Punktes P_0 mit einem beliebigen Punkte P der Linie senkrecht ist zu einer bestimmten, durch das Coëfficientenverhältnis

$$a : b$$

gegebenen Richtung. Daher liegt P und folglich jeder Punkt der betrachteten Linie in der durch P_0 gelegten Senkrechten zu der Richtung a : b.

Demnach ist die Linie erster Ordnung, welche durch die Gleichung

$$a x + b y + c = 0$$

repräsentiert wird, mit einer Geraden identisch, deren Normale die Richtung a : b oder die Richtungscoordinaten

$$\alpha = \frac{a}{\rho}; \ \beta = \frac{b}{\rho};$$
$$(\rho = \sqrt{a^2 + b^2})$$

besitzt.

Ferner ist

$$c = -(a x_0 + b y_0) = -\rho(\alpha x_0 + \beta y_0),$$

also, weil $\alpha x_0 + \beta y_0$ die Projection $O P_n$ des Streckenzuges $O A_0 P_0$ oder seiner Schlusslinie $O P_0$ auf die in den Nullpunkt verlegte Normale der Geraden vorstellt (Vgl. Art. 13),

$$c = -\rho \,.\, O P_n = \rho \,.\, P_n O = \rho \,.\, l$$

und

$$l = \frac{c}{\rho}.$$

Man verschafft sich mithin die Bestimmungsstücke α, β, l einer Geraden, indem man die Coëfficienten a, b, c ihrer Gleichung durch $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ dividiert; die Gleichung 20:

$$t = \alpha x + \beta y + l$$

für den Abstand eines Punktes von einer Geraden geht über in

$$t = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{g}{\rho} \quad \ldots \ldots \quad (31$$

Die positive Richtung einer durch ihre Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

gegebenen Geraden g soll derart angenommen werden, dass dieselbe zu der positiven Richtung $a : b$ der Normale n in dieselbe Beziehung gelangt, wie die positive Richtung der x-Axe zu jener der y-Axe, dass also $gn = \frac{\pi}{2}$. Dann ist das Richtungsverhältnis der Geraden (vgl. Art. 6, Gl. 4) $b : -a$ und ihre Richtungscoordinaten sind $\frac{b}{\rho}$ und $-\frac{a}{\rho}$.

Sind mehrere Geraden von einander zu unterscheiden, sollen dieselben mit $g_1, g_2, \ldots g_i, \ldots$ bezeichnet werden, wenn sie durch die Gleichungen $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$; $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$; $\ldots$ $a_i x + b_i y + c_i = 0$; $\ldots$ dargestellt erscheinen und für diese auch die Abkürzungen $g_1 = 0$; $g_2 = 0$; $\ldots$ $g_i = 0$ $\ldots$ in Anwendung kommen.

Die Substitution der Coordinaten des Punktes P_k in das Trinom g_i möge symbolisch durch g_{ik} ausgedrückt werden. Je nachdem $g_{ik} = 0$ oder $g_{ik} \gtrless 0$, liegt der Punkt P_k auf der Geraden g_i oder er liegt nicht darauf.

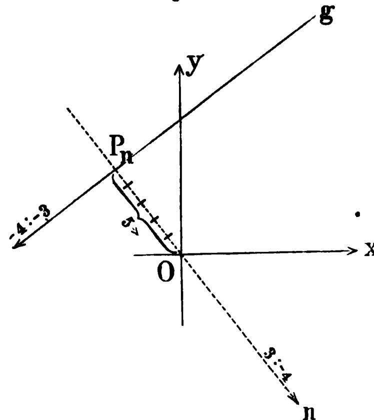
Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$3x - 4y + 25 = 0$$

stellt eine Gerade vor, deren Normale die Richtung $3 : -4$, die also selbst die positive Richtung $-4 : -3$ besitzt. Man findet $l = P_n O = \frac{25}{5} = 5$, daher $OP_n = -l = -5$ und kann die Gerade construieren, indem man ihre Normale mit dem Richtungsverhältnis $3 : -4$ zieht, darauf von O aus -5 aufträgt und in dem erhaltenen Punkte P_n eine Senkrechte errichtet (Fig. 69).

Fig. 69.



Die Distanzformel ist

$$t = \frac{3x - 4y + 25}{5}.$$

Die Punkte P_1 (2, 5); P_2 (— 3, 4); P_3 (1, 9) haben die Abstände

$$t_1 = \frac{6 - 20 + 25}{5} = \frac{11}{5};\ t_2 = \frac{-9 - 16 + 25}{5} = 0;$$

$$t_3 = \frac{3 - 36 + 25}{5} = -\frac{8}{5}.$$

Multipliciert man mit -1, so ändert die Gleichung dadurch nur die Form und wird

$$-3x + 4y - 25 = 0,$$

stellt aber dieselbe Gerade vor. Jedoch ist nun $-3:4$ die positive Normalenrichtung; $l = -\frac{25}{5}$ erhält das entgegengesetzte Vorzeichen und als Distanzformel ergibt sich

$$t' = \frac{-3x + 4y - 25}{5} = -\frac{3x - 4y + 25}{5} = -t.$$

b) Man construiere die Geraden

$$\pm 5x \pm 12y \pm 39 = 0;$$
$$\pm 12x \pm 5y \pm 52 = 0$$

unter Zugrundelegung aller möglichen Vorzeichencombinationen, gebe ihre Richtungen und Distanzformeln an. Ferner bestimme man die Abstände der Punkte $P_1(5, 3)$; $P_2(-5, 3)$; $P_3(-5, -3)$; $P_4(5, -3)$ von jenen Geraden, und die Coordinaten der Punkte P_n und P_{lt}.

c) Man construiere die Geraden

$$5x - 2y = 0;\ 3x + 5 = 0;\ 5y - 8 = 0$$

u. s. w. wie sub Aufg. *b*).

17. Verschiedene Formen der Gleichungen von Geraden. Wenn die Coëfficienten der allgemeinen Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

specielle Werte annehmen oder theilweise Null werden, ferner wenn Geraden durch besondere Bedingungen gegeben sind, treten besondere Gleichungsformen auf, deren Kenntnis bei den Untersuchungen der analytischen Geometrie vortheilhaft verwertet werden kann.

I. Dividiert man in der Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

durch $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ und bedenkt, dass $\frac{a}{\rho} = \alpha$; $\frac{b}{\rho} = \beta$; $\frac{c}{\rho} = l$ (Art. 16), so nimmt sie die Form

$$\alpha x + \beta y + l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32$$

an, welche die »Normalform« genannt wird und eine wichtige Rolle spielt. Sie spricht aus, dass jeder Punkt, welcher auf der Geraden liegt, von dieser den Abstand Null hat. Liegt aber ein Punkt nicht auf der Geraden, so ergibt sich durch Substitution seiner Coordinaten in das Gleichungstrinom eine von Null verschiedene Zahl, welche den senkrechten Abstand des Punktes von der Geraden darstellt.

Die Gleichungen der Geraden $g_1, g_2, \ldots g_i, \ldots$ in der Normalform mögen künftig abgekürzt durch $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, ... $n_i = 0$, ... dargestellt werden, so dass

$$n_i \equiv \alpha_i x + \beta_i y + l_i \equiv \frac{g_i}{\rho_i}; \; n_{ik} \equiv \frac{g_{ik}}{\rho_i}.$$

II. Wenn Coëfficienten der allgemeinen Gleichung verschwinden, ergeben sich specielle Formen, die keiner näheren Erklärung bedürfen:

$ax + by = 0$; Gerade durch den Nullpunkt;

$ax + c = 0$; Parallele zu der y-Axe im Abstande $-\frac{c}{a}$;

$by + c = 0$; Parallele zu der x-Axe im Abstande $-\frac{c}{b}$;

$x = 0$; y-Axe;

$y = 0$; x-Axe.

Anmerkung. Ist $a = b = 0$ aber $c \gtrless 0$, so ist $\rho = 0$ und

$$l = \frac{c}{\rho} = \frac{c}{0} = \infty,$$

mithin die Gerade in das Unendliche gerückt.

Die unendlich ferne Gerade der Ebene wird also durch die paradox scheinende Gleichungsform

$$c = 0 \quad \text{(Constante} = 0)$$

dargestellt, die man aber zu

$$0 . x + 0 . y + c = 0$$

vervollständigt denken kann, um zu erkennen, dass ihr nur unendlich große Coordinatenwerte genügen können. Als Übergang hiezu kann man sich a und b gegen c sehr klein vorstellen. Die Kenntnis dieser Form vermag manche Thatsachen zu erklären, die sonst nicht leicht zu erklären sind. In dem System der Dreieckscoordinaten, welches allgemeiner und vollkommener als jenes der Parallelcoordinaten ist (vgl. Art. 4, *d*), wird die unendlich ferne Gerade durch eine Gleichung repräsentiert, welche sich der Form nach von den Gleichungen anderer Geraden nicht unterscheidet.

III. Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt P_0 geht und die Richtung $a : b$ hat, wird auf folgende Art aufgestellt: Ist P ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist ihre Richtung auch durch das Verhältnis $(x - x_0) : (y - y_0)$ gegeben, also hat man

$$(x - x_0) : (y - y_0) = a : b$$

oder

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33$$

Dabei können unter a und b auch die Richtungscoordinaten α und β verstanden sein.

IV. Die Verbindungslinie der Punkte P_1 und P_2 kann als eine Gerade aufgefasst werden, welche durch P_1 oder P_2 geht und die Richtung $(x_2 - x_1) : (y_2 - y_1)$ hat. Daraus folgen die Gleichungsformen

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} &= \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34$$

Eine andere Gleichungsform geht aus dem Umstande hervor, dass die Fläche des Dreieckes $P P_1 P_2$ verschwindet, wenn P auf $P_1 P_2$ liegt. Dann ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35$$

Von dieser Form kann man auf die vorhergehende gelangen, wenn man in der Determinante die erste Zeile durch Subtraction der zweiten oder dritten Zeile transformiert u. s. w.

V. Schneidet eine Gerade auf den Coordinatenaxen die Stücke a und b ab, so geht sie durch die Punkte $P_1 (a, 0)$ und $P_2 (0, b)$. Mithin ist ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man in der Determinante die erste Colonne durch a, die zweite durch b dividiert:

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile und Multiplication mit -1 erhält man

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36$$

VI. Wenn eine Gerade durch den Punkt P_0 geht, und ihre Normale die Richtung $a : b$ hat, so findet man ihre Gleichung mit Hilfe eines beliebigen auf ihr liegenden Punktes P. Dann sind nämlich die Richtungen $(x - x_0) : (y - y_0)$ und $a : b$ senkrecht zu einander, also

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37$$

Unter a und b können auch die Richtungscoordinaten α und β verstanden sein.

VII. Oft wird eine Gerade durch die Gleichung

$$y = mx + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38$$

dargestellt gefunden.

Durch Umformung ergibt sich

$$\frac{x}{1} = \frac{y - b}{m},$$

d. h. diese Gerade geht (III) durch den Punkt P_0 (0, b) auf der y-Axe und hat die Richtung 1 : m, so dass $\tan xg = m$.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Normalformen der Gleichungen

$$3x - 5y - 9 = 0;$$
$$-2x + 7y = 0$$

sind

$$\frac{3}{\sqrt{34}}x - \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{9}{\sqrt{34}} = 0;$$
$$-\frac{2}{\sqrt{53}}x + \frac{7}{\sqrt{53}}y = 0.$$

b) Die Gerade

$$3x - 5y = 0$$

geht durch den Nullpunkt. Aus der umgeformten Gleichung

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$$

erkennt man, dass die Gerade die Richtung 5 : 3 hat (III) oder dass sie den Nullpunkt mit dem Punkte P_0 (5, 3) verbindet (IV).

Die Gleichungen

$$x - 3 = 0,$$
$$3y + 7 = 0$$

stellen Parallele zur y- und x-Axe vor, in den Abständen 3 und $-\frac{7}{3}$.

c) Die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2, welche durch den Punkt P_0 (7, 3) gehen und von welchen die erste die Richtung 2 : 3 hat, während die zweite auf dieser Richtung senkrecht steht, sind:

$$g_1 \ldots \frac{x - 7}{2} = \frac{y - 3}{3};$$
$$g_2 \ldots 2(x - 7) + 3(y - 3) = 0$$

oder geordnet

$$g_1 \ldots 3x - 2y - 15 = 0;$$
$$g_2 \ldots 2x + 3y - 23 = 0.$$

d) Die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2, von welchen die erste die Punkte $P_1(1, 1)$; $P_2(4, 3)$ verbindet, die zweite die Axenabschnitte 8 und 5 hat, sind

$$g_1 \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} \text{ oder } \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{2};$$

$$g_2 \ldots \frac{x}{8} + \frac{y}{5} - 1 = 0;$$

oder geordnet

$$g_1 \ldots 2x - 3y + 1 = 0;$$
$$g_2 \ldots 5x + 8y - 40 = 0.$$

Die Gleichung von g_1 kann auch noch in der Form

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt werden.

Die Gleichung

$$y = x - 5$$

stellt eine Gerade vor, welche die y-Axe im Abstande -5 vom Nullpunkte schneidet und die Richtung $1:1$ hat, so dass $\tan xg = 1$; $xg = \frac{\pi}{4}$.

e) Man stelle die Gleichung der Geraden auf, welche

α) durch den Nullpunkt geht und die Richtung $2:1$ hat;

β) den Nullpunkt mit dem Punkte $P_0(7, 13)$ verbindet;

γ) durch den Punkt $P_0(2, 3)$ geht, die Richtung $8:7$ oder die Normalenrichtung $11:12$ hat, oder außer P_0 noch den Punkt $P_1(-6, -2)$ enthält;

δ) auf den Axen die Stücke $-\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$ abschneidet.

In allen Fällen ordne man und gebe Normalform und Distanzformel an.

f) Wie lauten die Gleichungen der Geraden, welche durch den Punkt P_0 gehen und von welchen die eine parallel ist zu der Geraden P_1P_2, die andere dazu senkrecht, und wie speciell für die Punkte

$$P_0(-3, 2);\ P_1(-2, -7);\ P_2(2, -13)?$$

g) Die Gleichungen der Winkelhalbierenden der in den Nullpunkt verlegten Richtungen g_1 und g_2, ferner die Gleichungen der Verbindungslinie der Einheitspunkte Π_1 und Π_2 aufzustellen, und zwar allgemein oder für die Richtungen $-2:3$ und $-5:6$. Die Normalformen der Gleichungen anzugeben.

h) Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche

α) die Normalenrichtung $5:8$ und $l = 4$;

β) die Richtung $5:8$ und $l = 4$ hat;

γ) mit der x-Axe den Winkel $xg = \varphi$ bildet, während der Nullpunkt den Abstand $-p$ von ihr hat; hier auch speciell für $\varphi = \frac{\pi}{6}$ und $p = 5$.

In jedem Falle die Normalform der Gleichung anzugeben.

i) Man untersuche die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -l\alpha & -l\beta & 1 \\ \beta & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

auf ihre geometrische Bedeutung.

k) Man stelle die Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke $P_1 P_2$ auf, allgemein oder für den Fall, dass die Strecke von den Punkten $P_1(1, 5)$; $P_2(7, 3)$ begrenzt ist.

18. Winkel von zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden. Die positiven Richtungen der Normalen n_1 und n_2 zweier Geraden g_1 und g_2 bilden den Winkel $n_1 n_2$, welcher gleich ist dem Winkel $g_1 g_2$ der positiven Richtungen der Geraden selbst. Sind daher

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0;$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

die Gleichungen der Geraden, also $a_1 : b_1$ und $a_2 : b_2$ die Richtungsverhältnisse ihrer Normalen, so findet man (Art. 12, Gl. 18)

$$\left.\begin{aligned} \cos n_1 n_2 = \cos g_1 g_2 &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\rho_1 \rho_2} \\ \sin n_1 n_2 = \sin g_1 g_2 &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\rho_1 \rho_2} \\ \tan n_1 n_2 = \tan g_1 g_2 &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (39$$

$$(\rho_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2};\ i = 1, 2).$$

Specielle Fälle treten ein, wenn die Geraden zu einander senkrecht oder parallel sind. Im ersten Falle ist $\cos g_1 g_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, also

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40$$

im zweiten $\sin g_1 g_2 = \sin 0 = 0$, mithin

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

oder

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

was auch direct einzusehen ist. Setzt man $a_2 = m a_1$ und $b_2 = m b_1$, so geht die Gleichung

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

nach Division mit m über in

$$a_1 x + b_1 y + \frac{c_2}{m} = 0,$$

d. h. Gleichungen paralleler Geraden können auf die Form gebracht werden, dass sie sich nur durch die constanten Glieder ihrer Polynome unterscheiden.

Will man auch entgegengesetzt parallele Geraden berücksichtigen, so muss zum Ausdruck kommen, dass die Normalen entgegengesetzte Richtungen haben, daher stellen die Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0;$$

$$- a_1 x - b_1 y - \frac{c_2}{m} = 0$$

entgegengesetzt parallele Geraden vor.

Die Mittellinie der gleichsinnig parallelen Geraden $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ ergibt sich durch folgende Betrachtung: Ist P ein Punkt derselben, so sind dessen Abstände $\frac{g_1}{\rho_1}$ und $\frac{g_2}{\rho_2}$ von den beiden Geraden entgegengesetzt gleich, also

$$\frac{g_1}{\rho_1} + \frac{g_2}{\rho_2} = 0.$$

Da aber $\rho_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = m \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = m \,.\, \rho_1$, ist für einen Punkt der Mittellinie

$$g_1 + \frac{g_2}{m} = 0$$

und weil $m = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$, erhält man die zwei Formen ihrer Gleichung:

$$\frac{g_1}{a_1} + \frac{g_2}{a_2} = 0;$$

$$\frac{g_1}{b_1} + \frac{g_2}{b_2} = 0.$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Für die Geraden

$$g_1 \ \dots \quad 3x + 5y + 8 = 0,$$
$$g_2 \ \dots \ -2x + 7y + 3 = 0$$

ist

$$\cos g_1 g_2 = \frac{-6 + 35}{\sqrt{34 \,.\, 53}} = \frac{29}{\sqrt{34 \,.\, 53}};$$

$$\sin g_1 g_2 = \frac{21 + 10}{\sqrt{34 \,.\, 53}} = \frac{31}{\sqrt{34 \,.\, 53}};$$

$$\tan g_1 g_2 = \frac{31}{29}.$$

b) Bei den Geraden

$$g_1 \ldots \quad x + 2y - 7 = 0;$$
$$g_2 \ldots -2x + 6y + 3 = 0$$

ist

$$\cos g_1 g_2 = \sin g_1 g_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \tan g_1 g_2 = 1,$$

also

$$g_1 g_2 = \frac{\pi}{4}.$$

c) Wenn die Geraden

$$2x - 3y + 5 = 0;$$
$$ax - 4y + 7 = 0$$

zu einander senkrecht sein sollen, muss

$$2a + 12 = 0, \text{ also } a = -6 \text{ sein.}$$

d) Für die Geraden

$$g_1 \ldots y = m_1 x + b_1,$$
$$g_2 \ldots y = m_2 x + b_2$$

ist, weil deren Normalen die Richtungen $m_1 : -1$ und $m_2 : -1$ haben

$$\tan g_1 g_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 + 1}.$$

Die Geraden sind zu einander senkrecht, wenn

$$\tan g_1 g_2 = \tan \frac{\pi}{2} = \infty,$$

also

$$m_1 m_2 + 1 = 0$$

oder

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

e) Eine Parallele der Geraden

$$ax + by + c = 0$$

hat die Gleichung

$$ax + by + c' = 0.$$

Soll sie noch durch den Punkt P_0 gehen, so ist

$$ax_0 + by_0 + c' = 0; \quad c' = -(ax_0 + by_0)$$

und ihre Gleichung wird

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Man löse diese Aufgabe auch nach Art. 17, VI.

f) Eine Parallele der Geraden

$$\alpha x + \beta y + l = 0$$

hat die Gleichung (in der Normalform)

$$\alpha x + \beta y + l' = 0.$$

Soll der Punkt P_0 von ihr den Abstand t_0 besitzen, so muss

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + l' = t_0$$

und

$$l' = t_0 - \alpha x_0 - \beta y_0$$

sein. Daher nimmt die Gleichung der Parallelen die Form

$$\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + t_0 = 0$$

an.

g) Den Winkel der Geraden

$$3x + y + 9 = 0;$$
$$6x - 3y - 7 = 0$$

zu bestimmen.

h) Durch den Punkt P_0 (5, 2) soll eine Parallele und eine Senkrechte zu der Geraden

$$2x - 3y + 11 = 0$$

gelegt werden.

i) Man stelle die Gleichungen der Geraden auf, welche parallel sind zu der Geraden mit den Axenabschnitten 4 und 3 und von welchen der Punkt P_0 (— 3, — 7) die Abstände 3 und — 3 hat; ferner bestimme man die Mittellinie dieser zwei Geraden.

k) In welcher Beziehung stehen die Geraden

$$ax + by + c \pm k = 0$$

zu der Geraden

$$ax + by + c = 0?$$

Die Mittellinie der parallelen Geraden

$$ax + by + c_1 = 0;$$
$$ax + by + c_2 = 0$$

hat die Gleichung

$$ax + by + \frac{c_1 + c_2}{2} = 0;$$

warum?

19. Schnittpunkt zweier Geraden. Für die Lösung der Aufgabe. die Coordinaten des Schnittpunktes von zwei Geraden zu berechnen, können sich verschiedene Methoden zweckmäßig erweisen, je nach der Art, wie dieselben gegeben sind. Die möglichen Fälle lassen sich auf drei Typen zurückführen.

I. Die Gerade g_1 sei durch den Punkt P_1 und ihre Richtungscoordinaten α_1, β_1, die Gerade g_2 durch ihre Gleichung $g_2 = 0$ gegeben.

Ist r der Abstand des Schnittpunktes P_s beider Geraden von P_1, so hat dieser als Punkt der Geraden g_1 die Coordinaten

$$x_s = x_1 + r\alpha_1,$$
$$y_s = y_1 + r\beta_1.$$

Als Punkt der Geraden g_2 muss er aber durch seine Coordinaten deren Gleichung befriedigen; dadurch erhält man die Gleichung

$$a_2(x_1 + r\alpha_1) + b_2(y_1 + r\beta_1) + c_2 = 0,$$

aus welcher man

$$r = -\frac{a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2}{a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1} = -\frac{g_{21}}{\gamma_{21}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41$$

findet, wenn man zur Abkürzung Zähler und Nenner durch die leicht verständlichen Symbole g_{21} und γ_{21} darstellt. Mit Benützung dieses Wertes von r ergibt sich nun

$$\left.\begin{aligned} x_s &= x_1 - \frac{g_{21}}{\gamma_{21}}\alpha_1 \\ y_s &= y_1 - \frac{g_{21}}{\gamma_{21}}\beta_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41^{I}$$

II. Um den Schnittpunkt P_s der Geraden $P_1 P_2$ mit der durch ihre Gleichung gegebenen Geraden g_0 zu ermitteln, nimmt man an, derselbe habe in Bezug auf P_1 und P_2 das Theilverhältnis λ. Dann sind seine Coordinaten

$$x_s = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda};$$

$$y_s = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Weil aber P_s auch auf g_0 liegt, müssen die Coordinaten x_s und y_s der Gleichung $g_0 = 0$ genügen; man erhält also

$$a_0 \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + b_0 \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} + c_0 \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} = 0$$

und daraus

$$\lambda = \frac{a_0 x_1 + b_0 y_1 + c_0}{a_0 x_2 + b_0 y_2 + c_0} = \frac{g_{01}}{g_{02}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42$$

demnach durch Einsetzung dieses Wertes und Wegschaffung der Theilbrüche

$$\left.\begin{aligned} x_s &= \frac{g_{02} x_1 - g_{01} x_2}{g_{02} - g_{01}} \\ y_s &= \frac{g_{02} y_1 - g_{01} y_2}{g_{02} - g_{01}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42^{I}$$

III. Wenn die Geraden g_1 und g_2 beide durch ihre Gleichungen gegeben sind, müssen die Coordinaten des Schnittpunktes P_s jeder Gleichung genügen, sind also die gemeinsamen Auflösungen der Gleichungen der zwei Geraden. Aus diesen findet man mittelst der Hilfscoëfficienten a_3, b_3, c_3:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0;$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0;$$
$$\cdots\quad\cdots\cdots$$
$$a_3 \qquad b_3 \qquad c_3$$

$$x_s = \frac{A_3}{C_3};\ y_s = \frac{B_3}{C_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43$$

Der aus O nach P_s gezogene Strahl hat das Richtungsverhältnis

$$x_s : y_s = A_3 : B_3.$$

Hier sind folgende Fälle zu beachten:

1. $C_3 \gtrless 0$. Die Coordinaten des Schnittpunktes haben endliche Werte, P_s liegt im endlichen Bereich.

2. $C_3 = 0$, aber A_3 und B_3 nicht oder doch nicht beide zugleich Null. Dann sind beide Coordinaten oder es ist wenigstens eine von ihnen unendlich groß; der Schnittpunkt liegt im Unendlichen, und zwar nach der Richtung $A_3 : B_3$. Daraus folgt, dass die Geraden parallel sind. In der That ist $C_3 = 0$ gleichbedeutend mit $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ oder $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ u. s. w.

3. $C_3 = 0$ und zugleich $A_3 = B_3 = 0$. Dann nehmen beide Coordinatenwerte die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, der Schnittpunkt wird unbestimmt. Das ist nur möglich, wenn die Geraden zusammenfallen. Wirklich folgt aus den Gleichungen

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \text{ oder } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2};\ b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0 \text{ oder } \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2};$$
$$-a_1 c_2 + a_2 c_1 = 0 \text{ oder } \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$$

die Beziehung

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2,$$

so dass die Trinome g_1 und g_2 sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden können.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gerade g_1 sei durch den Punkt P_1 (5, 2) und die Richtung 12 : 5, die Gerade g_2 durch die Gleichung $x + y - 2 = 0$ gegeben. Wenn deren Schnittpunkt P_s von P_1 den Abstand r hat, ist $x_s = 5 + \frac{12}{13} r$; $y_s = 2 + \frac{5}{13} r$. Durch Einsetzung folgt

$$\left(5 + \frac{12}{13} r\right) + \left(2 + \frac{5}{13} r\right) - 2 = 0;$$

$$r = -\frac{5 \cdot 13}{17};$$

also

$$x_s = 5 - \frac{12}{13} \cdot \frac{5 \cdot 13}{17} = \frac{25}{17} = 1{\cdot}47;$$

$$y_s = 2 - \frac{5}{13} \cdot \frac{5 \cdot 13}{17} = \frac{9}{17} = 0{\cdot}53.$$

b) Die Verbindungslinie der Punkte P_1 (3, 2); P_2 (— 3, 1) schneidet die Gerade $2x + 3y + 6 = 0$ in dem Punkte P_s, der in Bezug auf P_1 und P_2 das Theilverhältnis λ habe und dessen Coordinaten $x_s = \frac{3 + 3\lambda}{1 - \lambda}$; $y_s = \frac{2 - \lambda}{1 - \lambda}$ sind. Durch Einsetzung findet man

$$2 \frac{3(1 + \lambda)}{1 - \lambda} + 3 \frac{2 - \lambda}{1 - \lambda} + 6 \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} = 0;$$

$$\lambda = 6$$

und

$$x_s = \frac{3 + 18}{1 - 6} = -\frac{21}{5} = -4{\cdot}2;$$

$$y_s = \frac{2 - 6}{1 - 6} = \frac{4}{5} = 0{\cdot}8.$$

c) Der Schnittpunkt P_s der Geraden

$$\begin{array}{c} 3x + 5y - 15 = 0; \\ -5x + 3y + 15 = 0; \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{array}$$

hat die Coordinaten

$$x_s = \frac{A_3}{C_3} = \frac{75 + 45}{9 + 25} = \frac{120}{34} = 3{\cdot}53;$$

$$y_s = \frac{B_3}{C_3} = \frac{75 - 45}{34} = \frac{30}{34} = 0{\cdot}88.$$

d) Damit die Geraden

$$\begin{array}{l} 4x + ty - 8 = 0; \\ tx + 9y + 7 = 0; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{array}$$

einen unendlich fernen Schnittpunkt haben, also parallel seien, muss

$$C_3 = 36 - t^2 = 0$$

und

$$t = \pm 6$$

sein.

e) Damit die Geraden

$$\begin{array}{l} ux + vy + 7 = 0; \\ 3x + 7y + t = 0; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{array}$$

zusammenfallen, muss

$$\left.\begin{array}{l} A_3 = vt - 49 = 0 \\ B_3 = 21 - ut = 0 \\ C_3 = 7u - 3v = 0 \end{array}\right\}$$

sein und weil die dritte Gleichung eine Folge der beiden ersten ist, bei beliebigem t

$$v = \frac{49}{t}; \; u = \frac{21}{t}.$$

f) Man berechne die Coordinaten der Punkte, in welchen die Gerade

$$2x + 3y + 4 = 0$$

von der durch den Punkt $P_0(1, 1)$ und die Richtung 2 : 1; dann von der durch die Punkte $P_1(5, 2)$, $P_2(-3, 1)$; endlich von der durch ihre Gleichung $3x + 2y + 4 = 0$ gegebenen Geraden getroffen wird.

g) Die Coordinaten der Punkte zu berechnen, in welchen die Gerade

$$\alpha x + \beta y + 1 = 0$$

durch die zu ihr Senkrechten aus O oder P_0 geschnitten wird (vgl. Art. 13, Aufg. *c*).

h) In welchem Punkte schneiden sich die Geraden, welche durch die Punkte P_1 und P_2 gehen, wenn deren Richtungen durch die Richtungscoordinaten α_1, β_1 und α_2, β_2 gegeben sind?

i) In welchem Punkte schneiden sich die Geraden $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$?

k) Die Schnittpunkte der Geraden

$$ax + by + c = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

mit den Coordinatenaxen zu bestimmen.

l) **Man berechne die Coordinaten des Schnittpunktes der Geraden, welche durch die Axenabschnitte a_1, b_1 und a_2, b_2 gegeben sind.**

20. Drei Geraden eines Punktes. Wenn die drei Geraden

$$\begin{aligned} g_1 \;\ldots\; a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\ g_2 \;\ldots\; a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0, \\ g_3 \;\ldots\; a_3 x + b_3 y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

durch einen und denselben Punkt gehen sollen, können deren Gleichungen nicht von einander unabhängig sein, sondern es muss zwischen den Coëfficienten derselben eine Beziehung bestehen. Zu dieser gelangt man durch die Erwägung, dass die Coordinaten des Schnittpunktes von zwei Geraden der Gleichung der dritten genügen müssen. Der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 z. B. hat, wenn man die Coëfficienten der dritten Gleichung zu Hilfe nimmt, die Coordinaten $x_s = \frac{A_3}{C_3}$; $y_s = \frac{B_3}{C_3}$. Setzt man dieselben in die dritte Gleichung ein, so folgt

$$a_3 \frac{A_3}{C_3} + b_3 \frac{B_3}{C_3} + c_3 \frac{C_3}{C_3} = 0$$

oder

$$a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3 = 0$$

und weil der Ausdruck links die Entwicklung der Determinante aus den Coëfficienten aller drei Gleichungen nach der dritten Zeile darstellt,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44$$

als Bedingung dafür, daß die drei Geraden durch einen und denselben Punkt gehen. Transformiert man die dritte Colonne, indem man zu ihren Elementen die Elemente der ersten und zweiten Colonne addiert, nachdem man jene mit x, diese mit y multipliciert hat, so ergibt sich die für beliebige Werte von x und y geltende Identität

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & g_1 \\ a_2 & b_2 & g_2 \\ a_3 & b_3 & g_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welcher man durch Entwicklung der Determinante nach der dritten Colonne auch die Form

$$C_1 g_1 + C_2 g_2 + C_3 g_3 = 0$$

geben kann. Wenn also drei Geraden durch einen Punkt gehen, lassen sich die drei Factoren C_1, C_2, C_3 derart ermitteln, dass die Summe der mit ihnen multiplicierten Trinome g_1, g_2, g_3 identisch verschwindet. Da

$$C_1 g_1 + C_2 g_2 \equiv - C_3 g_3$$

ist durch

$$C_1 g_1 + C_2 g_2 = 0$$

oder

$$- C_3 g_3 = 0$$

dieselbe Gleichung dargestellt d. h. die dritte Gleichung kann durch lineare Combination aus der ersten und zweiten abgeleitet werden. Ebenso die erste aus der zweiten und dritten u. s. w. (Vgl. Art. 14, III).

Wenn die Gerade $P_i P_k$ durch den Schnittpunkt der Geraden $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ gehen soll, muss (Art. 19, II) das Theilverhältnis des letzteren in Bezug auf P_i und P_k einerseits $\lambda = \frac{g_{1i}}{g_{1k}}$, anderseits $\lambda = \frac{g_{2i}}{g_{2k}}$ sein, woraus sich die Bedingung

$$g_{1i}\, g_{2k} - g_{2i}\, g_{1k} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} g_{1i} & g_{2i} \\ g_{1k} & g_{2k} \end{vmatrix} = 0$$

ergibt.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Geraden

$$\begin{aligned} 12x + 5y + 3 &= 0; \\ x + y - 1 &= 0; \\ 8x + y + 7 &= 0 \end{aligned}$$

gehen durch einen Punkt, weil

$$\begin{vmatrix} 12 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Da ferner $C_1 = -7$; $C_2 = 28$; $C_3 = 7$ und $C_1 : C_2 : C_3 = -1 : 4 : 1$, ist

$$-(12x + 5y + 3) + 4(x + y - 1) + (8x + y + 7) \equiv 0;$$

$$8x + y + 7 \equiv (12x + 5y + 3) - 4(x + y - 1)$$

u. s. w.

b) Wie groß muss t sein, damit die drei Geraden

$$\begin{aligned} x + y + t &= 0; \\ 2x + 5y - 7 &= 0; \\ 3x + 2y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} t x + 11 y + 11 &= 0; \\ x + t y + 1 &= 0; \\ x + y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

durch einen und denselben Punkt gehen?

c) Man untersuche, ob die Verbindungslinie der Punkte $P_i(3, 5)$ und $P_k(7, 1)$ durch den Schnittpunkt der Geraden $2x + 3y - 19 = 0$ und $3x - 5y = 0$ geht.

21. Gerade durch den Schnittpunkt von zwei Geraden. Die aus den Gleichungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ durch lineare Combination mit Hilfe der Factoren λ_1 und λ_2 abgeleitete Gleichung

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$$

stellt eine Gerade g_3 vor, welche durch den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 geht. Denn sie ist vom ersten Grade und wird von den Coordinaten des Schnittpunktes P_s befriedigt, indem durch Einsetzung g_{1s} und g_{2s} einzeln verschwinden. Dividiert man durch λ_1 und setzt $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\lambda$, so nimmt die combinierte Gleichung die Form

$$g_1 - \lambda g_2 = 0$$

an. So lange es frei steht, den Factoren λ_1, λ_2 oder λ beliebige Werte zu ertheilen, kann jede der beiden Gleichungsformen eine ganz beliebige, durch den Schnittpunkt P_s gehende Gerade vorstellen. Wenn aber diese eine bestimmte Lage haben soll, dann müssen die Factoren bestimmte Wertverhältnisse oder Werte annehmen.

Soll z. B. die Gerade g_3 durch einen gegebenen Punkt P_0 gehen, muss

$$g_{10} - \lambda g_{20} = 0,$$

also

$$\lambda = \frac{g_{10}}{g_{20}} \text{ oder } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{g_{10}}{g_{20}}$$

sein; die Gerade $P_s P_0$ wird daher durch die Gleichung

$$g_1 - \frac{g_{10}}{g_{20}} g_2 = 0,$$

oder in mehr symmetrischer Form durch

$$\frac{g_1}{g_{10}} - \frac{g_2}{g_{20}} = 0$$

dargestellt.

Wenn aber g_3 die gegebene Richtung $a:b$ haben soll, dann muss ihre Normale zu dieser Richtung senkrecht sein. Ordnet man $g_1 - \lambda g_2 = 0$, so folgt

$$(a_1 - \lambda a_2) x + (b_1 - \lambda b_2) y + (c_1 - \lambda c_2) = 0,$$

also hat g_3 die Normalenrichtung

$$(a_1 - \lambda a_2) : (b_1 - \lambda b_2),$$

demnach muss in diesem Falle

$$a (a_1 - \lambda a_2) + b (b_1 - \lambda b_2) = 0$$

und

$$\lambda = \frac{a_1 a + b_1 b}{a_2 a + b_2 b}$$

sein. Die Gleichung der Geraden g_3 ist jetzt

$$\frac{g_1}{a_1 a + b_1 b} - \frac{g_2}{a_2 a + b_2 b} = 0.$$

Wenn endlich verlangt wird, dass die Gerade g_3 zu der Richtung $a:b$ senkrecht sei, dann ist ihre Normale zu dieser Richtung parallel und man hat

$$(a_1 - \lambda a_2) : (b_1 - \lambda b_2) = a : b,$$

$$\lambda = \frac{a_1 b - a b_1}{a_2 b - a b_2},$$

daher

$$\frac{g_1}{a_1 b - a b_1} - \frac{g_2}{a_2 b - a b_2} = 0$$

als Gleichung der Geraden.

Sind die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2 in der Normalform $n_1 = 0$ und $n_2 = 0$ gegeben, so tritt die geometrische Bedeutung des Factors λ in der combinierten Gleichung

$$n_1 - \lambda n_2 = 0$$

deutlich hervor. Liegt nämlich der beliebige Punkt P_0 auf g_3, so ist

$$n_{10} - \lambda n_{20} = 0;$$

$$\lambda = \frac{n_{10}}{n_{20}},$$

oder, weil n_{10} und n_{20} die senkrechten Abstände t_{10} und t_{20} des Punktes P_0 von g_1 und g_2 vorstellen,

$$\lambda = \frac{t_{10}}{t_{20}} = \frac{\sin g_1 g_3}{\sin g_2 g_3} = (g_1 g_2 g_3),$$

d. h. λ ist gleich dem Sinustheilverhältnis der Geraden g_3 in Bezug auf die Geraden g_1 und g_2. Danach erkennt man nun auch leicht die Bedeutung von λ in der Gleichung

$$g_1 - \lambda g_2 = 0.$$

Da nämlich $\frac{g_1}{\rho_1} = n_1$; $\frac{g_2}{\rho_2} = n_2$, also $g_1 = \rho_1 n_1$ und $g_2 = \rho_2 n_2$ gesetzt und dieser Gleichung die Form

$$\rho_1 n_1 - \lambda \rho_2 n_2 = 0$$

oder

$$n_1 - \lambda \frac{\rho_2}{\rho_1} n_2 = 0$$

gegeben werden kann, ist nun

$$\lambda \frac{\rho_2}{\rho_1} = (g_1 g_2 g_3),$$

also

$$\lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2} (g_1 g_2 g_3),$$

d. h. λ ist zwar nicht mehr dem Sinustheilverhältnisse gleich, aber doch proportional. Daher sind die Geraden g_3 und g_4 mit den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} g_1 - \lambda g_2 = 0 \\ g_1 + \lambda g_2 = 0 \\ \\ \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0 \\ \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 = 0 \end{array}\right\}$$

oder

harmonisch in Bezug auf die Geraden g_1 und g_2, denn man hat:

$$(g_1 g_2 g_3) = \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda = - \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1};$$

$$(g_1 g_2 g_4) = - \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

mithin

$$(g_1 g_2 g_3) = - (g_1 g_2 g_4).$$

Dasselbe gilt von den Geradenpaaren

$$\left.\begin{array}{r} n_1 - \lambda n_2 = 0 \\ n_1 + \lambda n_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{r} \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0 \\ \lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Sind insbesondere g_3 und g_4 die Halbierungslinien der Winkel, welche die Geraden g_1 und g_2 bestimmen, und liegt g_3 in dem Theile der Ebene, dessen Punkte gleich bezeichnete Abstände von g_1 und g_2 haben, g_4 dazu senkrecht, so ist $(g_1 g_2 g_3) = 1$; $(g_1 g_2 g_4) = -1$, so dass durch die Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} n_1 - n_2 = 0 \\ n_1 + n_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{oder} \left\{\begin{matrix} \frac{g_1}{\rho_1} - \frac{g_2}{\rho_2} = 0 \\ \frac{g_1}{\rho_1} + \frac{g_2}{\rho_2} = 0 \end{matrix}\right.$$

diese Winkelhalbierungslinien dargestellt erscheinen.

Anmerkung. Wenn

$$g_i - \lambda' g_k = 0; \; g_i - \lambda'' g_k = 0$$

die Gleichungen der Geraden g' und g'' sind, welche durch den Schnittpunkt der Geraden g_i und g_k gehen, so ist

$$(g_i g_k g' g'') = \frac{\lambda'}{\lambda''}.$$

Daher repräsentieren die Gleichungen

$$g_1 - \lambda g_2 = 0; \; g_3 - \lambda g_4 = 0$$

zwei projectivische Strahlenbüschel, sobald λ als willkürlicher Parameter gilt.

Beispiele und Aufgaben.

a) Eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der Geraden

$$3x + 5y + 15 = 0;$$
$$x + 3y + 3 = 0$$

geht, hat die Gleichung

$$(3x + 5y + 15) - \lambda(x + 3y + 3) = 0,$$

oder

$$(3 - \lambda)x + (5 - 3\lambda)y + (15 - 3\lambda) = 0.$$

Geht sie noch durch den Punkt P_0 (2, 1), so ist

$$(6 + 5 + 15) - \lambda(2 + 3 + 3) = 0,$$

$$\lambda = \frac{13}{4},$$

also

$$x + 19y - 21 = 0$$

ihre Gleichung.

Hat sie die Richtung 3 : 2, so ist

$$(3 - \lambda)3 + (5 - 3\lambda)2 = 0;$$

$$\lambda = \frac{19}{9}$$

und ihre Gleichung

$$4x - 6y + 39 = 0.$$

Ist sie zu der Richtung 3 : 2 senkrecht, so ist

$$(3 - \lambda) : (5 - 3\lambda) = 3 : 2;$$

$$2(3 - \lambda) - 3(5 - 3\lambda) = 0;$$

$$\lambda = \frac{9}{7}$$

und ihre Gleichung

$$6x + 4y + 39 = 0.$$

Endlich sind die Gleichungen der Winkelhalbierungslinien

$$\frac{3x + 5y + 15}{\sqrt{34}} - \frac{x + 3y + 3}{\sqrt{10}} = 0;$$

$$\frac{3x + 5y + 15}{\sqrt{34}} + \frac{x + 3y + 3}{\sqrt{10}} = 0.$$

b) Bilden die Geraden g_1 und g_2 den Winkel $g_1\,g_2 = \delta$, die Geraden g_2 und g_3 den Winkel $g_2\,g_3 = \varepsilon$ und gehen alle drei durch einen Punkt, so hat g_3 die Gleichung

$$n_1 - \frac{\sin(\delta + \varepsilon)}{\sin \varepsilon}\, n_2 = 0.$$

c) Man lege durch den Schnittpunkt der Geraden

$$g_1 \ldots 2x + 3y - 6 = 0;$$
$$g_2 \ldots 3x + 2y - 6 = 0$$

eine Gerade, welche durch den Punkt $P_0(5, 3)$ geht; eine zweite, welche die Richtung $2 : -5$ hat; eine dritte, welche zu der Richtung 1 : 1 senkrecht ist, ferner stelle man die Gleichungen ihrer Winkelhalbierenden auf.

d) Man constatiere, dass die Geraden

$$g_1 \ldots x - 3y + 5\sqrt{10} = 0;$$
$$g_2 \ldots x + 2y - 7\sqrt{5} = 0$$

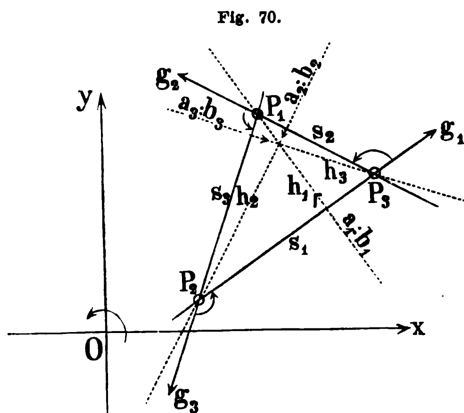
den Winkel $g_1\,g_2 = \frac{3\pi}{4}$ einschließen, trage an g_2 im Schnittpunkte P_s mit g_1 den Winkel $g_2\,g_3 = \frac{\pi}{12}$ auf und ermittle die Gleichung von g_3.

22. Winkel, Eckpunkte, Höhen, Fläche, Seitenlängen und Umfang des von drei Geraden bestimmten Dreieckes. Die drei Geraden .

$$g_1 \ldots a_1 x + b_1 y + c_1 = 0;$$
$$g_2 \ldots a_2 x + b_2 y + c_2 = 0;$$
$$g_3 \ldots a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

bestimmen ein Dreieck, dessen Eckpunkte P_1, P_2, P_3 die Schnittpunkte $g_2, g_3; g_3, g_1; g_1, g_2$ der Geraden, dessen Seiten s_1, s_2, s_3 gleich den Strecken $P_2 P_3, P_3 P_1, P_1 P_2$ der Geraden g_1, g_2, g_3 sind und dessen Höhen h_1, h_2, h_3 den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 oder den Seiten s_1, s_2, s_3 entsprechen.

Fig. 70.



Man hat es in der Hand, die Form der Gleichungen derart einzurichten, dass ein Punkt im Inneren des Dreieckes von allen drei Geraden positive Abstände hat, indem man, wenn nöthig, mit -1 multipliciert; ferner die Reihenfolge so festzusetzen, dass die Umlaufung $P_1 P_2 P_3$ im positiven Drehungssinne der Ebene erfolgt. (Fig. 70). Dann sind $g_2 g_3$, $g_3 g_1$, $g_1 g_2$ die Außenwinkel des Dreieckes, zu welchen dessen Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in der Beziehung stehen, dass

$$\varphi_1 = \pi - g_2 g_3; \quad \varphi_2 = \pi - g_3 g_1; \quad \varphi_3 = \pi - g_1 g_2,$$

also

$$\cos\varphi_1 = -\cos g_2 g_3 = -\frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{\rho_2 \rho_3}; \quad \sin\varphi_1 = \sin g_2 g_3 = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{\rho_2 \rho_3};$$

$$\cos\varphi_2 = -\cos g_3 g_1 = -\frac{a_3 a_1 + b_3 b_1}{\rho_3 \rho_1}; \quad \sin\varphi_2 = \sin g_3 g_1 = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{\rho_3 \rho_1};$$

$$\cos\varphi_3 = -\cos g_1 g_2 = -\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\rho_1 \rho_2}; \quad \sin\varphi_3 = \sin g_1 g_2 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\rho_1 \rho_2}.$$

Zur Bestimmung der Coordinaten der Eckpunkte hat man je zwei der Gleichungen aufzulösen, wobei man die Coëfficienten der übrigbleibenden für die symbolische Darstellung benützen kann. Man findet auf diese Art

$$x_1 = \frac{A_1}{C_1}; \quad x_2 = \frac{A_2}{C_2}; \quad x_3 = \frac{A_3}{C_3};$$

$$y_1 = \frac{B_1}{C_1}; \quad y_2 = \frac{B_2}{C_2}; \quad y_3 = \frac{B_3}{C_3};$$

wenn unter A_i, B_i, C_i die Unterdeterminanten der Elemente a_i, b_i, c_i in der aus den Gleichungscoëfficienten gebildeten Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verstanden sind.

Irgend eine Höhe h_i des Dreieckes ist der senkrechte Abstand des Eckpunktes P_i von der Geraden g_i, daher

$$h_i = \frac{g_{ii}}{\rho_i} = \frac{a_i x_i + b_i y_i + c_i}{\rho_i} = \frac{a_i \frac{A_i}{C_i} + b_i \frac{B_i}{C_i} + c_i \frac{C_i}{C_i}}{\rho_i} =$$

$$= \frac{a_i A_i + b_i B_i + c_i C_i}{\rho_i C_i} = \frac{\triangle}{\rho_i C_i}.$$

Für die Fläche f findet man

$$2f = \begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1} & \frac{B_1}{C_1} & \frac{C_1}{C_1} \\ \frac{A_2}{C_2} & \frac{B_2}{C_2} & \frac{C_2}{C_2} \\ \frac{A_3}{C_3} & \frac{B_3}{C_3} & \frac{C_3}{C_3} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & B_3 \end{vmatrix}}{C_1 C_2 C_3} = \frac{\triangle^2}{C_1 C_2 C_3};$$

Da $s_i h_i = 2f$, also $s_i = \frac{2f}{h_i}$, ist

$$s_i = \frac{\triangle^2}{C_1 C_2 C_3} \cdot \frac{\rho_i C_i}{\triangle} = \frac{\rho_i C_i \triangle}{C_1 C_2 C_3};$$

demnach ergibt sich der Umfang des Dreieckes

$$u = \frac{(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 + \rho_3 C_3) \triangle}{C_1 C_2 C_3}.$$

Aufgabe.

Man wende die Lehren dieses Artikels auf das von den Geraden

$$\begin{aligned} g_1 \ldots & -5x - 12y + 543 = 0; \\ g_2 \ldots & \quad 4x - 3y - 6 = 0; \\ g_3 \ldots & -3x + 4y + 1 = 0 \end{aligned}$$

bestimmte Dreieck an und überzeuge sich vor allem durch die Zeichnung, ob die dort gemachten Annahmen in diesem speciellen Falle vorhanden sind.

23. Winkelhalbierungslinien des Dreieckes. Die Gleichungen der ein Dreieck bestimmenden Geraden mögen in der Normalform

$$g_1 \ldots n_1 = 0;$$
$$g_2 \ldots n_2 = 0;$$
$$g_3 \ldots n_3 = 0$$

gegeben und derart eingerichtet sein, dass ein Punkt innerhalb des Dreieckes von allen drei Geraden positive Abstände habe.

Dann sind

$$n_1 - n_2 = 0;$$
$$n_2 - n_3 = 0;$$
$$n_3 - n_1 = 0$$

die Gleichungen der inneren,

$$n_1 + n_2 = 0;$$
$$n_2 + n_2 = 0;$$
$$n_3 + n_1 = 0$$

die Gleichungen der äußeren Winkelhalbierungslinien. Da

$$(n_1 - n_2) + (n_2 - n_3) + (n_3 - n_1) \equiv 0$$

(Art. 20, $C_1 : C_2 : C_3 = 1 : 1 : 1$), gehen die drei inneren Winkelhalbierungslinien durch einen und denselben Punkt. Da ferner

$$(n_1 + n_2) - (n_2 + n_3) + (n_3 - n_1) \equiv 0;$$
$$(n_2 + n_3) - (n_3 + n_1) + (n_1 - n_2) \equiv 0;$$
$$(n_3 + n_1) - (n_1 + n_2) + (n_2 - n_3) \equiv 0;$$

gehen auch je zwei äußere und eine innere Winkelhalbierungslinie durch je einen Punkt, so dass im Ganzen vier Punkte durch die Winkelhalbierungslinien bestimmt werden. (Mittelpunkte der Kreise, welche von den Seiten des Dreieckes berührt werden.)

Aufgabe.

Man stelle die Gleichungen der Winkelhalbierungslinien des Dreieckes der Geraden

$$g_1 \ldots \quad 5x + 12y + 465 = 0;$$
$$g_2 \ldots \quad 3x - 4y - 1 = 0;$$
$$g_3 \ldots \quad -4x + 3y + 6 = 0$$

auf und berechne die Coordinaten ihrer Schnittpunkte.

24. Harmonische Gebilde am Dreieck und Viereck. Die Verbindungslinien der Eckpunkte des Dreieckes der Geraden

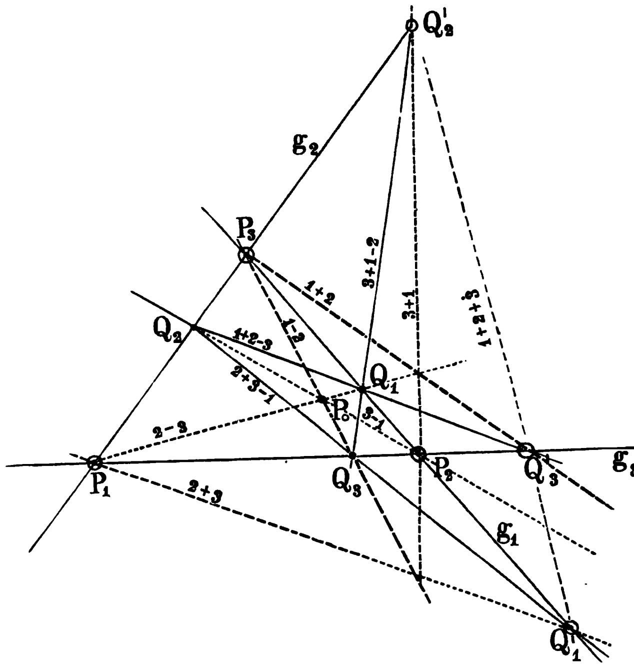
$$g_1 = 0;\ g_2 = 0;\ g_3 = 0$$

mit einem beliebigen Punkte P_0 (Fig. 71) haben die Gleichungen (Art. 21).

$$P_1P_0 \ldots \frac{g_2}{g_{20}} - \frac{g_3}{g_{30}} = 0;\ P_2P_0 \ldots \frac{g_3}{g_{30}} - \frac{g_1}{g_{10}} = 0;$$

$$P_3P_0 \ldots \frac{g_1}{g_{10}} - \frac{g_2}{g_{20}} = 0.$$

Fig. 71.



Werden die gegenüberliegenden Seiten von diesen Eckstrahlen in den Punkten Q_1, Q_2, Q_3 getroffen, welche ein neues Dreieck bilden, so sind die Seiten des letzteren durch die Gleichungen

$$Q_1Q_2 \ldots \frac{g_1}{g_{10}} + \frac{g_2}{g_{20}} - \frac{g_3}{g_{30}} = 0;$$

$$Q_2Q_3 \ldots \frac{g_2}{g_{20}} + \frac{g_3}{g_{30}} - \frac{g_1}{g_{10}} = 0;$$

$$Q_3Q_1 \ldots \frac{g_3}{g_{30}} + \frac{g_1}{g_{10}} - \frac{g_2}{g_{20}} = 0$$

dargestellt, denn es wird z. B. die erste Gleichung durch lineare Combination der Gleichungen

$$\frac{g_2}{g_{20}} - \frac{g_3}{g_{30}} = 0 \text{ und } g_1 = 0 \text{ oder } \frac{g_1}{g_{10}} - \frac{g_3}{g_{30}} = 0 \text{ und } g_2 = 0$$

erhalten u. s. w. Werden ferner g_1, g_2, g_3 von den Geraden $Q_2 Q_3$, $Q_3 Q_1$, $Q_1 Q_2$ in den Punkten Q'_1, Q'_2, Q'_3 geschnitten, so sind die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 durch die Gleichungen

$$P_1 Q'_1 \ldots \frac{g_2}{g_{20}} + \frac{g_3}{g_{30}} = 0; \quad P_2 Q'_2 \ldots \frac{g_3}{g_{30}} + \frac{g_1}{g_{10}} = 0;$$

$$P_3 Q'_3 \ldots \frac{g_1}{g_{10}} + \frac{g_2}{g_{20}} = 0$$

charakterisiert, weil z. B. die erste Gleichung ihrer Form nach eine Gerade durch P_1 vorstellt, die aber auch durch Q'_1 geht, denn es ist

$$\frac{g_2}{g_{20}} + \frac{g_3}{g_{30}} = \left(\frac{g_2}{g_{20}} + \frac{g_3}{g_{30}} - \frac{g_1}{g_{10}}\right) + \left(\frac{g_1}{g_{10}}\right);$$

u. s. w.

Auf diese Art ergeben sich in jedem Eckpunkte zwei Geraden, und zwar in

$$P_1 \ldots \frac{g_2}{g_{20}} - \frac{g_3}{g_{30}} = 0 \text{ und } \frac{g_2}{g_{20}} + \frac{g_3}{g_{30}} = 0;$$

$$P_2 \ldots \frac{g_3}{g_{30}} - \frac{g_1}{g_{10}} = 0 \text{ und } \frac{g_3}{g_{30}} + \frac{g_1}{g_{10}} = 0;$$

$$P_3 \ldots \frac{g_1}{g_{10}} - \frac{g_2}{g_{20}} = 0 \text{ und } \frac{g_1}{g_{10}} + \frac{g_2}{g_{20}} = 0,$$

die mit den Seiten, welche durch den betreffenden Eckpunkt gehen, offenbar je vier harmonische Strahlen bilden.

Die drei Punkte Q'_1, Q'_2, Q'_3 liegen in einer Geraden, denn sie werden durch die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{r}\frac{g_2}{g_{20}} + \frac{g_3}{g_{30}} = 0\\ \frac{g_1}{g_{10}} = 0\end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r}\frac{g_3}{g_{30}} + \frac{g_1}{g_{10}} = 0\\ \frac{g_2}{g_{20}} = 0\end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r}\frac{g_1}{g_{10}} + \frac{g_2}{g_{20}} = 0\\ \frac{g_3}{g_{30}} = 0\end{array}\right\}$$

repräsentiert, so dass in jedem von diesen durch Addition die Gleichung

$$\frac{g_1}{g_{10}} + \frac{g_2}{g_{20}} + \frac{g_3}{g_{30}} = 0$$

einer und derselben Geraden entsteht, welche demnach alle drei Punkte enthält. Diese Gerade ist von der Lage des Punktes P_0 abhängig und heißt die Harmonikale des Punktes P_0 in Bezug auf das Dreieck. Da

$$\left(\frac{g_2}{g_{20}}+\frac{g_3}{g_{30}}\right)-\left(\frac{g_3}{g_{30}}+\frac{g_1}{g_{10}}\right)+\left(\frac{g_1}{g_{10}}-\frac{g_2}{g_{20}}\right)=0;$$

$$\left(\frac{g_3}{g_{30}}+\frac{g_1}{g_{10}}\right)-\left(\frac{g_1}{g_{10}}+\frac{g_2}{g_{20}}\right)+\left(\frac{g_2}{g_{20}}-\frac{g_3}{g_{30}}\right)=0;$$

$$\left(\frac{g_1}{g_{10}}+\frac{g_2}{g_{20}}\right)-\left(\frac{g_2}{g_{20}}+\frac{g_3}{g_{30}}\right)+\left(\frac{g_3}{g_{30}}-\frac{g_1}{g_{10}}\right)=0,$$

so geht immer ein Eckstrahl durch den Schnittpunkt der zu den beiden anderen in Bezug auf die Seiten des Dreieckes harmonischen Strahlen. Daher bilden die Eckstrahlen mit den zu ihnen harmonischen Strahlen die drei Paare Gegenseiten eines vollständigen Viereckes, dessen Diagonalpunkte die Eckpunkte und dessen Diagonalen die Seiten des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ sind. Die durch einen Diagonalpunkt eines vollständigen Viereckes gehenden Diagonalen und Gegenseiten sind also vier harmonische Strahlen.

25. Gleichung einer Geraden in Dreieckscoordinaten. Die Gleichung einer Linie in Dreieckscoordinaten aufstellen heißt die Beziehung zwischen den Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines beliebigen Punktes P derselben aufsuchen. Das kann durch Vermittlung des rechtwinkeligen Coordinatensystems geschehen, indem man die Geraden $g_1 = 0$; $g_2 = 0$; $g_3 = 0$ als Fundamentallinien eines Coordinatendreieckes ansieht (Art. 4, *d*). Da nämlich

$$\sigma x_1 = k_1 t_1;\ \sigma x_2 = k_2 t_2;\ \sigma x_3 = k_3 t_3$$

und

$$t_1 = \frac{g_1}{\rho_1};\ t_2 = \frac{g_2}{\rho_2};\ t_3 = \frac{g_3}{\rho_3},$$

ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\sigma \rho_1}{k_1} . x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1;$$

$$\frac{\sigma \rho_2}{k_2} . x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2;$$

$$\frac{\sigma \rho_3}{k_3} . x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3,$$

aus welchen man die rechtwinkeligen Coordinaten x, y des Punktes P durch seine Dreieckscoordinaten ausgedrückt erhält, indem man mit A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 multipliciert und jedesmal addiert:

$$\triangle x = \sigma\left(\frac{\rho_1 A_1}{k_1} x_1 + \frac{\rho_2 A_2}{k_2} x_2 + \frac{\rho_3 A_3}{k_3} x_3\right);$$

$$\triangle y = \sigma\left(\frac{\rho_1 B_1}{k_1} x_1 + \frac{\rho_2 B_2}{k_2} x_2 + \frac{\rho_3 B_3}{k_3} x_3\right);$$

$$\triangle \ \ = \sigma\left(\frac{\rho_1 C_1}{k_1} x_1 + \frac{\rho_2 C_2}{k_2} x_2 + \frac{\rho_3 C_3}{k_3} x_3\right).$$

Wenn nun der Punkt P auf der Geraden

$$a x + b y + c = 0$$

liegt, folgt durch Multiplication mit a, b, c und Addition:

$$0 = \frac{\rho_1}{k_1}(A_1 a + B_1 b + C_1 c) x_1 + \frac{\rho_2}{k_2}(A_2 a + B_2 b + C_2 c) x_2 +$$
$$+ \frac{\rho_3}{k_3}(A_3 a + B_3 b + C_3 c) x_3$$

als Gleichung dieser Geraden in Dreieckscoordinaten. Sie ist vom ersten Grade und homogen von der Form

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 = 0.$$

Dass umgekehrt jede solche Gleichung eine Gerade vorstellt, zeigt man leicht durch Übergang zu rechtwinkeligen Coordinaten, indem man die früher gefundenen Ausdrücke für x_1, x_2, x_3 einsetzt u. s. w. Bemerkenswert ist der Fall der unendlich fernen Geraden, wenn also $a = b = 0$ (Art. 16, II.). Man hat dann

$$\frac{\rho_1}{k_1} C_1 x_1 + \frac{\rho_2}{k_2} C_2 x_2 + \frac{\rho_3}{k_3} C_3 x_3 = 0$$

oder, weil C_1, C_2, C_3 durch $\rho_2 \rho_3 \sin \varphi_1$, $\rho_1 \rho_3 \sin \varphi_2$, $\rho_1 \rho_2 \sin \varphi_3$ ersetzt werden dürfen (Art. 22), wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Winkel des Coordinatendreieckes bedeuten,

$$\frac{\sin \varphi_1}{k_1} x_1 + \frac{\sin \varphi_2}{k_2} x_2 + \frac{\sin \varphi_3}{k_3} x_3 = 0$$

als Gleichung derselben.

26. Liniencoordinaten. Nach dem Gesetz der Reciprocität sind Punkt und Gerade in der Ebene reciproke Elemente. Es liegt daher nahe, die Untersuchungen der analytischen Geometrie dadurch zu vervollständigen, dass man die Gerade — ebenso wie bisher den Punkt — durch Coordinaten bestimmt und diese der Lösung geometrischer Aufgaben zugrunde legt.

I. Unter den verschiedenen Bestimmungsstücken einer Geraden hat man der Zweckmäßigkeit wegen die negativen, reciproken Werte der Axenabschnitte a und b als Coordinaten gewählt. Bezeichnet man sie mit ξ und η, so ist durch

$$\xi = -\frac{1}{a};\ \eta = -\frac{1}{b} \quad \ldots \ldots \ldots (45$$

die Gerade festgelegt, denn man hat $a = -\frac{1}{\xi}$; $b = -\frac{1}{\eta}$ und kann damit dieselbe construieren. Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

der Geraden ein, so geht daraus

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

hervor. Für einen Punkt P_0 der Geraden ist

$$\xi x_0 + \eta y_0 + 1 = 0.$$

Betrachtet man nun in dieser Gleichung ξ und η als unbestimmte Größen, so drückt dieselbe aus, dass jede Gerade, deren Coordinaten ihr genügen, durch P_0 geht. Denn sobald ein Wertepaar ξ_1, η_1 aus der Gleichung berechnet wurde, ist

$$\xi_1 x_0 + \eta_1 y_0 + 1 = 0,$$

d. h. die Coordinaten von P_0 genügen der Gleichung

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

der von den Coordinaten ξ_1, η_1 bestimmten Geraden g_1. Da also durch die Gleichung

$$x_0 \xi + y_0 \eta + 1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (46$$

die Gesammtheit der Geraden charakterisiert ist, welche durch P_0 gehen, wird sie die Gleichung des Punktes P_0 genannt, und zwar liegt hier die sogenannte Normalform vor. Die allgemeine Gleichung ersten Grades in Liniencoordinaten

$$a\xi + b\eta + c = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (47$$

lässt sich mittelst Division durch c auf die Normalform

$$\frac{a}{c}\xi + \frac{b}{c}\eta + 1 = 0$$

überführen, stellt daher den Punkt vor, dessen Coordinaten $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ sind. Die Richtung vom Nullpunkte nach diesem Punkte ist durch das Verhältnis $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = a : b$ gegeben. Die speciellen Formen, welche

aus der allgemeinen Gleichung hervorgehen, wenn Coëfficienten Null werden, bedürfen keiner näheren Erklärung:

$$a\xi + c = 0;\ \text{Punkt}\ \left(\frac{a}{c}, 0\right)\ \text{der x-Axe;}$$

$$b\eta + c = 0;\ \text{Punkt}\ \left(0, \frac{b}{c}\right)\ \text{der y-Axe;}$$

$$a\xi + b\eta = 0;\ \text{unendlich ferner Punkt in der Richtung a:b;}$$

$$\xi = 0;\ \text{unendlich ferner Punkt der x-Axe;}$$

$$\eta = 0;\ \text{unendlich ferner Punkt der y-Axe.}$$

Symbolisch möge künftig die Gleichung des Punktes P_i in der allgemeinen Form durch $P_i = 0$ und in der Normalform durch $N_i = 0$ dargestellt werden.

II. Die Geraden, deren Coordinaten einer beliebigen Gleichung

$$f(\xi, \eta) = 0$$

genügen, bilden eine gesetzmäßig angeordnete, stetige Folge, umhüllen daher eine Linie, deren Tangenten sie sind; diese Linie ist als das geometrische Äquivalent der Gleichung anzusehen. Damit steht die Bedeutung der Gleichung ersten Grades nicht in Widerspruch, wenn man den Punkt als eine geschlossene Linie von unendlich kleinen Dimensionen betrachtet. Lässt sich das Gleichungspolynom in Factoren zerlegen, so repräsentiert die Gleichung die Gesammtheit der Linien (Punkte), deren Gleichungen man erhält, wenn man die einzelnen Factoren gleich Null setzt.

Wird eine geordnete algebraische Gleichung vorausgesetzt, so ist die von ihr charakterisierte Linie von der n^{ten} Classe, wenn die Gleichung vom n^{ten} Grade ist.

Zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_1(\xi, \eta) = 0 \\ f_2(\xi, \eta) = 0 \end{array}\right\}$$

repräsentieren eine beschränkte Anzahl von Geraden, nämlich die gemeinsamen Tangenten der Linien, welche die einzelnen Gleichungen vorstellen. Denn eine Gerade, deren Coordinaten beide Gleichungen befriedigen, ist Tangente beider Linien. Die durch lineare Combination abgeleitete Gleichung

$$\lambda_1 f_1(\xi, \eta) + \lambda_2 f_2(\xi, \eta) = 0$$

stellt eine Linie vor, welche von den gemeinsamen Tangenten der Linien $f_1(\xi, \eta) = 0$; $f_2(\xi, \eta) = 0$ berührt wird, weil durch Einsetzung

der Coordinaten einer solchen die einzelnen Theile des Gleichungsausdruckes verschwinden. Versteht man unter t einen willkürlichen Parameter, so stellen die Gleichungen

$$\varphi_1(\xi, \eta, t) = 0; \quad \varphi_2(\xi, \eta, t) = 0$$

zwei Scharen von Linien vor, die man so aufeinander beziehen kann, dass sich zwei Linien entsprechen, in deren Gleichungen für t gleiche Werte stehen. Für irgend einen Wert von t werden von den beiden Gleichungen zusammen die gemeinsamen Tangenten der zugehörigen Linien repräsentiert, daher entspricht allen Werten von t eine stetige Folge gesetzmäßig angeordneter Geraden, die eine Linie umhüllen. Die Gleichung der letzteren erhält man durch Aufsuchung jener Beziehung zwischen den Coordinaten einer Geraden, welche durch die zwei gegebenen Gleichungen bedingt ist, also indem man aus diesen durch Elimination des Parameters eine neue Gleichung ableitet.

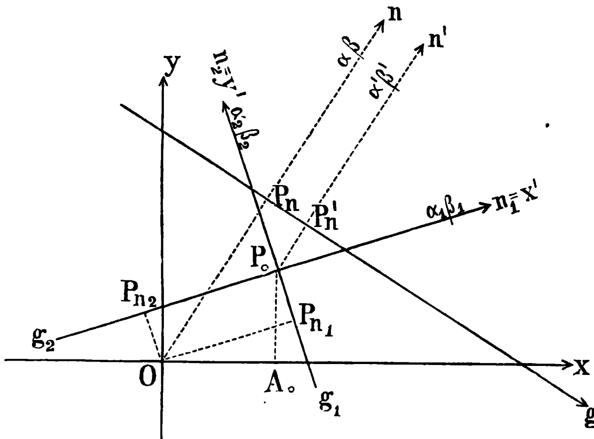
III. Die Transformation der Liniencoordinaten erfolgt direct mittelst der Beziehungen, welche zwischen den Coordinaten ξ, η und den Bestimmungsstücken α, β, l einer Geraden bestehen und sich durch den Vergleich der Gleichungsformen

$$\xi x + \eta y + 1 = 0;$$
$$\frac{\alpha}{l} x + \frac{\beta}{l} y + 1 = 0$$

ergeben:

$$\xi = \frac{\alpha}{l}; \quad \eta = \frac{\beta}{l}$$

Fig. 72.



oder

$$\xi : \eta : 1 = \alpha : \beta : 1.$$

Die neuen Axen x', y' mögen mit den Geraden g_2 (α_2, β_2, l_2) und g_1 (α_1, β_1, l_1) zusammenfallen (Fig. 72), den Größen $\xi, \eta, \alpha, \beta, l$ im alten Coordinatensystem mögen $\xi', \eta', \alpha', \beta', l'$ im neuen entsprechen. Zufolge Art. 15, Gl. 29 ist dann

$$\alpha = \alpha_1 \alpha' + \alpha_2 \beta';$$
$$\beta = \beta_1 \alpha' + \beta_2 \beta'.$$

Projiciert man ferner den Streckenzug $O P_{n1} P_0 P_n' P_n$ und seine Schlusslinie $O P_n$ auf die Normale n' von g, so ergibt sich

$$O P_{n1} \cos x' n' + P_{n1} P_0 \cos y' n' + P_0 P_n' = O P_n$$

und daraus

$$l = l_1 \alpha' + l_2 \beta' + l'.$$

Aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \alpha' + \alpha_2 \beta' \\ \beta &= \beta_1 \alpha' + \beta_2 \beta' \\ l &= l_1 \alpha' + l_2 \beta' + l' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a$$

folgen wegen $\xi = \frac{\alpha}{l}$; $\xi' = \frac{\alpha'}{l'}$ u. s. w. die Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta'}{l_1 \xi' + l_2 \eta' + 1} \\ \eta &= \frac{\beta_1 \xi' + \beta_2 \eta'}{l_1 \xi' + l_2 \eta' + 1} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b$$

doch kann man mit Vortheil die Gleichungen (a statt (b benützen, wenn man zuerst in die zu transformierende Gleichung α, β, l statt ξ und η einführt, in die transformierte aber wieder ξ' und η' statt α', β', l' u. s. w. Ferner findet man $l_1 = -(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0)$; $l_2 = -(\alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0)$, so dass l_1 und l_2 auch durch die Coordinaten des neuen Nullpunktes P_0 ausgedrückt erscheinen.

IV. Die Coordinaten ξ und η haben den Nachtheil, dass mittelst derselben Geraden, welche durch den Nullpunkt gehen, nicht dargestellt werden können und auch die Gleichung des Nullpunktes die unbequeme Form $1 = 0$ oder $c = 0$ annimmt. Ein Ausweg im Bedarfsfalle ist geboten, dass man $\xi = \frac{\alpha}{l}$; $\eta = \frac{\beta}{l}$ setzt (III.) und die Gleichung des Punktes in

$$x_0 \alpha + y_0 \beta + \quad l = 0$$

oder

$$a \ \alpha + b \ \beta + c \, l = 0$$

überführt, wo aber für α, β, l auch proportionale Größen $m\alpha, m\beta, ml$ eintreten können. Dann kann eine Gerade des Nullpunktes durch $\alpha : \beta : 0$ dargestellt werden und die Gleichung des Nullpunktes ist $l = 0$.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gerade $g_1 \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{7}\right)$ hat die Axenabschnitte $-\frac{3}{5}$ und 7. Für sie ist $\alpha : \beta : 1 = 35 : -3 : 21$.

Die Gerade $g_2 \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ist im Abstande 3 parallel zu der y-Axe, die Gerade $g_3 \left(0, \frac{5}{9}\right)$ im Abstande $-\frac{9}{5}$ parallel zu der x-Axe.

Für die Gerade g_4 (2 : 3 : 5) ist $\xi = \frac{2}{5}$; $\eta = \frac{3}{5}$. Die Axenabschnitte sind $-\frac{5}{2}$ und $-\frac{5}{3}$, hingegen $\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $1 = \frac{5}{\sqrt{13}}$.

b) Die Gleichung

$$3\xi + 5\eta + 1 = 0 \text{ oder } 3\alpha + 5\beta + 1 = 0$$

stellt den Punkt P_1 (3, 5), die Gleichung

$$12\xi - 7\eta - 4 = 0 \text{ oder } 12\alpha - 7\beta - 41 = 0$$

den Punkt $P_2 \left(-3, \frac{7}{4}\right)$ vor.

c) Alle Geraden, welche vom Nullpunkte den Abstand $-1 = r$ haben, umhüllen einen aus dem Nullpunkte mit dem Radius r beschriebenen Kreis. Da hier

$$\xi = -\frac{\alpha}{r};\ \eta = -\frac{\beta}{r};$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2} = \frac{1}{r^2},$$

ist

$$r^2(\xi^2 + \eta^2) - 1 = 0$$

die Gleichung, welcher die Coordinaten der Tangenten des Kreises genügen müssen, d. h. die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten.

d) Die Mittelsenkrechte der von den Punkten F (0, p) und A (t, 0) bestimmten Strecke verändert ihre Lage und umhüllt eine Linie, wenn sich A auf der x-Axe bewegt. FA hat den Halbierungspunkt $M \left(\frac{t}{2}, \frac{p}{2}\right)$ und die Richtung t : — p, folglich ist die Gleichung der Mittelsenkrechten

$$t\left(x - \frac{t}{2}\right) - p\left(y - \frac{p}{2}\right) = 0$$

oder

$$\frac{-2t}{t^2 - p^2} x + \frac{2p}{t^2 - p^2} y + 1 = 0;$$

wenn aber ξ und η ihre Coordinaten sind, wird die Mittelsenkrechte auch durch die Gleichung

$$\xi x + \eta y + 1 = 0.$$

repräsentiert; daher ist

$$\xi = \frac{-2t}{t^2 - p^2}; \ \eta = \frac{2p}{t^2 - p^2}$$

und durch Elimination des Parameters t ergibt sich

$$p(\xi^2 - \eta^2) - 2\eta = 0$$

als Gleichung der von allen Mittelsenkrechten umhüllten Linie, der man auch die Form

$$p(\alpha^2 - \beta^2) - 2\beta l = 0$$

geben kann, um sie z. B. auf das Coordinatensystem $x'(4:3:15)$; $y'(-3:4:15)$ zu transformieren. Mittelst der Formeln (III, a)

$$\alpha = \frac{4}{5}\alpha' - \frac{3}{5}\beta'$$
$$\beta = \frac{3}{5}\alpha' + \frac{4}{5}\beta'$$
$$l = 3\alpha' + 3\beta' + l'$$

findet man zunächst, die Strichweiser unterdrückend,

$$(7p - 90)\alpha^2 - (48p + 210)\alpha\beta - (7p + 120)\beta^2 - 30\alpha l - 40\beta l = 0,$$

also wenn man durch l^2 dividiert und ξ, η statt $\frac{\alpha}{l}$, $\frac{\beta}{l}$ einführt

$$(7p - 90)\xi^2 - (48p + 210)\xi\eta - (7p + 120)\eta^2 - 30\xi - 40\eta = 0.$$

e) Man construiere die Geraden $g_1\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{5}\right)$; $g_2(12:5:26)$; $g_3(0:2:7)$; $g_4(3:0:11)$; $g_5(2:3:0)$ und gebe die Coordinaten der Geraden g_2 bis g_5 an.

f) Man construiere die Punkte

$$3\xi - 7\eta + 1 = 0;$$
$$-2\xi + 3\eta + 2 = 0;$$
$$-2\xi + 3\eta - 2 = 0$$

und gebe die Gleichungen der Punkte

$$P_1(2,3);\ P_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{7}\right);\ P_3\left(\frac{3}{5}, 0\right);\ P_4\left(0, -\frac{7}{4}\right)$$

in der Normalform und in der allgemeinen Form an.

g) Man transformiere die Gleichung

$$3\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0.$$

Auf das neue Coordinatensystem $P_0(1,1)$; $x'(1:1)$; $y'(-1:1)$.

27. Verwendung der Liniencoordinaten bei Aufgaben über Punkte und Geraden. Um das Verständnis des Gebrauches der

Liniencoordinaten zu fördern, sei eine Reihe von Fundamentalaufgaben angeführt.

I. Der Abstand des durch seine Gleichung

$$a_0\,\xi + b_0\,\eta + c_0 = 0$$

gegebenen Punktes P_0 von der Geraden $g_i(\xi_i, \eta_i)$ wird mit Hilfe der Coordinaten $\frac{a_0}{c_0}, \frac{b_0}{c_0}$ desselben und der Gleichung $\xi_i x + \eta_i y + 1 = 0$ der Geraden gefunden:

$$t_{0i} = \frac{a_0\,\xi_i + b_0\,\eta_i + c_0}{c_0\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}}.$$

II. Um die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden $g_1(\xi_1, \eta_1)$; $g_2(\xi_2, \eta_2)$ aufzustellen, hat man auszudrücken, dass eine Gerade $g(\xi, \eta)$ durch diesen Punkt geht, d. h. dass alle drei Geraden einen Punkt gemein haben. Mit Hilfe der Gleichungen der Geraden findet man

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

III. Soll ein Punkt in der Richtung $a:b$ vom Nullpunkte aus auf der Geraden $g_0(\xi_0, \eta_0)$ liegen, so hat seine Gleichung die Form

$$a\,\xi + b\,\eta + c = 0,$$

worin c unbekannt ist. Wegen der Lage des Punktes in g_0 ist

$$a\,\xi_0 + b\,\eta_0 + c = 0.$$

Daraus folgt $c = -(a\,\xi_0 + b\,\eta_0)$ und man hat als Gleichung des Punktes

$$a(\xi - \xi_0) + b(\eta - \eta_0) = 0.$$

Was stellt die Gleichung

$$\frac{\xi - \xi_0}{a} = \frac{\eta - \eta_0}{b}$$

vor?

IV. Die Fläche des Dreieckes der Geraden $g_1(\xi_1, \eta_1)$; $g_2(\xi_2, \eta_2)$; $g_3(\xi_3, \eta_3)$ wird mittelst der Gleichungen derselben berechnet:

$$2f = \frac{\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_3 & \eta_3 \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}}.$$

V. Durch lineare Combination der Gleichungen der Punkte P_1, P_2

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0 \text{ oder } N_1 = 0;$$
$$x_2 \xi + y_1 \eta + 1 = 0 \text{ oder } N_2 = 0$$

erhält man die Gleichung

$$(x_1 \xi + y_1 \eta + 1) - \lambda (x_2 \xi + y_2 \eta + 1) = 0 \text{ oder } N_1 - \lambda N_2 = 0$$

eines Punktes P_3, aus deren Normalform

$$\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \xi + \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \eta + 1 = 0;$$

man sieht, dass P_3 auf der Verbindungslinie $P_1 P_2$ liegt und das Theilverhältnis λ in Bezug auf P_1 und P_2 besitzt. Der Factor λ hat also eine geometrische Bedeutung: $\lambda = (P_1 P_2 P_3)$.

Aus den Gleichungen in allgemeiner Form

$$P_1 = 0;$$
$$P_2 = 0$$

erhält man auf demselben Wege

$$P_1 - \lambda P_2 = 0$$

oder, weil

$$N_1 = \frac{P_1}{c_1};\ N_2 = \frac{P_2}{c_2},$$

auch

$$N_1 - \lambda \frac{c_2}{c_1} N_2 = 0,$$

so dass in diesem Falle $\lambda \cdot \frac{c_2}{c_1} = (P_1 P_2 P_3)$ und $\lambda = \frac{c_1}{c_2} (P_1 P_2 P_3)$, also der Factor λ dem Theilverhältnisse des Punktes P_3 bloß proportional ist.

Aus dem Gesagten folgt, dass die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} P_3 \ldots N_1 - \lambda N_2 = 0 \\ P_4 \ldots N_1 + \lambda N_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0 \\ \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = 0 \end{array}\right\}$$

harmonisch sind zu den Punkten P_1 und P_2; ebenso die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} P_1 - \lambda P_2 = 0 \\ P_1 + \lambda P_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0 \\ \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Der Halbierungspunkt der Strecke $P_1 P_2$ und der unendlich ferne Punkt der Geraden $P_1 P_2$ haben die Theilverhältnisse -1 und 1, daher sind ihre Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} N_1 + N_2 = 0 \\ N_1 - N_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{r} \frac{P_1}{c_1} + \frac{P_2}{c_2} = 0 \\ \frac{P_1}{c_1} - \frac{P_2}{c_2} = 0 \end{array}\right\}.$$

VI. Das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \end{array}\right\}$$

repräsentiert die Verbindungslinie $P_1 P_2$, weil es nur von deren Coordinaten befriedigt wird. Die letzteren werden durch Auflösung der Gleichungen erhalten.

VII. Die Gleichung eines beliebigen Punktes der Geraden $P_1 P_2$ ist

$$P_1 - \lambda P_2 = 0.$$

Soll der Punkt auch auf der Geraden $g_0 (\xi_0, \eta_0)$ liegen, so muss

$$P_{10} - \lambda P_{20} = 0; \ \lambda = \frac{P_{10}}{P_{20}}$$

sein, und die Gleichung des Punktes ist nun

$$\frac{P_1}{P_{10}} - \frac{P_2}{P_{20}} = 0.$$

VIII. In dem Dreieck der Punkte

$$N_1 = 0; \ N_2 = 0; \ N_3 = 0$$

sind die Gleichungen der Halbierungspunkte der Seiten:

$$N_1 + N_2 = 0; \ N_2 + N_3 = 0; \ N_3 + N_1 = 0;$$

jene der unendlich fernen Punkte:

$$N_1 - N_2 = 0; \ N_2 - N_3 = 0; \ N_3 - N_1 = 0;$$

da

$$(N_1 + N_2) - (N_2 + N_3) \equiv N_1 - N_3$$

u. s. w. liegt immer der unendlich ferne Punkt einer Seite auf der Verbindungslinie der Halbierungspunkte der beiden anderen, also sind diese beiden Geraden parallel.

Die drei Schwerlinien sind durch die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{r} N_1 + N_2 = 0 \\ N_3 = 0 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r} N_2 + N_3 = 0 \\ N_1 = 0 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r} N_3 + N_1 = 0 \\ N_2 = 0 \end{array}\right\}$$

repräsentiert. Durch Addition erhält man in jedem System immer dieselbe Gleichung

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0$$

eines Punktes, durch welchen also die drei Schwerlinien gehen (Schwerpunkt).

28. Imaginäre Elemente. Bei den Untersuchungen der analytischen Geometrie können sich durch Auflösung von Gleichungen zweiten oder höheren Grades für die Coordinaten eines Punktes, einer Geraden oder einer Richtung imaginäre Werte ergeben; auch können Gleichungen mit imaginären Coëfficienten auftreten oder nur durch imaginäre Coordinaten befriedigt werden. Durch die Ausscheidung solcher Fälle müsste die geometrische Interpretation der Gleichungen Lücken aufweisen und man wäre oft genöthigt, den Geltungsbereich von Sätzen durch Anführung von Ausnahmen einzuschränken, wodurch die Allgemeinheit derselben beeinträchtigt würde. Das wird vermieden. wenn man in solchen Fällen von imaginären Punkten, Geraden, Richtungen oder auch von imaginären Linien spricht und diese ebenso behandelt. wie reale Punkte, Geraden etc. Dieser Vorgang ist umsomehr geboten. als durch imaginäre Gebilde wieder reale Gebilde erzeugt werden können, z. B. wenn sich imaginäre Geraden in realen Punkten schneiden oder die Verbindungslinien imaginärer Punkte real sind u. s. w.

---

3. Abschnitt.

Linien zweiter Ordnung.

29. Die Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten. Die Gleichung zweiten Grades

$$a z^2 + b z + c = 0$$

hat die zwei Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ z_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}\right\},$$

die real ungleich, gleich oder imaginär sind, je nachdem $b^2 - 4ac \gtreqless 0$ ist.

Besondere Fälle ergeben sich, wenn Coëfficienten verschwinden: Ist $c = 0$, so nimmt die Gleichung die Form

$$z(az + b) = 0$$

an, d. h. es wird

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_2 = -\frac{b}{a} \end{array} \right\}.$$

Ist $b = 0$, so hat man es mit der rein quadratischen Gleichung

$$az^2 + c = 0$$

zu thun, welche die entgegengesetzt gleichen Wurzeln

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \\ z_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{array} \right\}$$

besitzt. Diese sind real, wenn $\frac{c}{a} < 0$, imaginär, wenn $\frac{c}{a} > 0$.

Ist $b = 0$ und $c = 0$, dann reduciert sich die Gleichung auf

$$z^2 = 0$$

und hat die Wurzeln

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Wird endlich $a = 0$, so geht die quadratische Gleichung in die lineare

$$bz + c = 0$$

über, welche nur über eine Wurzel Aufschluss gibt. Dividiert man aber früher mit z^2 und setzt erst in der Gleichung

$$a + b \cdot \frac{1}{z} + c\left(\frac{1}{z}\right)^2 = 0,$$

$a = 0$, so bleibt

$$\frac{1}{z}\left(b + c\frac{1}{z}\right) = 0,$$

d. h. es ist

$$\frac{1}{z_1} = 0; \ \frac{1}{z_2} = -\frac{b}{c},$$

also

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \infty \\ z_2 = -\frac{c}{b} \end{array} \right\}.$$

Demnach bedeutet das Verschwinden des Coëfficienten von z^2, dass eine Wurzel der Gleichung unendlich groß geworden ist. Bei der vollständigen Gleichung ergibt sich für Summe, Product und Differenz der Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 &= \frac{c}{a} \\ z_1 - z_2 &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \end{aligned}\right\}.$$

Daher sind Summe und Product — reale Coëfficienten vorausgesetzt — immer real, während die Differenz bei realen Wurzeln real, bei imaginären Wurzeln rein imaginär ist.

Setzt man

$$b = -a(z_1 + z_2);$$
$$c = a\, z_1 z_2$$

in die Gleichung

$$a z^2 + b z + c = 0$$

ein, so geht diese nach Division mit a über in

$$z^2 - (z_1 + z_2) z + z_1 z_2 = 0$$

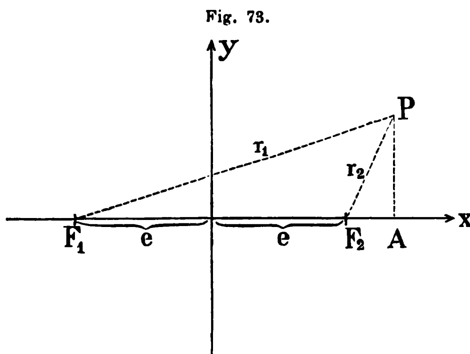
und zeigt in dieser Form, dass das Gleichungspolynom durch das Product der sogenannten Wurzelfactoren $z - z_1$ und $z - z_2$ ersetzt werden kann:

$$(z - z_1)\,(z - z_2) = 0.$$

30. Kegelschnitte. Ellipse, Hyperbel und Parabel werden gewöhnlich unter der gemeinsamen Bezeichnung »Kegelschnitte« zusammengefasst, weil ein Kreiskegel von einer Ebene nach einer von diesen Linien geschnitten wird. Der Kreis kann als ein specieller Fall der Ellipse, das Geradenpaar als ein degenerierter Kegelschnitt angesehen werden. Die Definitionen der Linien durch charakteristische, altbekannte Eigenschaften dienen als Grundlage für die Aufstellung ihrer Gleichungen.

I. Die Ellipse ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten — den Brennpunkten — eine constante Summe haben.

Fig. 73.



Der Einfachheit wegen seien (Fig. 73) die Brennpunkte $F_1(-e, 0)$ und $F_2(e, 0)$ auf der x-Axe angenommen, so dass $F_1 F_2 = 2e$. Ist dann $2a$ die Summe der Abstände $F_1 P = r_1$ und $F_2 P = r_2$ des des Punktes $P(x, y)$ von den

Brennpunkten, so muss offenbar $2a > 2e$, also $a > e$ sein. Die oben gegebene Definition der Ellipse ist durch die Gleichung

$$r_1 + r_2 = 2a$$

ausgedrückt.

Da

$$r_1^2 = (x + e)^2 + y^2,$$
$$r_2^2 = (x - e)^2 + y^2$$

erhält man

$$r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2 + e^2),$$
$$r_1^2 - r_2^2 = 4ex$$

und weil

$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2a(r_1 - r_2),$$
$$r_1 - r_2 = 2\frac{e}{a}x.$$

Aus den Gleichungen

$$r_1 + r_2 = 2a,$$
$$r_1 - r_2 = 2\frac{e}{a}x$$

ergibt sich

$$r_1 = a + \frac{e}{a}x,$$
$$r_2 = a - \frac{e}{a}x$$

und

$$r_1^2 + r_2^2 = 2\left(a^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2\right).$$

Durch Vergleich der beiden Werte für $r_1^2 + r_2^2$ folgt

$$x^2 + y^2 + e^2 = a^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2;$$
$$\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - e^2;$$
$$\frac{a^2 - e^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - e^2;$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0.$$

Setzt man die positive Größe $a^2 - e^2 = b^2$, so ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

die zwischen den Coordinaten des Punktes P zufolge der Voraussetzung bestehende Beziehung, d. h. die Gleichung der Ellipse. Sie ist sowohl in Bezug auf x als auch in Bezug auf y rein quadratisch. daher ist die Ellipse symmetrisch in Bezug auf die Coordinatenaxen: diese sind die Axen der Ellipse und werden von ihr in je zwei Punkten, den Scheitelpunkten, geschnitten, die in den Abständen a und b symmetrisch zum Nullpunkte (Mittelpunkt der Ellipse) liegen.

Ähnlich der Gleichung der Ellipse ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

zusammengesetzt, welche durch reale Werte von x und y nicht befriedigt werden kann. Man nennt das von ihr repräsentierte Gebilde eine imaginäre Ellipse.

Wird $b = a$, also $e = 0$, so geht die Ellipse in einen Kreis vom Radius a, und ihre Gleichung in

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

über. Der imaginären Ellipse entspricht der imaginäre Kreis mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + a^2 = 0.$$

II. Die Hyperbel ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten — den Brennpunkten — eine constante Differenz haben.

Unter Beibehaltung der früheren Annahmen ist jetzt

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

wobei aber $a < e$, daher

$$r_1{}^2 - r_2{}^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = (r_1 + r_2)\, 2a = 4ex,$$

also

$$r_1 + r_2 = 2\frac{e}{a}x.$$

Aus den Gleichungen

$$r_1 + r_2 = 2\frac{e}{a}x;$$

$$r_1 - r_2 = 2a$$

findet man

$$r_1 = \frac{e}{a} x + a;$$

$$r_2 = \frac{e}{a} x - a.$$

Ebenso wie bei der Ellipse ergibt sich die Gleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0,$$

oder wenn man die negative Größe $a^2 - e^2 = -b^2$ setzt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Auch hier fallen die Axen der Linie mit den Coordinatenaxen zusammen; von den zwei Paaren Scheitelpunkte ist nur jenes auf der x-Axe real.

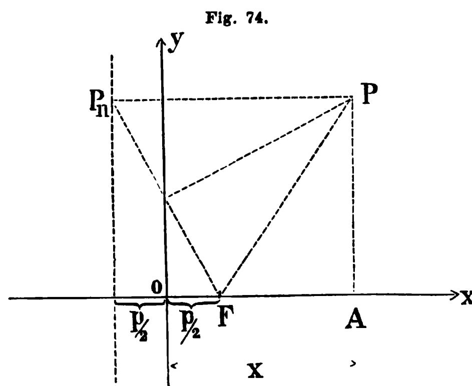
Die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

stellt offenbar auch eine Hyperbel vor, die aber nur auf der y-Axe reale Scheitelpunkte besitzt.

III. Die Parabel ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von einem festen Punkte — dem Brennpunkte — und von einer festen Geraden — der Leitlinie — einander gleich sind.

Fig. 74.



Nimmt man den Brennpunkt F $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ auf der x-Axe und die Leitlinie im Abstande $-\frac{p}{2}$ parallel zur y-Axe an (Fig. 74), so dass also der Brennpunkt den Abstand p von der Leitlinie hat, dann folgt wegen $FP = P_n P$ und

$$\overline{FP}^2 = \overline{P_n P}^2$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2$$

oder nach Reduction

$$y^2 = 2px$$

als Gleichung der Parabel, aus welcher man sieht, dass die Linie zur x-Axe symmetrisch ist, durch den Nullpunkt geht und (p positiv vorausgesetzt) gänzlich auf der positiven Seite der y-Axe liegt.

IV. Das aus zwei beliebigen Geraden

$$g_1 = 0 \text{ und } g_2 = 0$$

gebildete Geradenpaar hat die Gleichung

$$g_1 g_2 = 0$$

oder entwickelt

$$a_1 a_2 x^2 + b_1 b_2 y^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) x y + (a_1 c_2 + a_2 c_1) x + \\ + (b_1 c_2 + b_2 c_1) y + c_1 c_2 = 0.$$

V. Alle im vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen sind vom zweiten Grade. Die von ihnen repräsentierten Linien sind daher von der zweiten Ordnung. Entsprechend den besonderen Annahmen bei Ellipse, Kreis, Hyperbel und Parabel ergaben sich unvollständige, aber einfache und charakteristische Gleichungsformen, während die Gleichung des Geradenpaares, wo keinerlei Einschränkungen bezüglich der Lage gemacht wurden, die vollständige Form aufweist, die sich auch bei den Kegelschnitten eingestellt hätte, wären bezüglich der Lage der Brennpunkte u. s. w. allgemeine Annahmen gemacht worden — die übrigens durch Transformation der betreffenden Gleichungen zu erzielen ist. Man schließt daraus, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen x und y eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, einen Kreis oder ein Geradenpaar vorstellen kann. Unter welchen Bedingungen einer dieser Fälle eintritt und ob auch noch andere Linien in Frage kommen können, das bildet den Gegenstand besonderer Untersuchungen.

31. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades. Symbolische Bezeichnungen und Rechnungsoperationen. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades wird vortheilhaft in der Form geschrieben

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0.$$

Setzt man

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} x y = Q;$$
$$2 a_{13} x + 2 a_{23} y = L;$$
$$a_{33} = C,$$

bezeichnet ferner das ganze Gleichungspolynom mit U, so ergeben sich die mehr oder minder ausführlichen Abkürzungen

$$Q + L + C = 0$$

und

$$U = 0.$$

Die an das Quadrat eines linearen Trinoms erinnernde Form des Gleichungspolynoms führt auf dessen Darstellung durch das symbolische Quadrat

$$U \equiv \{a_1 x + a_2 y + a_3\}^2,$$

welches so zu verstehen ist, dass nach Durchführung der angezeigten Rechnungsoperation in dem erhaltenen Ausdruck

$$a_1{}^2 x^2 + a_2{}^2 y^2 + 2 a_1 a_2 x y + 2 a_1 a_3 x + 2 a_2 a_3 y + a_3{}^2$$

an die Stelle eines Productes $a_i a_k$ der symbolischen Coëfficienten a_i und a_k der Coëfficient a_{ik} gesetzt wird, so dass aus $a_1{}^2 = a_1 . a_1$ der Coëfficient a_{11}, aus $a_1 . a_2$ der Coëfficient a_{12} entsteht u. s. w. Dadurch geht dieser Ausdruck in das Gleichungspolynom über. Die Einhaltung des beschriebenen Vorganges möge in der Folge durch geschweifte Klammern angedeutet und auf Productbildungen ausgedehnt werden; dabei ist zu beachten, dass der Gleichheit der Producte $a_i . a_k$ und $a_k . a_i$ die Gleichheit der Coëfficienten a_{ik} und a_{ki} entspricht. Eine wichtige Form des Polynoms U geht hervor, wenn man das symbolische Quadrat als Product von zwei gleichen Factoren behandelt und den einen mit jedem Theile des anderen multipliciert. Man erhält

$$U \equiv \{a_1 x + a_2 y + a_3\} \{a_1 x + a_2 y + a_3\} \equiv \{a_1 x\} \{a_1 x + a_2 y + a_3\} + \\ + \{a_2 y\} \{a_1 x + a_2 y + a_3\} + \{a_3\} \{a_1 x + a_2 y + a_3\};$$

lässt man hierin bloß die symbolischen Coëfficienten in die zweiten Factoren eingehen, so folgt

$$U \equiv (a_{11} x + a_{12} y + a_{13}) x + (a_{21} x + a_{22} y + a_{23}) y + \\ + (a_{31} x + a_{32} y + a_{33}),$$

wo nach Durchführung der symbolischen Operation an die Stelle der sie anzeigenden geschwungenen die gewöhnlichen runden Klammern getreten sind. Durch Einführung der Bezeichnungen

$$u_1 \equiv a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13};$$
$$u_2 \equiv a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23};$$
$$u_3 \equiv a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33};$$
$$(a_{ik} = a_{ki})$$

wird

$$U \equiv u_1\,x + u_2\,y + u_3.$$

Die Einsetzung der Coordinaten x_i, y_i des Punktes P_i in die Ausdrücke u_1, u_2, u_3, U soll durch Hinzufügung des einfachen oder doppelten Weisers i angezeigt werden, so dass

$$u_{1i} \equiv a_{11}\,x_i + a_{12}\,y_i + a_{13};$$
$$u_{2i} \equiv a_{21}\,x_i + a_{22}\,y_i + a_{23};$$
$$u_{3i} \equiv a_{31}\,x_i + a_{32}\,y_i + a_{33};$$
$$U_{ii} \equiv \{a_1\,x_i + a_2\,y_i + a_3\}^2 \equiv \{a_1\,x_i + a_2\,y_i + a_3\}\,\{a_1\,x_i + a_2\,y_i + a_3\} \equiv$$
$$\equiv u_{1i}\,x_i + u_{2i}\,y_i + u_{3i} \equiv a_{11}\,x_i^2 + a_{22}\,y_i^2 + 2\,a_{12}\,x_i\,y_i + 2\,a_{13}\,x_i +$$
$$+ 2\,a_{23}\,y_i + a_{33}.$$

Das öfter auftretende symbolische Product ungleicher Factoren $\{a_1\,x_i + a_2\,y_i + a_3\}$ und $\{a_1\,x_k + a_2\,y_k + a_3\}$ soll je nach der Reihenfolge der letzteren mit U_{ik} oder U_{ki} bezeichnet werden, indem man

$$U_{ik} \equiv \{a_1\,x_i + a_2\,y_i + a_3\}\,\{a_1\,x_k + a_2\,y_k + a_3\} \equiv u_{1i}\,x_k + u_{2i}\,y_k + u_{3i};$$
$$U_{ki} \equiv \{a_1\,x_k + a_2\,y_k + a_3\}\,\{a_1\,x_i + a_2\,y_i + a_3\} \equiv u_{1k}\,x_i + u_{2k}\,y_i + u_{3k}$$

setzt. Beide Ausdrücke sind offenbar identisch:

$$U_{ik} \equiv U_{ki} \equiv a_{11}\,x_i\,x_k + a_{22}\,y_i\,y_k + a_{12}\,(x_i\,y_k + x_k\,y_i) + a_{13}\,(x_i + x_k) +$$
$$+ a_{23}\,(y_i + y_k) + a_{33}.$$

Werden in demselben x_k und y_k durch x und y ersetzt, so möge der dadurch entstehende Ausdruck mit U_i bezeichnet werden, so dass

$$U_i \equiv u_{1i}\,x + u_{2i}\,y + u_{3i} \equiv u_1\,x_i + u_2\,y_i + u_3.$$

Durch Einsetzung der Coordinaten x_i, y_i oder x_k, y_k des Punktes P_i oder P_k geht der Ausdruck U_i in U_{ii} oder U_{ik} über.

Nach den vorstehenden Ausführungen sind die folgenden Bezeichnungen leicht verständlich:

$$Q \equiv \{a_1\,x + a_2\,y\}^2;$$
$$Q_{ii} \equiv \{a_1\,x_i + a_2\,y_i\}^2;$$

$$V \equiv \{a_1 \alpha + a_2 \beta\}^2 \equiv a_{11} \alpha^2 + a_{22} \beta^2 + 2 a_{12} \alpha \beta \equiv \{a_1 \alpha + a_2 \beta\} \{a_1 \alpha + a_2 \beta\}$$
$$\equiv (a_{11} \alpha + a_{12} \beta) \alpha + (a_{21} \alpha + a_{22} \beta) \beta \equiv v_1 \alpha + v_2 \beta;$$
$$v_1 \equiv a_{11} \alpha + a_{12} \beta; \ v_2 \equiv a_{21} \alpha + a_{22} \beta; \ v_3 \equiv a_{31} \alpha + a_{32} \beta;$$
$$V_{ii} \equiv \{a_1 \alpha_i + a_2 \beta_i\}^2 \equiv v_{1i} \alpha_i + v_{2i} \beta_i;$$
$$v_{1i} \equiv a_{11} \alpha_i + a_{12} \beta_i; \ v_{2i} \equiv a_{21} \alpha_i + a_{22} \beta_i; \ v_{3i} \equiv a_{31} \alpha_i + a_{32} \beta_i;$$
$$V_{ik} \equiv \{a_1 \alpha_i + a_2 \beta_i\} \{a_1 \alpha_k + a_2 \beta_k\} \equiv v_{1i} \alpha_k + v_{2i} \beta_k;$$
$$V_{ki} \equiv \{a_1 \alpha_k + a_2 \beta_k\} \{a_1 \alpha_i + a_2 \beta_i\} \equiv v_{1k} \alpha_i + v_{2k} \beta_i;$$
$$V_{ik} \equiv V_{ki} \equiv a_{11} \alpha_i \alpha_k + a_{22} \beta_i \beta_k + a_{12} (\alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i).$$

32. Die Discriminante. Die aus den Coëfficienten der linearen Ausdrücke

$$u_1 \equiv a_{11} x + a_{12} y + a_{13};$$
$$u_2 \equiv a_{21} x + a_{22} y + a_{23};$$
$$u_3 \equiv a_{31} x + a_{32} y + a_{33}$$

gebildete, wegen $a_{ik} = a_{ki}$ symmetrische Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wird die Discriminante der Gleichung $U = 0$ genannt. In ihr sind die Unterdeterminanten der Elemente der Hauptdiagonale symmetrisch und jene der symmetrisch zu dieser Diagonale liegenden Elemente einander gleich:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23}^2; \ A_{12} = A_{21} = a_{13} a_{23} - a_{12} a_{33} \\ A_{22} = a_{11} a_{33} - a_{13}^2; \ A_{13} = A_{31} = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} \\ A_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2; \ A_{23} = A_{32} = a_{12} a_{13} - a_{23} a_{11} \end{array}\right\}.$$

Mit Rücksicht auf die Eigenschaften reciproker Determinanten findet man (Determ. Art. 13, *b*)

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{22} A_{33} - A_{23}^2 = a_{11} A;$$
$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} A_{33} - A_{13}^2 = a_{22} A;$$
$$-\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{13} A_{23} - A_{12} A_{33} = a_{12} A,$$

also wenn $A_{33} = 0$,

$$-A_{23}^2 = a_{11} A; \ -A_{13}^2 = a_{22} A; \ A_{13} A_{23} = a_{12} A. \quad . \quad . \quad (48$$

Demnach haben dann a_{11} und a_{22} gleiche Vorzeichen, während A diesen beiden Coëfficienten entgegengesetzt bezeichnet ist. Wenn hingegen $A = 0$, so folgt aus

$$A_{22}\,A_{33} = A_{23}^2;\ A_{11}\,A_{33} = A_{13}^2,$$

dass die Unterdeterminanten A_{11}, A_{22}, A_{33} gleich bezeichnete Größen sein müssen. Wenn schließlich $A = 0$ und $A_{33} = 0$, so ist auch $A_{13} = 0$ und $A_{23} = 0$. Da nun $a_{i1}\,A_{k1} + a_{i2}\,A_{k2} = 0$ $(i, k = 1, 2)$, verschwinden A_{11}, A_{22}, A_{12} in diesem Falle nur gleichzeitig.

33. Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades. Die Transformation der Gleichung $U = 0$ auf ein neues Coordinatensystem (x', y'), dessen Axen den alten im gleichen Sinne parallel sind, geschieht mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$x = x_0 + x';$$
$$y = y_0 + y',$$

wenn P_0 der neue Nullpunkt ist. Dadurch geht die Gleichung

$$\{a_1\,x + a_2\,y + a_3\}^2 = 0$$

in

$$\{a_1\,(x_0 + x') + a_2\,(y_0 + y') + a_3\}^2 = 0$$

oder

$$\{(a_1\,x' + a_2\,y') + (a_1\,x_0 + a_2\,y_0 + a_3)\}^2 = 0,$$

also nach Durchführung der angezeigten Operation und Weglassung der Strichweiser in

$$Q + 2\,u_{10}\,x + 2\,u_{20}\,y + U_{00} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49$$

über. Der Übergang auf das beliebige neue Coordinatensystem, dessen Nullpunkt P_0 ist und dessen Axen x' und y' die Richtungscoordinaten α_1, β_1 und α_2, β_2 haben, wird durch die Gleichungen

$$x = x_0 + \alpha_1\,x' + \alpha_2\,y';$$
$$y = y_0 + \beta_1\,x' + \beta_2\,y'$$

vermittelt. Man erhält

$$\{a_1\,(x_0 + \alpha_1\,x' + \alpha_2\,y') + a_2\,(y_0 + \beta_1\,x' + \beta_2\,y') + a_3\}^2 = 0$$

oder

$$\{(a_1\,\alpha_1 + a_2\,\beta_1)\,x' + (a_1\,\alpha_2 + a_2\,\beta_2)\,y' + (a_1\,x_0 + a_2\,y_0 + a_3)\}^2 = 0.$$

woraus durch Ausführung der angezeigten Operation und Weglassung der Strichweiser die Gleichung

$$V_{11}x^2 + V_{22}y^2 + 2V_{12}xy + 2(u_{10}\alpha_1 + u_{20}\beta_1)x + \\ + 2(u_{10}\alpha_2 + u_{20}\beta_2)y + U_{00} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50$$

hervorgeht. Man überzeugt sich leicht, dass $V_{11} + V_{22} = a_{11} + a_{22}$; $V_{11}V_{22} - V_{12}{}^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$ (Invarianten).

34. Schnittpunkte der Linien zweiter Ordnung mit den Coordinatenaxen und mit beliebigen Geraden. Die Schnittpunkte der Linie $U = 0$ mit den Coordinatenaxen sind durch die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{matrix} U = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} U = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\}$$

dargestellt. Aus denselben folgen die Gleichungen

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0 \text{ und } a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

durch deren Auflösung sich die Abstände der Schnittpunkte vom Nullpunkte des Coordinatensystems ergeben:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-a_{13} \pm \sqrt{a_{13}{}^2 - a_{11}a_{33}}}{a_{11}} = \frac{-a_{13} \pm \sqrt{-A_{22}}}{a_{11}} \\ y &= \frac{-a_{23} \pm \sqrt{a_{23}{}^2 - a_{22}a_{33}}}{a_{22}} = \frac{-a_{23} \pm \sqrt{-A_{11}}}{a_{22}} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad (51$$

daher wird die Linie von jeder Axe in zwei Punkten geschnitten, die real getrennt, zusammenfallend oder imaginär sein können, je nachdem bezüglich der x-Axe $A_{22} \lesseqgtr 0$, bezüglich der y-Axe $A_{11} \lesseqgtr 0$.

Die Schnittpunkte der Linie $U = 0$ mit der Geraden $P_i P_k$ ergeben sich aus folgender Betrachtung: Der Schnittpunkt P habe in Bezug auf die Punkte P_i und P_k das Theilverhältnis λ. Seine Coordinaten

$$x = \frac{x_i - \lambda x_k}{1 - \lambda};\ y = \frac{y_i - \lambda y_k}{1 - \lambda}$$

genügen der Gleichung der Linie

$$\{a_1 x + a_2 y + a_3\}^2 = 0;$$

durch Einsetzung erhält man

$$\left\{a_1 \frac{x_i - \lambda x_k}{1 - \lambda} + a_2 \frac{y_i - \lambda y_k}{1 - \lambda} + a_3 \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda}\right\}^2 = 0;$$

nach Weglassung des Factors $\frac{1}{(1-\lambda)^2}$ und Trennung der Glieder mit oder, ohne λ ergibt sich

$$\{(a_1 x_i + a_2 y_i + a_3) - \lambda (a_1 x_k + a_2 y_k + a_3)\}^2 = 0$$

und nach Ausführung der symbolischen Operation:

$$U_{ii} - 2 U_{ik} \lambda + U_{kk} \lambda^2 = 0; \quad \ldots \ldots \quad (52$$

da sich aus dieser in λ quadratischen Gleichung zwei reale, verschiedene oder gleiche, oder zwei imaginäre Werte für λ ergeben, kann man den Satz aussprechen:

»Eine Linie zweiter Ordnung wird von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten, die real getrennt, zusammenfallend oder imaginär sein können.«

Aus dem berechneten Theilverhältnisse eines Schnittpunktes ergeben sich seine Coordinaten ohne Schwierigkeit.

Um die Punkte zu ermitteln, in welchen die Linie $U = 0$ von der Geraden getroffen wird, die durch den Punkt $P_0 (x_0, y_0)$ geht und die Richtungscoordinaten α, β hat, bezeichnet man mit r den unbekannten Abstand eines derselben von P_0; die Coordinaten $x = x_0 + r\alpha$; $y = y_0 + r\beta$ dieses Punktes genügen der Gleichung

$$\{a_1 x + a_2 y + a_3\}^2 = 0,$$

so dass man

$$\{a_1 (x_0 + r\alpha) + a_2 (y_0 + r\beta) + a_3\}^2 = 0$$

oder

$$\{(a_1 \alpha + a_2 \beta) r + (a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3)\}^2 = 0$$

erhält, woraus die Gleichung

$$V r^2 + 2 (u_{10} \alpha + u_{20} \beta) r + U_{00} = 0 \quad \ldots \quad (53$$

für die Berechnung von r folgt, welche die Existenz von zwei Schnittpunkten neuerlich bestätigt.

Aufgabe.

Man bestimme die Schnittpunkte der Linie

$$18 x^2 + 18 y^2 + 10 x y - 120 x - 118 y + 192 = 0$$

mit den Coordinatenaxen, mit der Verbindungslinie der Punkte $P_1 (7, 2)$, $P_2 (-1, 6)$, ferner mit der durch den Punkt $P_0 (-1, 1)$ und die Richtung $1 : 2$ bestimmten Geraden. Für die allmähliche Berechnung der Werte

$$u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \quad U_{ii} = u_{1i}\,x_i + u_{2i}\,y_i + u_{3i}, \quad U_{ik} = u_{1i}\,x_k + u_{2i}\,y_k + u_{3i},$$
$$v_1, v_2, V$$

bediene man sich hiebei der Discriminante.

35. Die homogene Gleichung zweiten Grades. Die geometrische Bedeutung der homogenen Gleichung

$$Q = 0 \text{ oder } a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{12}\,x\,y = 0$$

ergibt sich durch die Zerlegung des Polynoms Q in lineare Factoren. Durch Division mit y^2 geht nämlich die Gleichung über in

$$a_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\,a_{12}\left(\frac{x}{y}\right) + a_{22} = 0,$$

oder wenn man $\frac{x}{y} = z$ setzt, in die quadratische Gleichung

$$a_{11}\,z^2 + 2\,a_{12}\,z + a_{22} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54$$

mit den Wurzeln

$$z_1 = \frac{-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} + \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}};$$
$$z_2 = \frac{-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} - \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}};$$

die also in der Form (siehe Art. 29)

$$(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

dargestellt werden kann. Durch die Rücksubstitution $z = \frac{x}{y}$ und Multiplication mit y^2 geht daraus die Gleichung

$$(x - z_1\,y)(x - z_2\,y) = 0$$

hervor, welche die Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen

$$x - z_1\,y = 0 \text{ und } x - z_2\,y = 0$$

vorstellt. Diese Geraden gehen durch den Nullpunkt, sind real getrennt, zusammenfallend oder imaginär, je nachdem $A_{33} \lesseqgtr 0$; sie haben offenbar die Richtungsverhältnisse $z_1 : 1$ und $z_2 : 1$, durch welche ihre positiven Richtungen angegeben werden.

Demnach ist

$$\tan\, g_1\,g_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1\,z_2 + 1}$$

oder, weil (Art. 29) $z_1 - z_2 = \frac{2\sqrt{-A_{33}}}{a_{11}}$; $z_1 z_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}$,

$$\tan g_1 g_2 = \frac{2\sqrt{-A_{33}}}{a_{11} + a_{22}}.$$

Sind die Geraden zu einander senkrecht, ist also $g_1 g_2 = \frac{\pi}{2}$; $\tan g_1 g_2 = \infty$, so muss

$$a_{11} + a_{22} = 0$$

sein. Ersetzt man dementsprechend in der Gleichung $Q = 0$ den Coëfficienten a_{22} durch $-a_{11}$ und dividiert dann durch a_{11}, so erhält man

$$x^2 - y^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}} x y = 0,$$

oder, $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \lambda$ setzend,

$$x^2 - y^2 + 2\lambda x y = 0$$

als charakteristische Gleichungsform für ein Paar zu einander senkrechter Geraden.

Die Gleichung des Paares Winkelhalbierungslinien ergibt sich durch folgende Betrachtung. Wird der hohle Winkel $g_1 g_2$ durch die Gerade g halbiert, so ist $g_1 g + g_2 g = 0$, daher auch $\tan g_1 g + \tan g_2 g = 0$. Ist nun $P(x, y)$ ein Punkt von g, hat also diese Gerade das Richtungsverhältnis $x : y$, so findet man aus den Richtungsverhältnissen

$$g_1 \ldots z_1 : 1; \qquad g_2 \ldots z_2 : 1;$$
$$g \ldots x : y; \qquad g \ldots x : y;$$

$$\tan g_1 g = \frac{z_1 y - x}{z_1 x + y}; \quad \tan g_2 g = \frac{z_2 y - x}{z_2 x + y};$$

mithin ist

$$\frac{z_1 y - x}{z_1 x + y} + \frac{z_2 y - x}{z_2 x + y} = 0$$

oder geordnet

$$(z_1 + z_2) x^2 - (z_1 + z_2) y^2 - 2(z_1 z_2 - 1) x y = 0.$$

und weil

$$z_1 + z_2 = \frac{2 a_{12}}{a_{11}}; \; z_1 z_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}},$$

nach einfacher Reduction

$$x^2 - y^2 + \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} xy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55$$

die Gleichung, welcher die Coordinaten eines Punktes der in Betracht gezogenen Winkelhalbierungslinie genügen müssen, die aber der Form nach zwei zu einander senkrechte Geraden, folglich beide Winkelhalbierungslinien vorstellt. Da für diese Gleichung

$$A'_{33} = -1 - \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2 a_{12}}\right)^2 < 0,$$

d. h. A'_{33} immer negativ ist, sind die Winkelhalbierenden immer — auch beim imaginären Geradenpaar — real.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$15 x^2 + 21 y^2 + 44 xy = 0$$

stellt ein reales Geradenpaar vor, weil

$$A_{33} = 15 . 21 - 22^2 = -169 < 0.$$

Durch Auflösung der Gleichung

$$15 z^2 + 44 z + 21 = 0$$

erhält man

$$z_1 = -\frac{3}{5}; \; z_2 = -\frac{7}{3},$$

also sind die Gleichungen der einzelnen Geraden

$$5 x + 3 y = 0 \text{ und } 3 x + 7 y = 0.$$

Ferner ist

$$\tan g_1 g_2 = \frac{2 . 13}{15 + 21} = \frac{13}{18}.$$

Die Winkelhalbierenden sind durch die Gleichung

$$x^2 - y^2 + \frac{21 - 15}{22} xy = 0$$

oder

$$22 x^2 - 22 y^2 + 6 xy = 0$$

repräsentiert.

b) Die Gleichung

$$4 x^2 + 5 y^2 + 4 xy = 0$$

stellt ein Paar imaginärer Geraden vor, weil

$$A_{33} = 20 - 4 = 16 > 0.$$

Hier ist

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i; \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i.$$

Die Gleichungen der einzelnen Geraden sind daher

$$2x + (1 - 2i)y = 0;$$
$$2x + (1 + 2i)y = 0.$$

Ferner ist

$$\tan g_1 g_2 = \frac{8i}{9}$$

und die Gleichung der Winkelhalbierungslinien

$$4x^2 - 4y^2 + 2xy = 0.$$

c) Die Gleichung

$$25x^2 + 9y^2 + 30xy = 0$$

stellt ein Paar zusammenfallender Geraden vor, weil

$$A_{33} = 9 \,.\, 25 - 15^2 = 0.$$

In der That kann sie leicht auf die Form

$$(5x + 3y)^2 = 0$$

gebracht werden.

d) Man untersuche die Gleichungen

$$4x^2 + 29y^2 - 20xy = 0;$$
$$x^2 + 5y^2 + 2xy = 0;$$
$$6x^2 - 10y^2 - 11xy = 0;$$
$$10x^2 + 6y^2 + 19xy = 0;$$
$$x^2 + 2y^2 - 2xy = 0;$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0;$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$$
$$x^2 + y^2 = 0;$$
$$xy = 0.$$

36. Tangenten und Polaren der Linien zweiter Ordnung. Die Schnittpunkte P′ und P″ der Linie $U = 0$ mit der Geraden $P_i P_k$ (Art. 34) sind durch die Gleichung

$$U_{ii} - 2U_{ik}\lambda + U_{kk}\lambda^2 = 0$$

bestimmt, aus welcher sich nämlich ihre Theilverhältnisse in Bezug auf die Punkte P_i und P_k:

$$\lambda' = \frac{U_{ik} + \sqrt{U_{ik}^2 - U_{ii} U_{kk}}}{U_{kk}},$$

$$\lambda'' = \frac{U_{ik} - \sqrt{U_{ik}^2 - U_{ii} U_{kk}}}{U_{kk}}$$

ergeben. Soll die Linie von der Geraden berührt werden, müssen die Punkte P' und P'' zusammenfallen, die Theilverhältnisse also gleich werden, was nur eintreten kann, wenn

$$U_{ii} U_{kk} - U_{ik}^2 = 0.$$

Versteht man unter P_i einen festen, nicht auf der Linie liegenden Punkt ($U_{ii} \gtrless 0$), so drückt diese Gleichung aus, dass die Coordinaten des Punktes P_k der Gleichung

$$U_{ii} U - U_i^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56$$

genügen müssen, damit die Gerade $P_i P_k$ eine Tangente der Linie sei, d. h. damit P_k auf einer durch den festen, gegebenen Punkt P_i gehenden Tangente liege. Daher stellt diese Gleichung die Gesammtheit der Tangenten vor, die aus dem Punkte P_i an die Linie gelegt werden können und weil sie vom zweiten Grade ist, gibt es nur ein Paar solcher Tangenten. Je nach der Lage des Punktes P_i ist dieses Tangentenpaar real oder imaginär. Die Berührungspunkte ergeben sich als gemeinsame Punkte des Tangentenpaares und der Linie aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} U_{ii} U - U_i^2 = 0 \\ U \qquad\quad = 0 \end{array}\right\}$$

oder, weil sich die erste Gleichung wegen der zweiten auf $U_i = 0$ reduciert, aus

$$\left.\begin{array}{l} U_i = 0 \\ U = 0 \end{array}\right\};$$

sie sind also die Schnittpunkte der Linie zweiter Ordnung mit einer Geraden p_i, deren Gleichung $U_i = 0$ in den beiden Formen

$$\left.\begin{array}{c} u_{1i}\, x + u_{2i}\, y + u_{3i} = 0 \\ u_1\, x_i + u_2\, y_i + u_3 = 0 \\ (U_{ii} \gtrless 0) \end{array}\right| \quad \ldots \ldots \quad (57$$

geschrieben werden kann. Die Gerade p_i wird die Polare des Punktes P_i und dieser wieder der Pol der Geraden p_i in Bezug auf die Linie zweiter Ordnung genannt.

So wie die Polare durch den Pol, ist auch der Pol durch die Polare vollkommen bestimmt. Denn soll die Gleichung

$$a_i x + b_i y + c_i = 0$$

die Polare eines Punktes P_i vorstellen, muss die Identität

$$u_{1i} x + u_{2i} y + u_{3i} \equiv \sigma (a_i x + b_i y + c_i)$$

bestehen, wenn σ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, und daraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{1i} &= \sigma a_i; \\ u_{2i} &= \sigma b_i; \\ u_{3i} &= \sigma c_i. \end{aligned}$$

Addiert man, nachdem man mit A_{11}, A_{21}, A_{31}, dann mit $A_{12}, A_{22}\ A_{32}$, endlich mit A_{13}, A_{23}, A_{33} multipliciert hat, so ergibt sich

$$\begin{aligned} A x_i &= \sigma (A_{11} a_i + A_{21} b_i + A_{31} c_i); \\ A y_i &= \sigma (A_{12} a_i + A_{22} b_i + A_{32} c_i); \\ A \quad &= \sigma (A_{13} a_i + A_{23} b_i + A_{33} c_i); \end{aligned}$$

also

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \frac{A_{11} a_i + A_{12} b_i + A_{13} c_i}{A_{31} a_i + A_{32} b_i + A_{33} c_i} \\ y_i &= \frac{A_{21} a_i + A_{22} b_i + A_{23} c_i}{A_{31} a_i + A_{32} b_i + A_{33} c_i} \end{aligned}\right\},$$

womit der Pol durch seine Coordinaten festgelegt erscheint.

Die Polare eines Punktes ist immer real, auch wenn die Tangenten aus demselben und mit ihnen die Berührungspunkte imaginär sind; sie bietet in dem letzteren Falle das Beispiel einer realen Verbindungslinie imaginärer Punkte.

Wird auf der Polare des Punktes P_i ein Punkt P_s angenommen. dessen Coordinaten also der Gleichung $U_i = 0$ genügen müssen, so dass $U_{is} = 0$ wird, dann geht die Gleichung

$$U_{ii} - 2 U_{is} \lambda + U_{ss} \lambda^2 = 0,$$

aus der die Theilverhältnisse der Punkte zu berechnen sind, in welchen die Linie von der Geraden $P_i P_s$ getroffen wird, in

$$U_{ii} + U_{ss} \lambda^2 = 0$$

über und ihre Wurzeln λ', λ'' sind nun entgegengesetzt gleich. Daher

sind die Treffpunkte P' und P'' harmonisch zu den Punkten P_i und P_s. Die Polare hat also die Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte von dem Pole harmonisch getrennt ist durch die Punkte, in welchen die Verbindungslinie beider die Linie zweiter Ordnung trifft und sie kann mit Hilfe dieser Eigenschaft construiert werden. Zu diesem Zwecke zieht man durch den Pol P_i zwei beliebige Geraden g_1 und g_2, welche die Linie in den Punkten P'_1, P''_1 und $P'_2 P''_2$ schneiden. Diese vier Schnittpunkte bestimmen ein vollständiges Viereck, von dem g_1 und g_2 ein Paar Gegenseiten sind; die Verbindungslinie der Schnittpunkte der beiden anderen Paare Gegenseiten (die dem Diagonalpunkte P_i gegenüberliegende Diagonale) ist die gesuchte Polare.

Von der Gleichung

$$U_{ii} U - U_i^2 = 0$$

des Tangentenpaares aus dem Punkte P_i an die Linie $U = 0$ ausgehend, gelangt man zu der Gleichung der Tangente in einem Punkte derselben, wenn man den Punkt P_i auf die Linie rücken lässt. Dadurch wird $U_{ii} = 0$, die Gleichung des Tangentenpaares geht in

$$U_i^2 = 0$$

über und stellt nun die doppelt zählende Gerade $U_i = 0$ vor, in welcher Polare und Tangentenpaar zusammenfallen, welche also die Tangente der Linie in dem Punkte P_i ist, zugleich aber auch die Polare dieses Punktes. Daher ist eine Tangente die Polare ihres Berührungspunktes. Die durchgeführte Untersuchung zeigt, dass die Gleichung

$$U_i = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58$$

die Polare oder Tangente des Punktes P_i repräsentiert, je nachdem $U_{ii} \gtrless 0$ oder $U_{ii} = 0$ und dass der letztere Fall als ein specieller des ersteren angesehen werden kann, so dass die Coordinaten des Berührungspunktes analog jenen des Poles berechnet werden dürfen, wenn die Tangente durch ihre Gleichung gegeben ist.

Anmerkung. Die Gleichung

$$V r^2 + 2(u_{10}\,\alpha + u_{20}\,\beta)\, r + U_{00} = 0$$

(Art. 34), welche die Schnittpunkte einer durch den Punkt P_0 und die Richtungscoordinaten α, β gegebenen Geraden mit der Linie $U = 0$ bestimmt, indem sie die Abstände derselben von P_0 angibt, hätte auch, jedoch minder vortheilhaft, dem Tangentenproblem als Grundlage dienen können. Sie soll hier benützt werden, parallele Tangenten gegebener Richtung zu ermitteln. Damit die Linie von der Geraden berührt werde, müssen die Schnittpunkte zusammenfallen, d. h. die angeführte Gleichung muss gleiche Wurzeln ergeben. Dazu ist nöthig, dass

$$V\,U_{00} - (u_{10}\,\alpha + u_{20}\,\beta)^2 = 0$$

sei, also müssen die Coordinaten des Punktes P_0 der Gleichung

$$V\,U - (u_1\,\alpha + u_2\,\beta)^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (59$$

genügen, wenn er auf einer Tangente von gegebener Richtung $\alpha : \beta$ liegen soll, und weil die Gleichung vom zweiten Grade ist, stellt sie zwei parallele Tangenten dieser Richtung vor. Ersetzt man die Abkürzungen V, U, u_1, u_2 durch die entsprechenden Ausdrücke und ordnet, so erhält man

$$A_{33}\,\beta^2\,x^2 + A_{33}\,\alpha^2\,y^2 - 2\,A_{33}\,\alpha\,\beta\,x\,y + 2\,(A_{23}\,\alpha - A_{13}\,\beta)\,\beta\,x +$$
$$+ 2\,(A_{13}\,\beta - A_{23}\,\alpha)\,\alpha\,y + A_{22}\,\alpha^2 + A_{11}\,\beta^2 - 2\,A_{12}\,\alpha\,\beta = 0$$

als Gleichung des Paares paralleler Tangenten. Bezeichnet man deren Discriminante mit A', ihre Unterdeterminanten mit A'_{ik}, so überzeugt man sich leicht, dass

$$A' = 0; \; A'_{33} = 0; \; A'_{11} = A\,\alpha^2\,V; \; A'_{22} = A\,\beta^2\,V.$$

Die Schnittpunkte der Tangenten mit den Coordinatenaxen und folglich die Tangenten selbst (Art. 34) sind also imaginär, wenn $A \,.\, V > 0$; real, wenn $A \,.\, V < 0$; vereinigt, wenn $A \,.\, V = 0$, d. h. (A nicht verschwindend vorausgesetzt) $V = 0$. Ist $A_{33} = 0$, so verschwinden die quadratischen Glieder der Gleichung, sie stellt dann nur eine Tangente

$$2\,(A_{23}\,\alpha - A_{13}\,\beta)\,\beta\,x + 2\,(A_{13}\,\beta - A_{23}\,\alpha)\,\alpha\,y + A_{22}\,\alpha^2 +$$
$$+ A_{11}\,\beta^2 - 2\,A_{12}\,\alpha\,\beta = 0$$

vor, während die zweite als in das Unendliche gerückt anzusehen ist.

Beispiele und Aufgaben.

a) Gegeben sei eine Linie durch die Gleichung

$$x^2 + 3\,y^2 + 2\,x\,y - 4\,x + 2\,y - 41 = 0$$

mit der Discriminante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -41 \end{vmatrix}$$

und der Punkt P_0 (3, 4). Die Elemente der 1., 2., 3. Zeile der Discriminante sind die Coëfficienten der Ausdrücke u_1, u_2, u_3. Daher findet man

$$\begin{aligned} u_{10} &= 1\,.\,3 + 1\,.\,4 - 2 = 5 \\ u_{20} &= 1\,.\,3 + 3\,.\,4 + 1 = 16 \\ u_{30} &= -2\,.\,3 + 1\,.\,4 - 41 = -43 \end{aligned}$$

$$U_{00} = u_{10}\,x_0 + u_{20}\,y_0 + u_{30} = 5\,.\,3 + 16\,.\,4 - 43 = 36,$$

d. h. der Punkt P_0 liegt nicht auf der gegebenen Linie. Demnach ist die Gleichung seiner Polare:

$$5\,x + 16\,y - 43 = 0.$$

seines Tangentenpaares:

$$36(x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x + 2y - 41) - (5x + 16y - 43)^2 = 0$$

oder geordnet

$$11x^2 - 148y^2 - 88xy + 286x + 1448y - 3325 = 0.$$

Man zeige, dass das Tangentenpaar real ist (Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen).

Für den Punkt P_i (2, 3) ist

$$u_{1i} = 3;\; u_{2i} = 12;\; u_{3i} = -42;\; U_{ii} = 0;$$

er liegt demnach auf der Linie und die Gleichung der Tangente in diesem Punkte ist

$$x + 4y - 14 = 0.$$

Nun sei die Polare

$$5x + 12y + 50 = 0$$

des zu suchenden Poles P_k gegeben. Dessen Coordinaten sind

$$x_k = \frac{-124.5 + 39.12 + 7.50}{7.5 - 3.12 + 2.50} = \frac{198}{99} = 2;$$

$$y_k = \frac{39.5 - 45.12 - 3.50}{99} = \frac{-495}{99} = -5;$$

also

$$u_{1k} = -5;\; u_{2k} = -12;\; u_{3k} = -50;\; U_{kk} = 0;$$

demnach liegt der Pol auf der Linie und die gegebene Gerade ist eine Tangente derselben.

Behufs Aufstellung der Gleichung des Tangentenpaares von der Richtung 1 : 1 berechnet man

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};\; \beta = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{1.1 + 1.1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \\ v_2 = \dfrac{1.1 + 3.1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \end{array}\right\};\; V = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{2};$$

$$u_1\alpha + u_2\beta = \frac{(x + y - 2) + (x + 3y + 1)}{\sqrt{2}} = \frac{2x + 4y - 1}{\sqrt{2}}$$

und hat nach Weglassung des Factors $\frac{1}{2}$

$$6(x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x + 2y - 41) - (2x + 4y - 1)^2 = 0$$

oder geordnet

$$2x^2 + 2y^2 - 4xy - 20x + 20y - 245 = 0$$

als gesuchte Gleichung.

b) Bei der Ellipse oder Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ist

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

für den Punkt P_0 daher

$$u_{10} = \frac{x_0}{a^2}; \quad u_{20} = \pm \frac{y_0}{b^2}; \quad u_{30} = -1;$$

die Gleichung der Polare oder Tangente ist also

$$\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0,$$

und zwar der Polare, wenn

$$\frac{x_0^2}{a^2} \pm \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \gtrless 0;$$

der Tangente, wenn

$$\frac{x_0^2}{a^2} \pm \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

c) Bei der Parabel

$$y^2 - 2px = 0$$

ist

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Demnach für P_0:

$$u_{10} = -p; \quad u_{20} = y_0; \quad u_{30} = -p x_0.$$

Daher stellt die Gleichung

$$-px + y_0 y - p x_0 = 0$$

oder

$$y_0 y = p(x_0 + x)$$

die Polare oder Tangente von P_0 vor, je nachdem

$$y_0^2 - 2 p x_0 \gtrless 0$$

oder

$$y_0^2 - 2 p x_0 = 0.$$

d) Da

$$U_i = u_1 x_i + u_2 y_i + u_3$$

und für den Nullpunkt

$$x_1 = y_1 = 0,$$

so hat die Polare oder Tangente desselben die Gleichung

$$u_3 = 0,$$

die Gleichung des Tangentenpaares aus dem Nullpunkte aber ist

$$a_{33}\,U - u_3{}^2 = 0.$$

e) Gegeben sei die Linie

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 6y - 23 = 0;$$

man bestimme die Polare und das Tangentenpaar des Nullpunktes, ferner des Punktes P_1 (4, — 5); untersuche, ob die Gerade $3x + 2y - 18 = 0$ eine Tangente der Linie ist und ermittle das Tangentenpaar von der Richtung 2 : 1.

f) Es soll das Tangentenpaar aus dem Nullpunkte an die Linie

$$2xy - 12 = 0$$

bestimmt, ferner a derart berechnet werden, dass die Gerade

$$ax + 3y - 12 = 0$$

eine Tangente dieser Linie werde. Dann berechne man die Coordinaten des Berührungspunktes dieser Tangente.

g) Die zu den Richtungen 1 : 2 oder 1 : 1 parallelen Tangenten der Linie

$$5x^2 + y^2 - 2xy - 4x - 6y + 11 = 0$$

zu ermitteln.

37. Unendlich ferne Punkte der Linien zweiter Ordnung. Für die Beurtheilung der Gestalt einer Linie ist es von Bedeutung, zu wissen, ob dieselbe nach irgend einer Richtung in das Unendliche verläuft, d. h. ob sie unendlich ferne Punkte besitzt. Um sich hierüber Aufschluss zu verschaffen, untersucht man, unter welcher Bedingung eine durch den festen Punkt P_0 gelegte Gerade die Linie in einem Punkte trifft, dessen Abstand von P_0 unendlich groß ist. Wenn α, β die Richtungscoordinaten der Geraden sind, ergeben sich die Abstände ihrer Treffpunkte (Art. 34) aus der Gleichung

$$V r^2 + 2(u_{10}\,\alpha + u_{20}\,\beta)\,r + U_{00} = 0$$

und diese hat eine unendlich große Wurzel, wenn (Art. 29) der Coëfficient von r^2 verschwindet, also

$$V = 0$$

oder ausgeschrieben

$$a_{11}\,\alpha^2 + a_{22}\,\beta^2 + 2\,a_{12}\,\alpha\,\beta = 0$$

ist. Dividiert man mit β^2, so nimmt diese Gleichung die Form

$$a_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2\,a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_{22} = 0$$

an und durch Auflösung erhält man die beiden Richtungsverhältnisse:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{-a_{12} + \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}};$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{-a_{12} - \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}};$$

welche zwei Geraden von der verlangten Beschaffenheit bestimmen. Diese sind real getrennt, vereinigt oder imaginär, je nachdem $A_{33} \lesseqgtr 0$. Im ersten Falle hat die Linie zwei reale unendlich ferne Punkte, d. h. sie verläuft nach zwei Richtungen in das Unendliche. Im zweiten fallen die unendlich fernen Punkte zusammen, die Linie verläuft nur nach einer Richtung in das Unendliche und wird dort von der unendlich fernen Geraden der Ebene, mit der sie zwei vereinigte Punkte gemein hat, berührt. Im dritten endlich sind diese Punkte imaginär, die Curve befindet sich vollständig im endlichen Bereich. Den weiteren Betrachtungen vorgreifend, mögen den Linien schon jetzt die Namen

Hyperbel $(A_{33} < 0)$;
Parabel $(A_{33} = 0)$;
Ellipse $(A_{33} > 0)$

beigelegt werden und das Verschwinden der Discriminante, welches, wie sich später zeigen wird, ein Geradenpaar ankündigt, sei ausgeschlossen.

Die zwei Geraden des Punktes P_0, welche die Linie zweiter Ordnung in unendlich fernen Punkten treffen, sollen deren »Richtlinien« genannt werden. Man gelangt zur Gleichung des Richtlinienpaares, indem man auf einer der Geraden einen beliebigen Punkt P im Abstande r von P_0 annimmt; es ergeben sich dann die Richtungscoordinaten: $\alpha = \frac{x - x_0}{r}$; $\beta = \frac{y - y_0}{r}$; die Gleichung $V = 0$ geht durch Einsetzung dieser Werte, nach Weglassung des Factors $\frac{1}{r^2}$ über in

$$a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + 2\,a_{12}(x - x_0)\,(y - y_0) = 0$$

und stellt nun das Richtlinienpaar vor. Schreibt man sie in der Form

$$\{a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)\}^2 = 0$$

oder

$$\{(a_1 x + a_2 y + a_3) - (a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3)\}^2 = 0,$$

so geht daraus durch Ausführung der symbolischen Erhebung zur zweiten Potenz die Gleichungsform

$$U - 2U_0 + U_{00} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60$$

des Richtlinienpaares hervor. Lässt man insbesondere P_0 mit dem Nullpunkte zusammenfallen, so erhält die Gleichung des Richtlinienpaares die einfache Form

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} x y = 0$$

oder

$$Q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60^I$$

in welcher sie, besonders bei unvollständigen Gleichungen, für die Classification der Linien vortheilhaft verwendet werden kann.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichungen

$$\begin{aligned} 5x^2 + 3y^2 + 12xy + 4x + 6y + 11 &= 0; \\ 3x^2 + 12y^2 + 8xy + 6x + 8y + 7 &= 0; \\ 2x^2 + 8y^2 - 8xy - 4x + 2y - 9 &= 0 \end{aligned}$$

stellen eine Hyperbel, eine Ellipse und eine Parabel vor, denn es ist bei der ersten $A_{33} = -21 < 0$, bei der zweiten $A_{33} = 20 > 0$, bei der dritten $A_{33} = 0$.

b) Eine Gleichung von der Form

$$\begin{aligned} a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} &= 0; \\ a_{22} y^2 + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

stellt eine Hyperbel vor. Denn in beiden Fällen ist $A_{33} = - a_{12}^2 < 0$. Das nach dem Nullpunkte verlegte Richtlinienpaar hat im ersten Falle die Gleichung

$$x(a_{11} x + 2 a_{12} y) = 0,$$

besteht daher aus den Geraden $x = 0$ (y-Axe) und $a_{11} x + 2 a_{12} y = 0$; im zweiten Falle hat es die Gleichung

$$y(a_{22} y + 2 a_{12} x) = 0$$

und besteht aus den Geraden $y = 0$ (x-Axe) und $a_{22} y + 2 a_{12} x = 0$.

c) Die Gleichung

$$2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

stellt eine Hyperbel vor, deren Richtlinien den Coordinatenaxen parallel sind, weil sie, nach dem Nullpunkte verlegt, die Gleichung

$$x y = 0$$

haben.

d) Die Gleichungen

$$a_{11} x^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0;$$
$$a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

stellen Parabeln vor, deren zusammenfallende Richtlinien im ersten Falle der y-Axe, im zweiten der x-Axe parallel sind.

e) Die Gleichung

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

stellt eine Hyperbel oder eine Ellipse vor, je nachdem die Coëfficienten a_{11} und a_{22} ungleich oder gleich bezeichnete Größen sind. Warum?

f) Warum stellt die allgemeine Gleichung $U = 0$ eine Hyperbel vor, wenn a_{11} und a_{22} entgegengesetzte Vorzeichen haben?

g) Man bestimme den Charakter der Linien

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 2y + 1 = 0;$$
$$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 6x + 6y + 9 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + 10xy - 2x - 4y + 3 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$$

und ermittle a_{11} derart, dass die Gleichung

$$a_{11} x^2 + 16 y^2 + 16 xy - 8x - 6y + 11 = 0$$

eine Parabel vorstelle. Innerhalb welcher Grenzen muss a_{11} angenommen werden, damit diese Gleichung eine Hyperbel oder damit sie eine Ellipse vorstelle?

38. Mittelpunkt. Radien. Classification der Linien zweiter Ordnung. Wenn ein Punkt P_0 die Strecke der Treffpunkte P' und P'' einer durch ihn gelegten Geraden von gegebener Richtung halbieren soll, muss die wiederholt angeführte Gleichung

$$Vr^2 + 2(u_{10}\alpha + u_{20}\beta) r + U_{00} = 0$$

entgegengesetzt gleiche Wurzeln ergeben, sie muss rein quadratisch sein. Dazu ist die einzige Bedingung

$$u_{10}\alpha + u_{20}\beta = 0$$

nöthig, welche ausdrückt, dass die Coordinaten des Punktes P_0 der Gleichung

$$u_1 \alpha + u_2 \beta = 0$$

genügen müssen, damit er der Forderung entspreche; d. h. der Punkt P_0 muss auf der Geraden liegen, welche durch diese lineare Gleichung repräsentiert wird. Der Ort der Halbierungspunkte aller parallelen Sehnen von gegebener Richtung ist also eine Gerade. Den unendlich vielen Scharen paralleler Sehnen entsprechen unendlich viele solche

Geraden, die (wenn α, β als willkürliche Parameter aufgefasst werden) alle durch die Gleichung

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$$

repräsentiert sind, demnach insgesammt durch den Schnittpunkt P_c der Geraden $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ gehen. Dieser hat offenbar die Eigenschaft, alle durch ihn gehenden Sehnen der Linie zu halbieren und heißt aus diesem Grunde deren Mittelpunkt. Für ihn gelten die Relationen $u_{1c} = 0$, $u_{2c} = 0$ und seine Coordinaten ergeben sich durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{l} a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13} = 0; \\ a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23} = 0: \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{31} \qquad a_{32} \qquad a_{33} \end{array}$$

$$x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}};\ y_c = \frac{A_{32}}{A_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61$$

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Nullpunkte hat das Richtungsverhältnis $x_c : y_c = A_{31} : A_{32}$.

Je nach der Beschaffenheit von A_{33}, A_{31}, A_{32}, A sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $A_{33} \gtrless 0$, d. h. der Nenner der Auflösungen ist von Null verschieden. Dann haben die Mittelpunktscoordinaten endliche Werte, der Mittelpunkt liegt im endlichen Bereiche (centrale Linien). Die Geraden $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ sind nicht parallel. Die von dem Mittelpunkte ausgehenden Radien ergeben sich aus der Gleichung

$$V r^2 + 2(u_{10}\,\alpha + u_{20}\,\beta)\, r + U_{00} = 0$$

durch Verlegung des Punktes P_0 nach P_c. Da nun $u_{1c} = u_{2c} = 0$, nimmt die Gleichung die Form

$$V r^2 + U_{cc} = 0$$

an und, weil

$$U_{cc} = u_{1c}\, x_c + u_{2c}\, y_c + u_{3c} = u_{3c} = a_{31}\frac{A_{31}}{A_{33}} + a_{32}\frac{A_{32}}{A_{33}} + a_{33}\frac{A_{33}}{A_{33}} = \frac{A}{A_{33}},$$

geht sie in

$$V r^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

über, woraus man für die beliebige Richtung $\alpha : \beta$

$$r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62$$

also — wie zu erwarten war — zwei entgegengesetzt gleiche Radien findet.

Wenn nun $A \gtrless 0$, also auch $\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{33}} \gtrless 0$, so existieren keine Radien von der Länge Null, man hat es mit einer eigentlichen Linie zweiter Ordnung zu thun, und zwar mit einer Hyperbel ($A_{33} < 0$) oder einer Ellipse ($A_{33} > 0$). Im letzteren Falle ist kein reales Wertepaar α, β vorhanden, welches der Gleichung $V = 0$ genügt (Art. 37), demnach bleibt das Vorzeichen von V ungeändert, es stimmt für alle Richtungen der Ebene mit jenem der speciellen Werte a_{11} oder a_{22} überein, welche dieser Ausdruck für die besonderen Richtungen $1:0$ oder $0:1$ annimmt und wegen $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ müssen a_{11}, a_{22} gleiche Vorzeichen haben. Daher ist $r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{33}}$ immer positiv oder immer negativ und folglich r immer real oder immer imaginär, je nachdem $\frac{A}{V}$, also $\frac{A}{a_{11}}, \frac{A}{a_{22}}$ oder auch $a_{11}A, a_{22}A$ negativ oder positiv bezeichnet sind. Damit sind die Kennzeichen für die reale und imaginäre Ellipse gewonnen.

Wenn aber $A = 0$, so ist auch $\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{33}} = 0$ und folglich $r = 0$, so lange $V \gtrless 0$. Sobald hingegen auch $V = 0$, erhält man für r den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$, welcher andeutet, dass alle Punkte der Linie $U = 0$ von P_c aus nur nach zwei bestimmten Richtungen zu finden sind, die Linie also zu einem Paar von Geraden degeneriert ist, deren Richtungen durch die Richtlinien gegeben sind. Das Geradenpaar ist demnach real oder imaginär, je nachdem $A_{33} < 0$ oder $A_{33} > 0$. Der Punkt P_c ist sein Mittelpunkt (Schnittpunkt).

II. $A_{33} = 0$, d. h. der Nenner der Mittelpunktscoordinaten $\frac{A_{31}}{A_{33}}$, $\frac{A_{32}}{A_{33}}$ verschwindet. Ist dann wenigstens einer der Zähler A_{31}, A_{32} oder sind beide von Null verschieden, so werden eine oder beide Coordinaten unendlich groß, der Mittelpunkt ist unendlich fern, und zwar nach der Richtung $A_{31} : A_{32}$. Die Geraden $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ sind parallel. Die Linie ist (Art. 37) eine Parabel (nicht centrale Linie).

III. $A_{33} = 0$, $A_{31} = A_{32} = 0$, folglich auch $A = 0$. Für die Mittelpunktscoordinaten ergeben sich die unbestimmten Werte $\frac{0}{0}$, der Mittelpunkt wird unbestimmt, weil jetzt die Geraden $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ in einer Geraden zusammenfallen. Jeder Punkt der vereinigten Geraden kann

als Mittelpunkt der Linie $U = 0$ angesehen werden, d. h. diese ist zu einem Paar paralleler Geraden degeneriert, deren Mittellinie den Ort aller Mittelpunkte bildet. Will man nämlich die von irgend einem Punkte P_c der vereinigten Geraden ausgehenden Radien berechnen, so nimmt die Gleichung

$$V r^2 + 2 (u_{10} \alpha + u_{20} \beta) r + U_{00} = 0$$

wegen $u_{1c} = u_{2c} = 0$ wieder die Form

$$V r^2 + U_{cc} = 0$$

an, aber nun muss U_{cc} auf einem anderen Wege bestimmt werden, da sich auf dem früher benützten wegen $A = 0$, $A_{33} = 0$ der unbestimmte Wert $\frac{0}{0}$ ergeben würde. Offenbar ist, wenn h eine beliebige Größe bedeutet, weil $A = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + h & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A + h\,A_{11} = h\,.\,A_{11}$$

und indem man die letzte Colonne der Determinante dadurch transformiert, dass man zu ihren Elementen die mit x_c und y_c multiplicierten der ersten und zweiten Colonne addiert:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + h & a_{12} & h\,x_c \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & u_{3c} \end{vmatrix} = h\,A_{11}.$$

Durch Entwicklung nach der letzten Colonne erhält man wegen $A_{13} = A_{33} = 0$

$$u_{3c}\,.\,h\,.\,a_{22} = h\,.\,A_{11}.$$

Demnach

$$U_{cc} = u_{1c}\,x_c + u_{2c}\,y_c + u_{3c} = u_{3c} = \frac{A_{11}}{a_{22}}.$$

Durch ähnliche Behandlung der Determinante, in welcher $a_{22} + h$ statt a_{22} gesetzt worden, hätte man $U_{cc} = \frac{A_{22}}{a_{11}}$ gefunden, so dass man schließlich aus den Gleichungen

$$V r^2 + \frac{A_{11}}{a_{22}} = 0 \quad \text{oder} \quad V r^2 + \frac{A_{22}}{a_{11}} = 0$$

Werte der Radien erhält, welche von der Lage des Punktes P_c unabhängig sind und bei einer gegebenen Richtung für alle Punkte der vereinigten Geraden $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ gleich bleiben, letztere daher

sich als Mittellinie eines Parallelgeradenpaares darstellen. Dieses ist real oder imaginär, je nachdem seine Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen real oder imaginär, d. h. je nachdem die gleich bezeichneten Unterdeterminanten A_{11}, A_{22}, negativ oder positiv sind (Art. 34 und 32). Ist $A_{11} = A_{22} = 0$ (Art. 32), dann sind die Schnittpunkte, also auch die Geraden vereinigt.

Als Kriterium für das Parallelgeradenpaar genügen die Relationen

$$A = 0;\ A_{33} = 0,$$

weil diese (Art. 32) $A_{31} = A_{32} = 0$ zur Folge haben.

Anmerkung. Es ist von Interesse, die Länge r_0 des Radius zu ermitteln, welcher parallel ist der Tangente in einem gegebenen Punkte P_0 der Linie zweiter Ordnung. In diesem Falle ist $U_{00} = 0$ und die Gleichung der Tangente

$$u_{10}\, x + u_{20}\, y + u_{30} = 0.$$

Daher hat sie das Richtungsverhältnis $-u_{20} : u_{10}$, die Richtungscoordinaten

$$\alpha = \frac{-u_{20}}{\sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2}},\ \beta = \frac{u_{10}}{\sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2}}$$

und man findet

$$V = \frac{a_{11}\, u_{20}^2 + a_{22}\, u_{10}^2 - 2\, a_{12}\, u_{10}\, u_{20}}{u_{10}^2 + u_{20}^2} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u_{10} \\ a_{21} & a_{22} & u_{20} \\ u_{10} & u_{20} & U_{00} \end{vmatrix}}{u_{10}^2 + u_{20}^2},$$

wo in der Determinante U_{00} statt 0 gesetzt worden ist. Transformiert man die letzte Colonne der Determinante, indem man von ihren Elementen die mit x_0 und y_0 multiplicierten correspondierenden Elemente der ersten und zweiten Colonne subtrahiert; wiederholt man ferner dasselbe Verfahren für die Transformation der letzten Zeile, so geht sie in die Discriminante über, hat also den Wert A und es wird

$$V = -\frac{A}{u_{10}^2 + u_{20}^2},$$

demnach

$$r_0^2 = \frac{u_{10}^2 + u_{20}^2}{A_{33}}.$$

Man sieht, dass Radien parallel zu einer Tangente nur bei der Ellipse ($A_{33} > 0$) real, hingegen bei der Hyperbel ($A_{33} < 0$) imaginär sind.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$3\, x^2 + 7\, y^2 - 6\, x\, y + 2\, x + 4\, y - 15 = 0,$$

bei welcher

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -15 \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} A_{31} &= -13; \\ A_{32} &= -\ \ 9; \\ A_{33} &= \ \ 12; \\ A &= -211 \end{aligned}$$

und $a_{11} A < 0$, $a_{22} A < 0$, stellt eine reale Ellipse vor, deren Mittelpunkt die Coordinaten

$$x_c = -\frac{13}{12};\ y_c = -\frac{3}{4}$$

hat. Für die Radien besteht die Gleichung

$$r^2 = \frac{211}{12\,V}.$$

Für den Punkt P_0 (2, 1) findet man $u_{10} = 4$; $u_{20} = 3$; $u_{30} = -11$; $U_{00} = 0$, er liegt also auf der Ellipse. Der zu seiner Tangente parallele Radius ist

$$r_0 = \sqrt{\frac{16+9}{12}} = \frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

b) Die Gleichung

$$3y^2 + 2x + 4y - 9 = 0$$

mit

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -9 \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} A_{31} &= -3; \\ A_{32} &= \ \ 0; \\ A_{33} &= \ \ 0; \\ A &= -3 \end{aligned}$$

stellt eine Parabel vor; es ist $x = \infty$; $y_c = \frac{0}{0}$, daher der Mittelpunkt in der Richtung $-3 : 0$, d. h. parallel zu der negativen Richtung der x-Axe in das Unendliche gerückt.

c) Bei der Parabel

$$2x^2 + 8y^2 - 8xy - 2x + 8y + 7 = 0$$

liegt, da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -8; \quad \begin{aligned} A_{31} &= -8; \\ A_{32} &= -4; \\ A_{33} &= \ \ 0 \end{aligned}$$

der Mittelpunkt in der Richtung $-2 : -1$ im Unendlichen.

d) Bei der Gleichung

$$3x^2 + 7y^2 + 4xy + 2x + 4y + 5 = 0$$

findet man $A_{33} = 17$; $A = 74$; $a_{11} A > 0$; $a_{22} A > 0$, sie stellt also eine imaginäre Ellipse vor. Ändert man in der Gleichung alle Vorzeichen, so bleibt $A_{33} = 17$; hingegen wird $A = -74$ und das gefundene Kriterium behält seine Geltung, denn es ist dann wieder $a_{11} A > 0$, $a_{22} A > 0$.

e) Innerhalb welcher Grenzen muss a_{33} angenommen werden, damit die Gleichung

$$x^2 + 9y^2 - 2xy + 6x + 4y + a_{33} = 0$$

eine imaginäre Ellipse vorstelle?

f) Bei der Gleichung

$$6x^2 - 4y^2 + 2xy - 18x + 22y - 24 = 0;$$

ist

$$A_{31} = -25;\ A_{32} = -75;\ A_{33} = -25;\ A = 0.$$

Daher stellt sie ein reales Geradenpaar vor ($A_{33} < 0$) mit den Mittelpunktscoordinaten

$$x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} = 1;\ y_c = \frac{A_{32}}{A_{33}} = 3.$$

g) Bei der Gleichung

$$x^2 + 5y^2 - 2xy + 2x - 26y + 37 = 0$$

findet man

$$A_{31} = 8;\ A_{32} = 12;\ A_{33} = 4;\ A = 0,$$

sie stellt daher ein imaginäres Geradenpaar mit dem realen Schnittpunkte P_c (2, 3) vor.

h) Bei der Gleichung

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy - 14x - 14y + 20 = 0$$

ist

$$A_{31} = 0;\ A_{32} = 0;\ A_{33} = 0;\ A = 0;\ A_{11} = -9,$$

somit stellt sie ein reales Paar paralleler Geraden vor, dessen Mittellinie die Gerade

$$2x + 2y - 7 = 0$$

ist.

i) Bei der Gleichung

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 4y + 2 = 0$$

ist

$$A_{31} = 0;\ A_{32} = 0;\ A_{33} = 0;\ A = 0;\ A_{11} = 4,$$

sie stellt also ein imaginäres Paar paralleler Geraden mit der realen Mittellinie

$$x + 2y + 1 = 0$$

vor.

j) Die Gleichung

$$4x^2 + 9y^2 + 12xy - 24x - 36y + 36 = 0$$

repräsentiert ein Paar zusammenfallender Geraden, weil die Discriminante und alle ihre Unterdeterminanten verschwinden. In der That ist sie identisch mit der Gleichung

$$(2x + 3y - 6)^2 = 0.$$

k) Man berechne die Coordinaten der Mittelpunkte und classificiere die Linien

$$x^2 - y^2 + 4xy - 2x - 6y + 4 = 0;$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0;$$

$$4x^2 + 9y^2 + 12xy + 24x + 36y + 37 = 0;$$
$$2x^2 - 4y^2 + 2xy + 6x - 12y - 8 = 0;$$
$$4x^2 + y^2 + 4xy - 20x - 10y + 24 = 0;$$
$$x^2 + 8y^2 - 6xy - 6x + 18y + 9 = 0;$$
$$x^2 + 5y^2 - 4xy - 8x + 20y + 20 = 0.$$

l) Wenn die Gleichung $U = 0$ kein Geradenpaar repräsentiert, wie groß muss k sein, damit die Gleichung $U + k = 0$ ein solches vorstelle?

39. Transformation der Gleichungen centraler Linien zu parallelen Coordinatenaxen durch den Mittelpunkt. Wird der Mittelpunkt als Nullpunkt eines neuen, gleichsinnig parallelen Coordinatensystems angenommen und die Gleichung $U = 0$ einer centralen Linie darauf transformiert, so nimmt sie (Art. 33) die Form

$$Q + 2u_{1c}x + 2u_{2c}y + U_{cc} = 0$$

an oder, weil $u_{1c} = u_{2c} = 0$; $U_{cc} = \frac{A}{A_{33}}$:

$$Q + \frac{A}{A_{33}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63$$

Sie ist nun dadurch charakterisiert, dass in ihr die linearen Glieder fehlen.

Ist $a_{12} = 0$, hat also die gegebene Gleichung die Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

gehabt, so ergibt sich durch diese Transformation direct die Gleichung einer Hyperbel oder Ellipse

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

welche man nämlich auf die Form (Art. 32)

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

bringen kann.

Ist $A = 0$, stellt also die Gleichung ein nicht paralleles Geradenpaar vor, so geht $U = 0$ in $Q = 0$ über; somit ergibt sich auch auf diesem Wege die Bedeutung der verschwindenden Discriminante.

Wenn endlich $A = 0$, $A_{33} = 0$, daher auch $A_{31} = A_{32} = 0$, mithin ein Paar paralleler Geraden vorliegt, so kann jeder Punkt der Mittellinie, mit welcher die Geraden $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ zusammenfallen, als Mittelpunkt P_c angesehen und als Nullpunkt eines parallelen Coordinatensystems angenommen werden. Durch Transformation geht die Gleichung $U = 0$, weil $u_{1c} = u_{2c} = 0$, wieder in

$$Q + U_{cc} = 0,$$

d. h. in eine der gleichbedeutenden Formen (vgl. Art. 38, III)

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + \frac{A_{11}}{a_{22}} = 0;$$

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + \frac{A_{22}}{a_{11}} = 0$$

über, aus welchen sich durch Wegschaffung der Nenner und mit Rücksicht auf $A_{33} = 0$ die Gleichungen

$$(a_{12} x + a_{22} y)^2 + A_{11} = 0;$$
$$(a_{11} x + a_{12} y)^2 + A_{22} = 0$$

ergeben, deren linke Seiten sich in lineare, und zwar reale, imaginäre oder gleiche Factoren zerlegen lassen, je nachdem $A_{ii} \lesseqqgtr 0$ $(i = 1, 2)$.

Beispiele und Aufgaben.

a) Bei der Gleichung

$$x^2 - y^2 - 2 x y + 2 x + 2 y + 1 = 0$$

ist

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} A_{31} &= 0; \\ A_{32} &= -2; \\ A_{33} &= -2; \\ A &= -4; \end{aligned}$$

sie geht demnach, auf den Mittelpunkt $P_c(0, 1)$ transformiert, in

$$x^2 - y^2 - 2 x y + 2 = 0$$

über.

b) Bei der Gleichung

$$9 x^2 + 4 y^2 - 36 x - 24 y + 36 = 0$$

findet man

$$A_{31} = 72;\ A_{32} = 108;\ A_{33} = 36;\ A = -1296,$$

daher ist

$$9 x^2 + 4 y^2 - 36 = 0,$$

die auf den Mittelpunkt $P_c(2, 3)$ transformierte Gleichung, welche in der Form

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

eine Ellipse mit den Halbaxen $a = 2$, $b = 3$ erkennen lässt.

c) Die Gleichung

$$x^2 - 4 y^2 - 2 x + 8 y - 3 = 0$$

mit

$$A_{31} = -4;\ A_{32} = -4;\ A_{33} = -4;\ A = 0$$

stellt ein reales Geradenpaar mit dem Mittelpunkte $P_c(1, 1)$ vor. Transformiert lautet sie:

$$x^2 - 4y^2 = 0;$$

der Ausdruck links ist identisch mit dem Producte $(x + 2y)(x - 2y)$, so dass die einzelnen Geraden in dem neuen Coordinatensystem durch die Gleichungen

$$x + 2y = 0; \quad x - 2y = 0$$

repräsentiert werden, also die Richtungsverhältnisse $2 : -1$ und $2 : 1$ haben.

d) Die Gleichung

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 12y + 5 = 0$$

mit

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \begin{matrix} A_{31} = A_{32} = A_{33} = A = 0 \\ A_{11} = -16; \; A_{22} = -4 \end{matrix}$$

stellt ein reales Paar paralleler Geraden vor und lautet, zu parallelen Coordinatenaxen in einem beliebigen Punkt der Mittellinie $x - 2y + 3 = 0$ transformiert:

$$(-2x + 4y)^2 - 16 = 0$$

oder

$$(x - 2y)^2 - 4 = 0,$$

so dass sich beide Formen nur durch den Factor 4 unterscheiden.

Man transformiere die Gleichung direct auf ein paralleles Coordinatensystem, dessen Nullpunkt $P_c(1, 2)$ auf der Mittellinie liegt.

e) Man transformiere die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2xy - 10x - 8y + 7 &= 0; \\ x^2 + 2y^2 + 2xy - 10x - 8y + 26 &= 0; \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 &= 0; \\ x^2 - y^2 - 6x + 8y - 16 &= 0; \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 &= 0; \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 &= 0 \end{aligned}$$

auf gleichsinnig parallele Axen durch den Mittelpunkt der von ihnen repräsentierten Linien.

40. Asymptoten. Die Parallelen durch den Mittelpunkt zu den Richtlinien einer centralen Linie zweiter Ordnung heißen deren Asymptoten. Ihre Gleichung geht daher aus jener der Richtlinien in einem beliebigen Punkte P_0 hervor (Art. 37), wenn man P_0 mit P_c zu sammenfallen lässt:

$$U - 2U_c + U_{cc} = 0$$

und weil

$$U_c = u_{1c}\,x + u_{2c}\,y + u_{3c} = u_{3c} = \frac{A}{A_{33}} = U_{cc},$$

nimmt sie die Form an

$$U - \frac{A}{A_{33}} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64$$

Die Asymptoten sind real bei der Hyperbel, imaginär bei der Ellipse und können die Linie offenbar nur in unendlich fernen Punkten treffen. Sie können auch als die Tangenten derselben aus dem Mittelpunkte angesehen werden, denn die Gleichung des Tangentenpaares aus dem letzteren ist

$$U_{cc}\,U - U_c^2 = 0,$$

also vermöge der Werte von U_{cc} und U_c mit der Gleichung der Asymptoten identisch.

Anmerkung. Die Polare des Mittelpunktes hat die Gleichung

$$u_{1c}\,x + u_{2c}\,y + u_{3c} = 0$$

oder

$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y + \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

sie ist daher (Art. 17, II) die unendlich ferne Gerade der Ebene.

Die Gleichung der Asymptoten, transformiert auf ein paralleles Coordinatensystem durch den Mittelpunkt, geht in

$$\left(Q + \frac{A}{A_{33}}\right) - \frac{A}{A_{33}} = 0$$

oder

$$Q = 0$$

über, wie zu erwarten war. Versteht man unter z_1 und z_2 die Wurzeln der Gleichung

$$a_{11}\,z^2 + 2\,a_{12}\,z + a_{22} = 0,$$

so sind die Richtungsverhältnisse der einzelnen Asymptoten $z_1 : 1$ und $z_2 : 1$ (Art. 35); die daraus berechneten Richtungscoordinaten genügen demnach (vgl. Art. 37) der Gleichung $V = 0$.

Sucht man nun die zu einer von diesen Richtungen parallelen Tangenten (Art. 36, Gl. 59), so findet man dieselben durch die Gleichung

$$(u_1\,\alpha + u_2\,\beta)^2 = 0$$

charakterisiert, sie fallen also zusammen, und zwar in einer Asymptote, weil ja diese eine Tangente der Linie ist. Demnach stellt die Gleichung

$$u_1\,\alpha + u_2\,\beta = 0$$

eine Asymptote vor, wenn $V = 0$; setzt man also $\alpha_1 : \beta_1 = z_1 : 1$; $\alpha_2 : \beta_2 = z_2 : 1$, so erhält man die Gleichungen der einzelnen Asymptoten:

$$\left.\begin{aligned} z_1\,u_1 + u_2 &= 0 \\ z_2\,u_1 + u_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die Asymptoten eines nicht parallelen Geradenpaares fallen mit diesem zusammen.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$x^2+8y^2-6xy+10x-26y-5=0$$

mit

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 8 & -13 \\ 5 & -13 & -5 \end{vmatrix}; \quad \begin{matrix} A_{31}=-1; \\ A_{32}=-2; \\ A_{33}=-1; \\ A=26 \end{matrix}$$

stellt eine Hyperbel vor, deren Asymptoten durch die Gleichung

$$x^2+8y^2-6xy+10x-26y+21=0$$

charakterisiert sind. Die Wurzeln der Gleichung $z^2-6z+8=0$ sind

$$z_1=4;\ z_2=2.$$

Daher ergeben sich die Gleichungen der einzelnen Asymptoten:

$$4(x-3y+5)+(-3x+8y-13)=0;$$
$$2(x-3y+5)+(-3x+8y-13)=0$$

oder geordnet

$$x-4y+7=0;$$
$$x-2y+3=0.$$

Durch Multiplication kommt wieder die gefundene Gleichung zum Vorschein.

b) Man bestimme die Asymptoten der Linien

$$x^2+y^2-6x-4y-3=0;$$
$$4x^2+3y^2-8xy+2x+12y-7=0;$$
$$x^2-y^2-4x-8y+3=0.$$

c) Unter welcher Bedingung geht eine Asymptote der centralen Linie $U=0$ durch den Nullpunkt?

41. Conjugierte Durchmesser. Bei der Behandlung des Mittelpunktproblems (Art. 38) wurde festgestellt, dass die Halbierungspunkte aller parallelen Sehnen von gegebener Richtung $\alpha:\beta$ auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, also auf einem Durchmesser der Linie zweiter Ordnung liegen, welcher durch die Gleichung

$$\alpha u_1+\beta u_2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65$$

repräsentiert wird. Man sagt, der Durchmesser ist der Schar von parallelen Sehnen und diese wieder dem Durchmesser conjugiert. Nach x und y geordnet, erhält die Gleichung die Form

$$v_1x+v_2y+v_3=0, \quad \ldots\ldots \quad (65^{I}$$

aus welcher sich das Richtungsverhältnis $v_1 : v_2$ der Normalen des Durchmessers und $-v_2 : v_1$ des Durchmessers selbst ergibt. Die den Sehnen parallelen Tangenten der Linie haben (Art. 36) die Gleichung

$$VU - (\alpha u_1 + \beta u_2)^2 = 0,$$

aus der man erkennt, dass ihre Berührungspunkte mit den Schnittpunkten der Linie und des Durchmessers identisch sind, was auch direct aus der Beziehung der Sehnen zu dem Durchmesser einzusehen ist. Demnach kann dieser als die Polare des in der Richtung $\alpha : \beta$ unendlich fernen Punktes angesehen werden.

Der Sehnenschar von der Richtung $\alpha_i : \beta_i$ ist der Durchmesser

$$v_{1i}\, x + v_{2i}\, y + v_{3i} = 0$$

conjugiert; hat er selbst die Richtung $\alpha_k : \beta_k$, so besteht die Beziehung

$$v_{1i}\, \alpha_k + v_{2i}\, \beta_k = 0$$

oder

$$V_{ik} = 0.$$

Da aber

$$V_{ik} = V_{ki},$$

daher auch

$$V_{ki} = 0$$

oder

$$v_{1k}\, \alpha_i + v_{2k}\, \beta_i = 0,$$

so hat der Durchmesser

$$v_{1k}\, x + v_{2k}\, y + v_{3k} = 0,$$

welcher einer Schar paralleler Sehnen von der Richtung $\alpha_k : \beta_k$ conjugiert ist, die Richtung $\alpha_i : \beta_i$. Diese beiden Durchmesser stehen also in der eigenthümlichen Beziehung zu einander, dass jeder die zu dem anderen parallelen Sehnen halbiert. Man nennt sie deshalb conjugierte Durchmesser und ihre, durch die Relation

$$V_{ik} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66$$

verbundenen Richtungen heißen conjugierte Richtungen.

Die Geraden $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ sind auch Durchmesser der Linie, weil sie sich in ihrem Mittelpunkte schneiden, und offenbar conjugiert den Sehnenscharen, welche die Richtungen der Coordinatenaxen haben.

Bei der Parabel ist der Mittelpunkt unendlich fern in der Richtung $A_{31} : A_{32}$ (vgl. Art. 38). Daher sind alle Durchmesser derselben parallel und jeder kann die Linie nur in einem Punkte des endlichen

Bereiches treffen, so dass von den parallelen Tangenten in den Endpunkten desselben nur eine im endlichen Bereiche vorhanden ist. (Vgl. Art. 36, Anmerkung.)

Jeder Sehnenschar ist also ein Durchmesser von derselben Richtung $A_{31} : A_{32}$ conjugiert. In der That findet man, wenn $\alpha_i : \beta_i = A_{31} : A_{32}$

$$V_{ik} = \left(a_{11} \frac{A_{31}}{\rho} + a_{12} \frac{A_{32}}{\rho}\right) \alpha_k + \left(a_{21} \frac{A_{31}}{\rho} + a_{22} \frac{A_{32}}{\rho}\right) \beta_k.$$

und wenn A_{33} statt Null gesetzt wird

$$V_{ik} = \frac{1}{\sqrt{A_{31}^2 + A_{32}^2}} \left[a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}\right] \alpha_k +$$
$$+ \left[a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33}\right] \beta_k = 0$$

für jedes Wertepaar α_k, β_k, weil die Ausdrücke in den Klammern einzeln verschwinden.

Von conjugierten Durchmessern kann bei der Parabel nicht gesprochen werden, weil von einem Paar solcher immer der eine mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt.

Von Interesse ist es noch, den Winkel φ zu bestimmen, welchen zwei conjugierte Richtungen bilden. Der Richtung $\alpha : \beta$ entspricht, wie eingangs gezeigt worden ist, die conjugierte Richtung $-v_2 : v_1$. Daraus findet man

$$\tan \varphi = \frac{v_1 \alpha + v_2 \beta}{v_1 \beta - v_2 \alpha} = - \frac{V}{a_{12} \alpha^2 - a_{12} \beta^2 + (a_{22} - a_{11}) \alpha \beta}.$$

Insbesondere wird also $\tan \varphi = 0$, $\varphi = 0$, wenn $V = 0$, d. h. in jeder Asymptote sind ein Paar conjugierter Durchmesser vereinigt, denn durch die Gleichung $V = 0$ sind (Art. 37, 40) die Asymptotenrichtungen gegeben.

Beispiele und Aufgaben.

a) Gegeben sei die Ellipse

$$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 6y - 7 = 0$$

mit der Discriminante

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -7 \end{vmatrix}.$$

Um den der Richtung $\alpha_i : \beta_i = 3 : 2$ conjugierten Durchmesser zu finden, hat man die Gleichung

$$\frac{3}{\sqrt{13}} u_1 + \frac{2}{\sqrt{13}} u_2 = 0$$

zu bilden; da wegen der Homogenität in Bezug auf α_l, β_l der Factor $\frac{1}{\sqrt{13}}$ wegfällt, kann man direct die gegebenen Componenten benützen und erhält

$$3(5x + y - 2) + 2(x + y - 3) = 0$$

oder

$$17x + 5y - 12 = 0.$$

Der Durchmesser hat daher die Richtung $\alpha_k : \beta_k = -5 : 17$. Zwischen den Coordinaten beider Richtungen besteht die Gleichung (Art. 31)

$$V_{ik} = \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{314}}\left[5 \,.\, 3 \,.\, -5 + 1 \,.\, 2 \,.\, 17 + 1 \,.\, (3 \,.\, 17 + 2 \,.\, -5)\right] = 0.$$

b) Bei der Parabel

$$y^2 - 2x - 4y + 12 = 0$$

mit der Discriminante

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 12 \end{vmatrix}$$

ergeben sich für die den Richtungen 1 : 1; 1 : 2; 1 : 3 conjugierten Durchmesser die Gleichungen

$$-1 + (y - 2) = 0; \quad y = 3;$$
$$-1 + 2(y - 2) = 0; \quad y = \frac{5}{2};$$
$$-1 + 3(y - 2) = 0; \quad y = \frac{7}{3},$$

d. h. die Durchmesser sind alle der x-Axe parallel. Für die zu dieser senkrechte Richtung 0 : m der y-Axe ergibt sich der Durchmesser

$$y - 2 = 0.$$

c) Für die Ellipse (real oder imaginär)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \mp 1 = 0$$

hat der der Richtung $\alpha : \beta$ conjugierte Durchmesser die Gleichung

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 0.$$

d) Man bestimme bei den Linien

$$3x^2 + 2y^2 - 12xy - 2x + 6y + 11 = 0;$$
$$x^2 + 2y^2 + 6xy + 7 = 0;$$
$$x^2 + 2xy + 6x + 3 = 0;$$

$$4xy - 7 = 0;$$
$$x^2 + 2y + 8 = 0$$

die den Richtungen $-5:2$ und $5:2$ conjugierten Durchmesser.

e) Bei der Linie

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$$

sollen die conjugierten Durchmesser der Richtungen $2:1$ und $5:3$ ermittelt und die Winkel bestimmt werden, welche sie mit den gegebenen Richtungen bilden.

42. Hauptdurchmesser. Hauptradien. Wenn ein Durchmesser senkrecht ist zu der Richtung der ihm conjugierten Sehnenschar, so theilt er die Linie zweiter Ordnung in zwei symmetrische Hälften und wird ein Hauptdurchmesser oder eine Axe genannt. Da in diesem Falle die Sehnen parallel sind der Normale des Durchmessers, so besteht zwischen den Richtungsverhältnissen $\alpha:\beta$ und $v_1:v_2$ beider (Art. 41) die Beziehung

$$v_1 : v_2 = \alpha : \beta$$

und wenn ρ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, ist

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \rho\alpha \\ v_2 = \rho\beta \end{array}\right\} \quad \text{(67}$$

Setzt man statt v_1, v_2 die betreffenden Ausdrücke und ordnet, so gehen die homogenen Gleichungen

$$\begin{array}{l} (a_{11} - \rho)\alpha + a_{12}\beta = 0; \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \rho)\beta = 0 \end{array}$$

hervor, welche nur dann gleichzeitig bestehen, nämlich dasselbe Richtungsverhältnis

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_{12}}{\rho - a_{11}} = \frac{\rho - a_{22}}{a_{12}}$$

ergeben können, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + A_{33} = 0 \,. \quad \text{(68}$$

Diese in ρ quadratische Gleichung hat die immer realen Wurzeln

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 \\ \rho_2 \end{array}\right\} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2} =$$
$$= \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2},$$

weil der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen als Summe von zwei Quadraten stets positiv ist. Demnach existieren im allgemeinen zwei Sehnenrichtungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\beta_1} &= \frac{a_{12}}{\rho_1 - a_{11}} = \frac{\rho_1 - a_{22}}{a_{12}} \\ \frac{\alpha_2}{\beta_2} &= \frac{a_{12}}{\rho_2 - a_{11}} = \frac{\rho_2 - a_{22}}{a_{12}} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (69$$

welchen ein Hauptdurchmesser conjugiert ist.

Durch Einführung der zusammengehörigen Werte $\rho_1, \alpha_1, \beta_1$ und $\rho_2, \alpha_2, \beta_2$ in die Gleichungen (67 erhält man

$$\begin{aligned} v_{11} &= \rho_1 \alpha_1; \quad v_{12} = \rho_2 \alpha_2; \\ v_{21} &= \rho_1 \beta_1; \quad v_{22} = \rho_2 \beta_2. \end{aligned}$$

Addiert man in jeder Gruppe, nachdem man in der Gruppe links mit α_2, β_2, rechts mit α_1, β_1 multipliciert hat, so folgt

$$V_{12} = \rho_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2); \quad V_{21} = \rho_2 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)$$

also wegen $V_{12} = V_{21}$

$$V_{12} - V_{21} = 0 = (\rho_1 - \rho_2)\ (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)$$

und da nur unter besonderen Voraussetzungen $\rho_1 = \rho_2$ ist, oder $\rho_1 - \rho_2 = 0$, kann nur

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0$$

sein, d. h. die gefundenen Richtungen sind zu einander senkrecht, also auch conjugiert, was übrigens (vgl. Art. 41) erwartet werden durfte. Dementsprechend ist auch

$$V_{12} = V_{21} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70$$

Addiert man ferner in jeder Gruppe, nachdem man links mit α_1, β_1, rechts mit α_2, β_2 multipliciert hat, so erhält man

$$V_{11} = \rho_1; \quad V_{22} = \rho_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71$$

Aus den Gleichungsformen $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$ und $v_1 x + v_2 y + v_3 = 0$ des der Richtung $\alpha : \beta$ conjugierten Durchmessers ergeben sich mit Rücksicht auf $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0$; $v_{1i} = \rho_i \alpha_i$; $v_{2i} = \rho_i \beta_i$ bei den centralen Linien folgende Gleichungsformen für die Hauptdurchmesser $h_1 (\alpha_1 : \beta_1)$ und $h_2 (\alpha_2 : \beta_2)$:

$$\left.\begin{array}{l} h_1 \ldots \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 = 0; \frac{u_1}{\alpha_1} = \frac{u_2}{\beta_1}; \ \alpha_2 x + \beta_2 y + \frac{v_{32}}{\rho_2} = 0 \\ h_2 \ldots \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 = 0; \frac{u_1}{\alpha_2} = \frac{u_2}{\beta_2}; \ \alpha_1 x + \beta_1 y + \frac{v_{31}}{\rho_1} = 0 \end{array}\right\} . \quad (72$$

Jeder Hauptdurchmesser trifft die centrale Linie in zwei Punkten, welche Scheitelpunkte heißen. Die nach den Scheitelpunkten gehenden Radien werden Hauptradien oder Halbaxen genannt; ihre Längen sind (Art. 38) bestimmt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} R_1{}^2 = -\frac{1}{V_{11}} \cdot \frac{A}{A_{33}} = -\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{A}{A_{33}} \\ R_2{}^2 = -\frac{1}{V_{22}} \cdot \frac{A}{A_{33}} = -\frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{A}{A_{33}} \end{array}\right\} \ldots\ldots (73$$

Da $\rho_1 + \rho_2 = a_{11} + a_{22}$; $\rho_1 \rho_2 = A_{33}$ (Art. 29), sind bei der realen und imaginären Ellipse ($A_{33} > 0$) ρ_1 und ρ_2 gleich bezeichnet, haben also dasselbe Vorzeichen wie die (wegen $A_{33} > 0$) gleich bezeichneten Coëfficienten a_{11} und a_{22}; die Hauptradien und mit ihnen die zwei Paare von Scheitelpunkten sind daher beide real oder beide imaginär. Hingegen sind bei der Hyperbel ($A_{33} < 0$) ρ_1 und ρ_2 verschieden bezeichnet und deshalb ist nur einer von den Hauptradien real, der andere imaginär, so dass nur ein Paar realer Scheitelpunkte existiert. Da nach der gebräuchlichen Bezeichnung ρ_1 die positive, ρ_2 die negative Wurzel ist, hängt es vom Vorzeichen der Discriminante ab, auf welchem Hauptdurchmesser die realen Scheitelpunkte liegen; sie befinden sich auf h_1, wenn $A > 0$, auf h_2, wenn $A < 0$.

Zwischen den Hauptradien besteht die Beziehung

$$R_1{}^2 : R_2{}^2 = \rho_2 : \rho_1.$$

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn die Wurzeln

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1 \\ \rho_2\end{array}\right\} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12}{}^2}}{2}$$

der quadratischen Gleichung (68 einander gleich werden, was nur möglich ist, wenn $a_{11} = a_{22}$; $a_{12} = 0$, d. h. die Gleichung $U = 0$ die specielle Form

$$a_{11}(x^2 + y^2) + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 \quad \ldots (74$$

annimmt. Dann ist

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = a_{11} = a_{22}.$$

Die Richtungen der Hauptdurchmesser werden jetzt unbestimmt, weil (Gl. 69)

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{0}{a_{11} - a_{11}} = \frac{a_{22} - a_{22}}{0} = \frac{0}{0};$$
$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{0}{a_{11} - a_{11}} = \frac{a_{22} - a_{22}}{0} = \frac{0}{0}.$$

Die betreffende Linie ist unter die Ellipsen zu rechnen, denn man findet $A_{33} = a_{11}^2 = a_{22}^2 > 0$; ihre Beschaffenheit zeigt sich nach der Transformation ihrer Gleichung auf parallele Axen durch den Mittelpunkt. Dadurch geht dieselbe in

$$a_{11}(x^2 + y^2) + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 = -\frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{A}{A_{33}}$$

über und man sieht, dass alle Punkte der Linie von dem Mittelpunkte den constanten Abstand $\sqrt{-\frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{A}{A_{33}}}$ haben; die Linie ist demnach ein (realer oder imaginärer) Kreis, von dem irgend zwei zu einander senkrechte Durchmesser conjugiert sind.

Bei der Parabel ist $A_{33} = 0$, die quadratische Gleichung (68 nimmt die Form

$$\rho\left[\rho - (a_{11} + a_{22})\right] = 0$$

an und hat die Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= 0 \\ \rho_2 &= a_{11} + a_{22} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75$$

Für die Hauptdurchmesser ergeben sich nun die Richtungsverhältnisse

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_{12}}{-a_{11}} = \frac{-a_{22}}{a_{12}}; \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

oder auch (Art. 32)

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{A_{31}}{A_{32}}; \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{-A_{32}}{A_{31}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76$$

Demnach hat, wie man auch erwarten konnte, ein Hauptdurchmesser (h_1) die gemeinsame Richtung $A_{31} : A_{32}$ aller Durchmesser nach dem unendlich fernen Mittelpunkte und nur dieser kann sich im endlichen Bereiche befinden, während der zweite, im Mittelpunkte zu ihm senkrechte (h_2) mit der unendlich fernen Geraden der Ebene zusammenfällt, was auch aus seiner Gleichung (s. Gl. 72)

$$h_2 \ldots \alpha_1 x + \beta_1 y + \frac{v_{31}}{\rho_1} = 0$$

zu ersehen ist, in welcher das constante Glied wegen $\rho_1 = 0$ unendlich groß wird.

Die Gleichung des Hauptdurchmessers h_2 — der Axe der Parabel — wird zweckmäßig in einer der Formen (s. Gl. 72)

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{u_1}{A_{31}} = \dfrac{u_2}{A_{32}} \\ A_{32} u_1 - A_{31} u_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (77$$

dargestellt. Die Parabel besitzt nur einen Scheitelpunkt im endlichen Bereiche, nämlich ihren Schnittpunkt mit der Axe.

Anmerkung. Aus der eingangs dieses Artikels aufgestellten Beziehung

$$v_1 : v_2 = \alpha : \beta$$

folgt

$$v_2 \alpha - v_1 \beta = 0$$

oder

$$a_{12} \alpha^2 - a_{12} \beta^2 + (a_{22} - a_{11}) \alpha \beta = 0,$$

also halbieren die Hauptdurchmesser die Winkel der Asymptoten (Art. 35, Gl. 55, Art. 37, 40).

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$5x^2 + 5y^2 - 2xy - 14x - 26y + 41 = 0$$

bei welcher

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & 5 & -13 \\ -7 & -13 & 41 \end{vmatrix}; \quad \begin{array}{l} A_{31} = 48; \\ A_{32} = 72; \\ A_{33} = 24; \\ A = -288 \end{array}$$

stellt eine Ellipse mit dem Mittelpunkte $P_c(2, 3)$ vor. Die quadratische Gleichung für die Axen ist

$$\rho^2 - 10\rho + 24 = 0;$$

demnach

$$\rho_1 = 6; \; \rho_2 = 4$$

und

$$h_1 \ldots \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{-1}{6-5} = \frac{-1}{1}; \; h_2 \ldots \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{-1}{4-5} = \frac{1}{1};$$

$$R_1^2 = -\frac{1}{6} \cdot -12 = 2; \; R_2^2 = -\frac{1}{4} \cdot -12 = 3;$$

$$R_1 = \sqrt{2}; \quad R_2 = \sqrt{3}.$$

b) Die Gleichung

$$5x^2 + 5y^2 - 2xy - 14x - 26y + 65 = 0$$

mit $A_{31} = 48$; $A_{32} = 72$; $A_{33} = 24$; $A = 288$ stellt eine imaginäre Ellipse vor, welche denselben Mittelpunkt und dieselben Axenrichtungen hat, wie sub *a* gefunden. Hingegen ist

$$R_1 = i\sqrt{2}; \quad R_2 = i\sqrt{3}.$$

c) Die Gleichung

$$3x^2 - 3y^2 + 8xy - 14x - 2y + 3 = 0,$$

bei welcher

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 4 & -3 & -1 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{array}{l} A_{31} = -25; \\ A_{32} = -25; \\ A_{33} = -25; \\ A = 125 \end{array}$$

stellt eine Hyperbel mit dem Mittelpunkte $P_c(1, 1)$ vor. Die quadratische Gleichung für die Axen ist

$$\rho^2 - 25 = 0;$$

demnach

$$\rho_1 = 5; \; \rho_2 = -5$$

und

$$h_1 \ldots \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{4}{5-3} = \frac{2}{1}; \quad h_2 \ldots \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{4}{-5-3} = \frac{1}{-2};$$

$$R_1 = \sqrt{-\frac{1}{5} \cdot -5} = 1; \quad R_2 = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot -5} = i.$$

d) Die Gleichung

$$x^2 + 9y^2 - 6xy - 20x - 40y + 75 = 0$$

mit $A_{31} = 150$; $A_{32} = 50$; $A_{33} = 0$; $A = -2500$ stellt eine Parabel vor, deren Durchmesser die Richtung $150 : 50 = 3 : 1$ haben. Die Gleichung des Hauptdurchmessers ist

$$50(x - 3y - 10) - 150(-3x + 9y - 20) = 0$$

oder

$$x - 3y + 5 = 0.$$

e) Man bestimme die Axen, eventuell auch Hauptradien der Linien

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 8y + 19 = 0;$$
$$7x^2 + 7y^2 - 2xy + 16x - 16y - 32 = 0;$$
$$x^2 + 2y^2 + 2\sqrt{30}\,xy + 28x + 56y - 42 = 0;$$
$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 4 = 0;$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0;$$

$$22x^2 + 17y^2 - 12xy - 26 = 0;$$
$$22x^2 + 17y^2 + 12xy - 26 = 0.$$

43. Scheitelpunkt und Scheiteltangente der Parabel. Wie bereits (Art. 42) erwähnt, besitzt die Parabel nur einen Scheitelpunkt (im endlichen Bereich), nämlich ihren Schnittpunkt mit der Axe. Die Tangente der Parabel im Scheitelpunkte ist zu der Axe senkrecht und heißt die Scheiteltangente. Als Tangente im Scheitelpunkte P_s hat sie (Art. 36) die Gleichung

$$u_{1s}x + u_{2s}y + u_{3s} = 0,$$

als Senkrechte zu der Axenrichtung $(A_{31} : A_{32})$ hingegen

$$A_{31}x + A_{32}y + \lambda = 0,$$

wo λ eine noch zu bestimmende Größe ist. Diese beiden Gleichungen können sich nur durch einen constanten Factor σ unterscheiden, so dass die Identität

$$u_{1s}x + u_{2s}y + u_{3s} \equiv \sigma(A_{31}x + A_{32}y + \lambda)$$

besteht, welche die Berechnung der Unbekannten x_s, y_s, λ ermöglicht. Zunächst zerfällt dieselbe in die drei Gleichungen

$$u_{1s} = \sigma A_{31};$$
$$u_{2s} = \sigma A_{32};$$
$$u_{3s} = \sigma \lambda.$$

Multipliciert man der Reihe nach einmal mit A_{11}, A_{21}, A_{31}, dann mit A_{12}, A_{22}, A_{32}; endlich mit A_{13}, A_{23}, A_{33} und addiert jedesmal, so folgen daraus (wegen $A_{33} = 0$) die Gleichungen

$$A x_s = \sigma (A_{11}A_{31} + A_{21}A_{32} + A_{31}\lambda);$$
$$A y_s = \sigma (A_{12}A_{31} + A_{22}A_{32} + A_{32}\lambda);$$
$$A = \sigma (A_{31}^2 + A_{32}^2).$$

Wenn man jetzt in der vorhandenen Reihenfolge die linken und rechten Seiten der Gleichungen der ersten Gruppe mit denselben Seiten jener der zweiten multipliciert und dann addiert, erhält man

$$A U_{ss} = \sigma^2 \left[A_{11}A_{31}^2 + A_{22}A_{32}^2 + 2A_{12}A_{31}A_{32} + 2(A_{31}^2 + A_{32}^2)\lambda\right],$$

und da $U_{ss} = 0$, weil P_s ein Punkt der Parabel, ist

$$A_{11}A_{31}^2 + A_{22}A_{32}^2 + 2A_{12}A_{31}A_{32} + 2(A_{31}^2 + A_{32}^2)\lambda = 0,$$

also

$$\lambda = -\frac{1}{2}\frac{A_{11}A_{31}^2 + A_{22}A_{32}^2 + 2A_{12}A_{31}A_{32}}{A_{31}^2 + A_{32}^2}.$$

Addiert und subtrahiert man im Zähler des Bruches den Ausdruck $A_{11}A_{32}^2 + A_{22}A_{31}^2$, so wird

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left(A_{11} + A_{22} + \frac{-A_{11}A_{32}^2 - A_{22}A_{31}^2 + 2A_{12}A_{31}A_{32}}{A_{31}^2 + A_{32}^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(A_{11} + A_{22} + \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}}{A_{31}^2 + A_{32}^2}\right),$$

wo in der Determinante rechts A_{33} statt Null gesetzt worden ist; dieselbe hat als Reciproke der Discriminante den Wert A^2. Setzt man noch (Art. 32, Gl. 48) $A_{31}^2 + A_{32}^2 = -(a_{11} + a_{22})A$, so erhält man schließlich

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left(A_{11} + A_{22} - \frac{A}{a_{11} + a_{22}}\right)$$

und die Gleichung der Scheiteltangente nimmt die Form an:

$$2A_{31}x + 2A_{32}y - \left(A_{11} + A_{22} - \frac{A}{a_{11} + a_{22}}\right) = 0 \quad . \quad (78$$

Ferner findet man aus den Gleichungen der zweiten Gruppe. indem man beide Seiten der ersten und zweiten durch jene der dritten dividiert:

$$\left.\begin{aligned} x_s &= \frac{A_{11}A_{31} + A_{21}A_{32} + A_{31}\lambda}{A_{31}^2 + A_{32}^2} \\ y_s &= \frac{A_{12}A_{31} + A_{22}A_{32} + A_{32}\lambda}{A_{31}^2 + A_{32}^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79$$

und kann daraus mit Hilfe des schon bestimmten Wertes von λ die Coordinaten des Scheitelpunktes berechnen. Einfachere Formeln ergeben sich durch folgendes Verfahren: Man setzt z. B. bei x_s den zuletzt ermittelten Ausdruck für λ ein und multipliciert beiderseits mit $2A_{31}$. Dadurch erhält man

$$2A_{31}x_s = 2\frac{A_{11}A_{31}^2 + A_{21}A_{31}A_{32}}{A_{31}^2 + A_{32}^2} -$$

$$-\frac{A_{31}^2}{A_{31}^2 + A_{32}^2}\left(A_{11} + A_{22} - \frac{A}{a_{11} + a_{22}}\right)$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen 48 (Art. 32) nach Zusammenziehung der Brüche rechts:

$$2A_{31}x_s = \frac{2(a_{11}+a_{22})(a_{22}A_{11}-a_{12}A_{12})-a_{22}[(a_{11}+a_{22})(A_{11}+A_{22})-A]}{(a_{11}+a_{22})^2} =$$

$$= \frac{(a_{11}+a_{22})(a_{22}A_{11}-2a_{12}A_{12}-a_{22}A_{22})+a_{22}A}{(a_{11}+a_{22})^2} =$$

$$= \frac{(a_{11}+a_{22})[(a_{11}+a_{22})A_{11}-a_{11}A_{11}-2a_{12}A_{12}-a_{22}A_{22}]+a_{22}A}{(a_{11}+a_{22})^2} =$$

$$= A_{11} - \frac{(a_{11}+a_{22})(A-a_{13}A_{13}+A-a_{23}A_{23})-a_{22}A}{(a_{11}+a_{22})^2} =$$

$$= A_{11} - \frac{(a_{11}+a_{22})(2A-A)-a_{22}A}{(a_{11}+a_{22})^2} = A_{11} - \frac{a_{11}A}{(a_{11}+a_{22})^2}.$$

Ähnlich geht man bei y_s vor, indem man mit $2A_{32}$ multipliciert u. s. w. Dadurch ergeben sich für die Coordinaten des Scheitelpunktes die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2A_{31}x_s &= A_{11} - \frac{a_{11}A}{(a_{11}+a_{22})^2} \\ 2A_{32}y_s &= A_{22} - \frac{a_{22}A}{(a_{11}+a_{22})^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (80$$

Wenn eine der Unterdeterminanten A_{31} oder A_{32} verschwindet, darf die betreffende der Gleichungen (80 nicht verwendet werden, da sich anscheinend ein unendlich großer Wert der entsprechenden Coordinate ergibt, thatsächlich aber die unbestimmte Form eines ganz bestimmten Wertes. Ein solcher Fall tritt nur ein, wenn die Gleichung $U=0$ unvollständig ist und dann geben die Gleichungen der Axe und der Scheiteltangente direct die Coordinaten des Scheitelpunktes an.

Beispiele und Aufgaben.

a) Bei der Parabel

$$x^2+y^2-2xy-6x-2y+13=0$$

ist

$$A_{31}=4;\ A_{32}=4;\ A_{33}=0;\ A=-16;\ A_{11}=12;\ A_{22}=4,$$

daher die Gleichung der Scheiteltangente

$$8x+8y-\left(12+4-\frac{-16}{2}\right)=0$$

oder

$$x+y-3=0;$$

ferner

$$8\,x_s = 12 - \frac{-16}{4} = 16;\ x_s = 2;$$

$$8\,y_s = 4 - \frac{-16}{4} = 8;\quad y_s = 1.$$

b) Bei der Parabel

$$x^2 - 4\,x - 4\,y + 20 = 0$$

ist

$$A_{31} = 0;\ A_{32} = 2;\ A_{33} = 0;\ A = -4;\ A_{11} = -4;\ A_{22} = 16,$$

daher die Richtung aller Durchmesser 0 : 2, sie sind der y-Axe parallel. Die Gleichung der Scheiteltangente ist

$$0\,.\,x + 4\,y - \left(-4 + 16 - \frac{-4}{1}\right) = 0$$

oder

$$y - 4 = 0,$$

jene der Axe ($A_{32}\,u_1 - A_{31}\,u_2 = 0$) lautet

$$x - 2 = 0$$

und durch diese beiden sind die Coordinaten des Scheitelpunktes

$$x_s = 2;$$
$$y_s = 4$$

bestimmt. Nach Gl. (80) hätte man

$$0\,.\,x_s = -4 - \frac{1\,.\,-4}{1} = 0;\ x_s = \frac{0}{0};$$

$$4\,y_s = 16 - \frac{0\,.\,4}{1} = 16;\ y_s = 4$$

gefunden.

c) Man ermittle die Scheiteltangenten und die Scheitelpunkte der Parabeln

$$(x - y)^2 - 2\,(x + y) = 0;$$
$$y^2 - 4\,x - 4\,y + 12 = 0;$$
$$x^2 - 2\,x - 6\,y + 19 = 0;$$
$$x^2 + 4\,y^2 - 4\,x\,y - 14\,x - 22\,y + 49 = 0.$$

44. Transformation der Gleichung einer centralen Linie auf die Hauptdurchmesser.

Es liegt nahe, die centrale Linie zweiter Ordnung auf ein Coordinatensystem zu beziehen, welches aus den Hauptdurchmessern als Coordinatenaxen gebildet wird. Wählt man die Hauptdurchmesser h_1 und h_2 als neue x- und y-Axe, demnach den Mittelpunkt P_c als neuen Nullpunkt, so geht die Gleichung $U = 0$ durch Transformation (Art. 33, Gl. 50) über in

$$V_{11}x^2 + V_{22}y^2 + 2V_{12}xy + 2(u_{1c}\alpha_1 + u_{2c}\beta_1)x + 2(u_{1c}\alpha_2 + u_{2c}\beta_2)y + \\ + U_{cc} = 0,$$

oder, weil

$V_{11} = \rho_1$; $V_{22} = \rho_2$; $V_{12} = 0$ (Art. 42); $u_{1c} = u_{2c} = 0$; $U_{cc} = \frac{A}{A_{33}}$ (Art. 38), in

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (81$$

Daraus folgt durch eine einfache Umformung

$$\frac{x^2}{-\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{A}{A_{33}}} + \frac{y^2}{-\frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{A}{A_{33}}} - 1 = 0.$$

Die Nenner der Brüche links sind (Art. 42, Gl. 73) gleich den Quadraten der Hauptradien R_1 und R_2, so dass man schließlich

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} - 1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (82$$

als charakteristische Form der Gleichung einer centralen Linie erhält, die auf ihre Hauptdurchmesser bezogen ist. Je nachdem die Hauptradien real oder imaginär, ihre Quadrate daher positiv oder negativ sind, kann man $R_1^2 = \pm a^2$; $R_2^2 = \pm b^2$ setzen, wo a und b reale positive Größen bedeuten; dadurch ergeben sich die Gleichungstypen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

welche erkennen lassen, dass die centrale Linie zweiter Ordnung nur eine (reale oder imaginäre) Ellipse oder eine Hyperbel sein kann (Art. 30).

Wenn $a_{12} = 0$, genügt schon die Transformation zu parallelen Axen durch den Mittelpunkt (Art. 39) um die charakteristische Gleichungsform

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

zu erhalten. Ebenso beim Kreis, wo überdies $a_{11} = a_{22}$, also die Gleichung (Art. 42)

$$a_{11}(x^2+y^2)+\frac{A}{A_{33}}=0$$

sich ergibt, somit

$$r=\sqrt{-\frac{1}{a_{11}}\cdot\frac{A}{A_{33}}}$$

ist.

Bei dem Paare nicht paralleler Geraden ($A=0$, $A_{33}\gtrless 0$) erhält man durch Transformation auf die Winkelhalbierungslinien (welche hier die Hauptdurchmesser vorstellen) die Gleichung

$$\rho_1 x^2+\rho_2 y^2=0,$$

deren linke Seite sich in lineare Factoren zerlegen lässt — reale oder imaginäre, je nachdem ρ_1 und ρ_2 ungleich oder gleich bezeichnet sind, also je nachdem $\rho_1\rho_2=A_{33}\lessgtr 0$.

Bei einem Paar paralleler Geraden werden die Hauptdurchmesser durch die Mittellinie und eine beliebige dazu senkrechte Gerade vertreten, deren Schnittpunkt als Mittelpunkt anzusehen ist. Die quadratische Gleichung

$$\rho^2-(a_{11}+a_{22})\rho=0$$

hat die Wurzeln

$$\rho_1=0;\ \rho_2=a_{11}+a_{22}.$$

Ferner ist

$$V_{11}=\rho_1=0;\ V_{22}=\rho_2=a_{11}+a_{22};\ V_{12}=0;$$

überdies (Art. 38)

$$u_{1c}=u_{2c}=0;\ U_{cc}=\frac{A_{11}}{a_{22}}=\frac{A_{22}}{a_{11}};$$

also hat die transformierte Gleichung eine der Formen

$$(a_{11}+a_{22})y^2+\frac{A_{11}}{a_{22}}=0;$$

$$(a_{11}+a_{22})y^2+\frac{A_{22}}{a_{11}}=0,$$

aus welchen man den Abstand der Geraden von einander

$$\delta=2\sqrt{\frac{-A_{11}}{a_{22}(a_{11}+a_{22})}}=2\sqrt{\frac{-A_{22}}{a_{11}(a_{11}+a_{22})}}$$

berechnen kann.

Beispiele und Aufgaben.

a) Bei der Gleichung

$$3x^2+3y^2+2xy-22x-18y+43=0$$

ist

$$A_{31}=24;\ A_{32}=16;\ A_{33}=8;\ A=-64;$$

die quadratische Gleichung

$$\rho^2 - 6\rho + 8 = 0$$

hat die Wurzeln

$$\rho_1 = 4;\ \rho_2 = 2,$$

also ist die auf die Hauptdurchmesser transformierte Gleichung

$$4x^2 + 2y^2 - 8 = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

und stellt eine Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{2}$, 2 vor.

b) Man transformiere auf dieselbe Art die Gleichungen

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 22x - 18y + 59 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + 14xy - 2x - 14y - 23 = 0;$$
$$2x^2 - 4y^2 + 2xy - 10x + 4y + 8 = 0;$$
$$9x^2 + y^2 + 6xy - 36x - 12y + 27 = 0.$$

45. Transformation der Gleichung einer nicht centralen Linie auf Hauptdurchmesser und Scheiteltangente. Wenn man den Hauptdurchmesser und die Scheiteltangente einer nicht centralen Linie zweiter Ordnung zur x- und y-Axe, also den Scheitelpunkt P_s zum Nullpunkt eines neuen Coordinatensystems macht und die allgemeine Gleichung darauf transformiert, so erhält man

$$V_{11}x^2 + V_{22}y^2 + 2V_{12}xy + 2(u_{1s}\alpha_1 + u_{2s}\beta_1)x +$$
$$+ 2(u_{1s}\alpha_2 + u_{2s}\beta_2)y + U_{ss} = 0.$$

Hierin ist $V_{11} = \rho_1 = 0$; $V_{22} = \rho_2 = a_{11} + a_{22}$; $V_{12} = 0$ (Art. 42) $U_{ss} = 0$, weil P_s auf der Linie liegt. Ferner hat der Hauptdurchmesser die Gleichung

$$\alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 = 0$$

und da der Scheitelpunkt auf ihm liegt, hat man

$$\alpha_2 u_{1s} + \beta_2 u_{2s} = 0.$$

Endlich ist

$$u_{1s}\alpha_1 + u_{2s}\beta_1 = v_{11}x_s + v_{21}y_s + v_{31} = v_{31},$$

weil $v_{11} = \rho_1\alpha_1 = 0$; $v_{21} = \rho_1\beta_1 = 0$ (Art. 42). Mit Rücksicht auf diese besonderen Werte der Coëfficienten nimmt die transformierte Gleichung die einfache Form

$$\rho_2 y^2 + 2v_{31}x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83$$

oder

$$y^2 = 2 \frac{-v_{31}}{\rho_2} x$$

an, aus der man erkennt, dass die nicht centrale Linie nur eine Parabel sein kann (Art. 30), deren Parameter

$$p = -\frac{v_{31}}{\rho_2}.$$

Da $\alpha_1 : \beta_1 = A_{31} : A_{32}$; $A_{33} = 0$, findet man

$$v_{31} = a_{31}\,\alpha_1 + a_{32}\,\beta_1 = \frac{a_{31}\,A_{31} + a_{32}\,A_{32} + a_{33}\,A_{33}}{\sqrt{A_{31}^2 + A_{32}^2}} = \frac{A}{\sqrt{-(a_{11} + a_{22})\,A}}.$$

Demnach

$$p = \frac{-A}{(a_{11} + a_{22})\sqrt{-(a_{11} + a_{22})\,A}}.$$

Die Quadratwurzel im Nenner ist mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen; A und $a_{11} + a_{22}$ sind (Art. 32) entgegengesetzt bezeichnet, daher p immer positiv. Deshalb kann man auch

$$p = \sqrt{\frac{-A}{(a_{11} + a_{22})^3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84$$

setzen, wenn nur das positive Vorzeichen der Quadratwurzel gilt. Aus dem Umstande, dass sich unter den gemachten Annahmen der Parameter p immer positiv ergibt, schließt man, dass eine durch die Gleichung $U = 0$ repräsentierte Parabel ihre Öffnung nach der Richtung $A_{31} : A_{32}$ gekehrt hat.

Beispiele und Aufgaben.

a) Bei der Parabel

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 12x - 26y + 36 = 0$$

ist

$$A_{31} = 50;\; A_{32} = 25;\; A_{33} = 0;\; A = -625;\; A_{11} = -25;\; A_{22} = 0;$$
$$x_s = 0;\; y_s = 2;$$

die Richtung des Hauptdurchmessers ist $\alpha_1 : \beta_1 = 50 : 25 = 2 : 1$, und nach dieser ist auch die Öffnung der Parabel gekehrt. Man findet

$$p = \sqrt{\frac{-(-625)}{5^3}} = \sqrt{5},$$

demnach als transformierte Gleichung

$$y^2 - 2\sqrt{5}\,x = 0.$$

b) Man gebe den Parameter der Parabel

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 24 = 0$$

an und stelle die transformierte Gleichung auf.

46. Übersicht der wichtigsten Untersuchungsergebnisse. Die allgemeine Gleichung $U = 0$ stellt, wie aus den bisher durchgeführten Untersuchungen hervorgeht, einen Kegelschnitt oder ein Geradenpaar vor, welche man als eigentliche oder degenerierte Linie zweiter Ordnung bezeichnen kann. Die möglichen Fälle mit ihren Kennzeichen sind:

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="3">$A \gtrless 0$. Eigentliche</td><td colspan="2">$A = 0$. Degenerierte</td></tr>
<tr><td colspan="5">Linie zweiter Ordnung</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A_{33} > 0$</td><td rowspan="3">centrale</td><td rowspan="2">Ellipse</td><td>$\left.\begin{matrix} a_{11} A \\ a_{22} A \end{matrix}\right\} < 0$, real</td><td rowspan="2">imaginäres</td><td rowspan="3">Geradenpaar mit realem Mittelpunkt im endlichen Bereich.</td></tr>
<tr><td>$\left.\begin{matrix} a_{11} A \\ a_{22} A \end{matrix}\right\} > 0$, imaginär</td></tr>
<tr><td>$A_{33} < 0$</td><td colspan="2">Hyperbel</td><td>reales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{33} = 0$</td><td rowspan="3">nicht centrale</td><td colspan="2" rowspan="3">Parabel</td><td>$\left.\begin{matrix} A_{11} \\ A_{22} \end{matrix}\right\} > 0$, imaginäres</td><td rowspan="3">Parallel-Geradenpaar mit realer Mittellinie.</td></tr>
<tr><td>$\left.\begin{matrix} A_{11} \\ A_{22} \end{matrix}\right\} < 0$, reales, getrenntes</td></tr>
<tr><td>$\left.\begin{matrix} A_{11} \\ A_{22} \end{matrix}\right\} = 0$, reales, vereinigtes</td></tr>
</table>

Von besonderer Bedeutung ist:

I. Bei den centralen Linien (Ellipse und Hyperbel):

Mittelpunkt: $x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}}$; $y_c = \frac{A_{32}}{A_{33}}$;

Axenrichtung: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_{12}}{\rho - a_{11}} = \frac{\rho - a_{22}}{a_{12}}$;

Hauptradius: $R^2 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{A}{A_{33}}$,

wenn ρ eine Wurzel der Gleichung $\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\,\rho + A_{33} = 0$.

Auf den Mittelpunkt parallel transformierte Gleichung:

$$Q + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Auf die Axen transformierte Gleichung:

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Gleichung der Asymptoten: $U - \frac{A}{A_{33}} = 0.$

Radius parallel der Tangente in $P_0 : r_0^2 = \frac{u_{10}^2 + u_{20}^2}{A_{33}}.$

II. Bei den nicht centralen Linien (Parabel):

Durchmesserrichtung: $\alpha_1 : \beta_1 = A_{31} : A_{32}.$

Gleichung der Axe: $\frac{u_1}{A_{31}} = \frac{u_2}{A_{32}}$ oder $A_{32} u_1 - A_{31} u_2 = 0.$

Gleichung der Scheiteltangente:

$$2 A_{31} x + 2 A_{32} y - \left(A_{11} + A_{22} - \frac{A}{a_{11} + a_{22}}\right) = 0.$$

Scheitelpunkt:

$$2 A_{31} x_s = A_{11} - \frac{a_{11} A}{(a_{11} + a_{22})^2}; \; 2 A_{32} y_s = A_{22} - \frac{a_{22} A}{(a_{11} + a_{22})^2}.$$

Parameter: $p = \sqrt{\frac{-A}{(a_{11} + a_{22})^3}}$ (mit positivem Vorzeichen der Wurzel).

Gleichung, transformiert auf Axe und Scheiteltangente:

$$y^2 - 2 \sqrt{\frac{-A}{(a_{11} + a_{22})^3}} \cdot x = 0.$$

III. Bei dem nicht parallelen Geradenpaar:

Mittelpunkt und Axen (Winkelhalbierungslinien) wie bei den centralen Linien.

Gleichungen der einzelnen Geraden (auch der einzelnen Asymptoten des Paares $U - \frac{A}{A_{33}} = 0$)

$$z_1 u_1 + u_2 = 0;$$
$$z_2 u_1 + u_2 = 0,$$

wenn z_1 und z_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a_{11} z^2 + 2 a_{12} z + a_{22} = 0.$$

Winkel der Geraden:

$$\tan g_1 g_2 = \frac{2 \sqrt{-A_{33}}}{a_{11} + a_{22}}.$$

IV. Bei dem Parallel-Geradenpaar:

Mittellinie $u_1 = 0$ oder $u_2 = 0$.

Abstand der Geraden von einander:

$$\delta = 2\sqrt{\frac{-A_{11}}{a_{22}(a_{11}+a_{22})}} = 2\sqrt{\frac{-A_{22}}{a_{11}(a_{11}+a_{22})}}.$$

Gleichungen der einzelnen Geraden:

$$u_1 \pm \sqrt{-A_{22}} = 0 \text{ oder } u_2 \pm \sqrt{-A_{11}} = 0.$$

V. In allen Fällen eigentlicher Linien.

Gleichung des Tangentenpaares aus P_0:

$$U_{00}U - U_0^2 = 0.$$

Gleichung der Polare des Punktes $P_0 (U_{00} \gtrless 0)$:

$$U_0 = 0.$$

Gleichung der Tangente in dem Punkte $P_0 (U_{00} = 0)$

$$U_0 = 0$$

$$(U_0 \equiv u_{10}x + u_{20}y + u_{30} \equiv u_1 x_0 + u_2 y_0 + u_3).$$

VI. In allen Fällen eigentlicher Linien:

Gleichung des der Richtung $\alpha : \beta$ conjugierten Durchmessers:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0.$$

47. Vorgang bei der Untersuchung einer Gleichung. Für die Untersuchung der geometrischen Bedeutung einer beliebigen Gleichung $U = 0$ bis zur Construction der von ihr repräsentierten Linie erscheint erfahrungsgemäß folgender Vorgang am zweckmäßigsten:

Man stellt zunächst die Matrix der Discriminante auf und berechnet $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A$; wenn $A_{33} = 0$, auch A_{11} und A_{22}.

Bei centralen Linien bildet man noch die quadratische Gleichung $\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + A_{33} = 0$ und bestimmt deren Wurzeln ρ_1, ρ_2. Aus den berechneten Größen ergeben sich die Coordinaten des Mittelpunktes, die Axenrichtungen und Halbaxen, die Linie kann daher construiert werden.

Bei der Parabel ermittelt man die Coordinaten des Scheitelpunktes (oder die Gleichungen der Axe und Scheiteltangente); ferner den Parameter. Die Gerade durch den Scheitelpunkt mit der Richtung $A_{31} : A_{32}$ ist dann die Axe, dazu senkrecht die Scheiteltangente. Durch Auftragen des halben Parameters vom Scheitelpunkte in und entgegen-

gesetzt der Richtung $A_{31} : A_{32}$ ergeben sich Brennpunkt und ein Punkt der Leitlinie, mit deren Hilfe die Parabel construiert werden kann.

Bei Geradenpaaren genügen für die Construction der Mittelpunkt oder die Mittellinie und die Schnittpunkte mit einer der Coordinatenaxen.

Aufgaben.

a) Man construiere nach den angegebenen Regeln die Linien:

$$8x^2 + 5y^2 + 4xy - 44x - 38y + 65 = 0;$$
$$8x^2 + 5y^2 + 4xy - 44x - 38y + 137 = 0;$$
$$4x^2 + 11y^2 - 24xy + 16x + 2y - 29 = 0;$$
$$4x^2 + 11y^2 - 24xy + 16x + 2y - 9 = 0;$$
$$4x^2 + 11y^2 - 24xy + 16x + 2y + 11 = 0;$$
$$16x^2 + 9y^2 - 24xy - 52x - 86y + 361 = 0;$$
$$4x^2 - 2y^2 - 2xy - 20x + 14y + 16 = 0;$$
$$9x^2 + 16y^2 + 24xy - 72x - 96y + 63 = 0;$$
$$2x^2 + 5y^2 + 6xy - 14x - 22y + 25 = 0;$$
$$9x^2 + 16y^2 + 24xy - 72x - 96y + 148 = 0;$$
$$x^2 + 4y^2 + 4xy - 8x - 16y + 16 = 0.$$

b) Man discutiere die Gleichungen

$$y^2 = 2px + qx^2,$$
$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (q + x)^2.$$

48. Linien zweiter Classe. Die Polare des Punktes P_0 in Bezug auf die Linie $U = 0$ hat (Art. 36) die Gleichung

$$u_{10} x + u_{20} y + u_{30} = 0.$$

Sind ξ_0, η_0 die Coordinaten der Polare, so lässt sich deren Gleichung auch in der Form

$$\xi_0 x + \eta_0 y + 1 = 0$$

darstellen und es besteht die Identität

$$u_{10} x + u_{20} y + u_{30} \equiv \sigma (\xi_0 x + \eta_0 y + 1),$$

wo σ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Die Identität zerfällt in dic Gleichungen

$$u_{10} = \sigma \xi_0;$$
$$u_{20} = \sigma \eta_0;$$
$$u_{30} = \sigma.$$

Addiert man, nachdem man der Reihe nach mit A_{11}, A_{21}, A_{31}; dann mit A_{12}, A_{22}, A_{32}; endlich mit A_{13}, A_{23}, A_{33} multipliciert hat, so gehen daraus die Gleichungen

$$A x_0 = \sigma (A_{11} \xi_0 + A_{21} \eta_0 + A_{31}) = \sigma t_{10};$$
$$A y_0 = \sigma (A_{12} \xi_0 + A_{22} \eta_0 + A_{32}) = \sigma t_{20};$$
$$A = \sigma (A_{13} \xi_0 + A_{23} \eta_0 + A_{33}) = \sigma t_{30}$$

hervor, wenn t_{10}, t_{20}, t_{30} Abkürzungen bedeuten. Multipliciert man nun die linken und rechten Seiten der Gleichungen der ersten Gruppe in der gegebenen Reihenfolge mit denselben Seiten der Gleichungen in der zweiten Gruppe und addiert, so folgt

$$A U_{00} = \sigma^2 (t_{10} \xi_0 + t_{20} \eta_0 + t_{30})$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$T_{00} \equiv t_{10} \xi_0 + t_{20} \eta_0 + t_{30} \equiv \{A_1 \xi_0 + A_2 \eta_0 + A_3\}^2 \equiv$$
$$\equiv A_{11} \xi_0^2 + A_{22} \eta_0^2 + 2 A_{12} \xi_0 \eta_0 + 2 A_{13} \xi_0 + 2 A_{23} \eta_0 + A_{33}$$

setzt,

$$A U_{00} = \sigma^2 T_{00}.$$

Lässt man P_0 auf die Linie rücken, so wird die Polare zur Tangente derselben in P_0, und da nun $U_{00} = 0$, der Factor σ aber seiner Natur nach nicht Null sein kann, wird auch

$$T_{00} = 0,$$

d. h. die Coordinaten einer beliebigen Tangente genügen der Gleichung

$$T = 0$$

oder

$$A_{11} \xi^2 + A_{22} \eta^2 + 2 A_{12} \xi \eta + 2 A_{13} \xi + 2 A_{23} \eta + A_{33} = 0,$$

welche also die Linie $U = 0$ in Liniencoordinaten vorstellt. Sie ist vom zweiten Grade, daher ist die Linie zweiter Ordnung auch eine Linie zweiter Classe.

---

4. Abschnitt.

Eigenschaften der Kegelschnitte.

49. Verschiedene Gleichungsformen und Beziehungen. Die Ableitung charakteristischer Gleichungsformen für einen Kegelschnitt und die mit ihm in Verbindung gebrachten Geraden, Punkte, Richtungen

oder für deren gegenseitige Beziehungen bietet ein Mittel, seine Eigenschaften zu ergründen. Im nachstehenden sei eine Auswahl solcher Gleichungen angeführt.

I. Aus der Identität

$$a_{11} U \equiv a_{11}{}^2 x + 2 a_{11} a_{12} x y + a_{11} a_{22} y^2 + 2 a_{11} a_{13} x + 2 a_{11} a_{23} y + \\ + a_{11} a_{33}$$

folgt durch Addition und Subtraction des Ausdruckes

$$a_{12}{}^2 y^2 + 2 a_{12} a_{13} y + a_{13}{}^2$$

die neue Identität

$$a_{11} U \equiv (a_{11} x + a_{12} y + a_{13})^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}{}^2) y^2 - 2(a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}) y + \\ + (a_{11} a_{33} - a_{13}{}^2).$$

Auf ähnlichem Wege findet man die Identität

$$a_{22} U \equiv (a_{12} x + a_{22} y + a_{23})^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}{}^2) x^2 - 2(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) x + \\ + (a_{22} a_{33} - a_{23}{}^2)$$

und durch Addition eine dritte. Mit Hilfe der bekannten Bezeichnungen ergeben sich demnach die drei identischen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} U \equiv u_1{}^2 + A_{33} y^2 - 2 A_{23} y + A_{22} \\ a_{22} U \equiv u_2{}^2 + A_{33} x^2 - 2 A_{13} x + A_{11} \\ (a_{11} + a_{22}) U \equiv u_1{}^2 + u_2{}^2 + A_{33}(x^2 + y^2) - 2 A_{13} x - 2 A_{23} y + A_{11} + A_{22} \end{array}\right\},$$

die man auch in den Formen

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} U - u_1{}^2 \equiv A_{33} y^2 - 2 A_{23} y + A_{22} \\ a_{22} U - u_2{}^2 \equiv A_{33} x^2 - 2 A_{13} x + A_{11} \\ (a_{11} + a_{22}) U - (u_1{}^2 + u_2{}^2) \equiv A_{33}(x^2 + y^2) - 2 A_{13} x - 2 A_{23} y + A_{11} + A_{22} \end{array}\right\}$$

darstellen kann.

II. Die allgemeine Gleichung $U = 0$ stelle einen centralen Kegelschnitt vor, dessen Radien also mit Hilfe der Gleichung

$$r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{33}}$$

zu berechnen sind. Dann repräsentiert die Gleichung $U + k = 0$, wenn k irgend eine Constante bedeutet, ebenfalls einen centralen Kegelschnitt, der mit dem ersten den Mittelpunkt und die Hauptdurchmesser gemein hat. Die gleichgerichteten Radien aber ergeben sich nun aus der Gleichung

$$r'^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A + k \cdot A_{33}}{A_{33}}.$$

Soll die Beziehung $r'^2 = -r^2$ stattfinden, muss

$$A + k \cdot A_{33} = -A,$$

daher

$$k = -2\frac{A}{A_{33}}$$

sein. Demnach stellt die Gleichung

$$U - 2\frac{A}{A_{33}} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (85$$

einen Kegelschnitt vor, welcher zu dem Kegelschnitt $U = 0$ in der eigenthümlichen Beziehung steht, dass die Hauptdurchmesser beider aufeinander liegen, aber einem realen Radius r des einen ein imaginärer Radius $r i = r\sqrt{-1}$ des anderen von derselben Richtung entspricht und umgekehrt. Stellt demnach $U = 0$ eine imaginäre oder reale Ellipse vor, so wird durch

$$U - 2\frac{A}{A_{33}} = 0$$

eine reale oder imaginäre Ellipse ausgedrückt mit den Halbaxen a, b der realen, a i, b i der imaginären. Hingegen geht aus der Gleichung $U = 0$ einer Hyperbel mit der realen Halbaxe a, der imaginären b i die Gleichung

$$U - 2\frac{A}{A_{33}} = 0$$

der conjugierten Hyperbel hervor mit der realen Halbaxe b und der imaginären a i. Die Richtigkeit ist leicht an der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

zu erproben.

III. Die Gleichung der Geraden, welche die Punkte P_1 und P_2 eines Kegelschnittes verbindet, lässt sich in besonderer Form mittelst der Gleichungen $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ der Tangenten der Linie in diesen Punkten ausdrücken; sie lautet

$$U_1 + U_2 - U_{12} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (86$$

was durch eine einfache Probe bestätigt wird; setzt man nämlich einmal die Coordinaten von P_1, dann jene von P_2 ein, so wird

$$U_{11} + U_{21} - U_{12} \equiv U_{12} - U_{12} \equiv 0;$$
$$U_{12} + U_{22} - U_{12} \equiv U_{12} - U_{12} \equiv 0.$$

Die Gleichung

$$U_1 - U_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87$$

stellt den Durchmesser $P_0 P_c$ vor; denn sie ist linear combiniert aus den Gleichungen der Tangenten, die sich in P_0 schneiden und wird durch die Coordinaten des Mittelpunktes P_c befriedigt:

$$U_{1c} - U_{2c} \equiv \frac{A}{A_{33}} - \frac{A}{A_{33}} \equiv 0.$$

Dieser Durchmesser schneidet die Sehne $P_1 P_2$ in einem Punkte P_m, dessen Theilverhältnis

$$\lambda = \frac{P_1 P_m}{P_2 P_m} = \frac{U_{11} - U_{21}}{U_{12} - U_{22}} = \frac{- U_{21}}{U_{12}} = - 1,$$

d. h. er halbiert dieselbe.

IV. Die Gleichung des der Richtung $\alpha : \beta$ conjugierten Durchmessers ist

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0.$$

Ist jene Richtung bei einem centralen Kegelschnitte durch die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit einem Punkte P_i gegeben, also $\alpha : \beta = (x_i - x_c) : (y_i - y_c)$, so geht die Gleichung über in

$$(x_i - x_c)\, u_1 + (y_i - y_c)\, u_2 + u_3 - u_3 = 0;$$
$$u_1 x_i + u_2 y_i + u_3 - (u_1 x_c + u_2 y_c + u_3) = 0;$$
$$U_i - U_c = 0,$$

also schließlich in

$$U_i - \frac{A}{A_{33}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88$$

Man sieht daraus, dass der Durchmesser parallel ist der Polare des Punktes P_i. Soll ein Punkt P_k auf dem Durchmesser liegen, so müssen dessen Coordinaten seiner Gleichung genügen, daher muss

$$U_{ik} - \frac{A}{A_{33}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89$$

sein. Diese Gleichung sagt aber auch aus, dass der Punkt P_i auf dem Durchmesser

$$U_k - \frac{A}{A_{33}} = 0$$

liegt, der conjugiert ist zu der Richtung der Geraden $P_c P_k$. Demnach ist die Bedingung, dass die Verbindungslinien der Punkte P_i und P_k mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes $U = 0$ conjugierte Durchmesser sein sollen, in der Gleichung $U_{ik} = \frac{A}{A_{33}}$ enthalten.

V. Die Tangente des Kegelschnittes $U = 0$ in dem Punkte P_0 hat die Gleichung

$$U_0 = 0.$$

Wird der als central vorausgesetzte Kegelschnitt von dem Durchmesser $P_c P_0$ noch in dem Punkte P'_0 getroffen, so ist

$$x_c = \frac{x_0 + x'_0}{2}; \quad y_c = \frac{y_0 + y'_0}{2},$$

demnach

$$x'_0 = 2x_c - x_0; \quad y'_0 = 2y_c - y_0$$

und der Gleichung

$$u_1 x'_0 + u_2 y'_0 + u_3 = 0$$

der Tangente in P'_0 kann die Form

$$u_1 (2x_c - x_0) + u_2 (2y_c - y_0) + u_3 (2 - 1) = 0$$

oder

$$2U_c - U_0 = 0$$

gegeben werden, die wegen $U_c = \frac{A}{A_{33}}$ in

$$U_0 - 2\frac{A}{A_{33}} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (90$$

übergeht.

VI. Der centrale Kegelschnitt $U = 0$ wird von dem Durchmesser mit der Richtung $\alpha : \beta$ in zwei Punkten getroffen, deren Coordinaten $x_c \pm r\alpha$; $y_c \pm r\beta$ sind, wenn $r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{33}}$.

Die Tangenten in diesen Punkten haben die Gleichungen

$$u_1 (x_c \pm r\alpha) + u_2 (y_c \pm r\beta) + u_3 = 0$$

oder

$$\frac{A}{A_{33}} + r(u_1 \alpha + u_2 \beta) = 0;$$

$$\frac{A}{A_{33}} - r(u_1 \alpha + u_2 \beta) = 0.$$

Folglich wird das Tangentenpaar durch die Gleichung

$$\frac{A^2}{A_{33}{}^2} - r^2 (u_1 \alpha + u_2 \beta)^2 = 0$$

repräsentiert, welche nach Einführung des Wertes von r^2 in

$$V \frac{A}{A_{33}} + (u_1 \alpha + u_2 \beta)^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (91$$

übergeht.

VII. Für zwei beliebige Richtungen $g_i(\alpha_i, \beta_i)$ und $g_k(\alpha_k, \beta_k)$ bestehen zwischen den Ausdrücken V_{ii}, V_{kk}, V_{ik} bemerkenswerte Beziehungen, die im folgenden entwickelt werden sollen.

Es ist

$$\begin{vmatrix} V_{ii} & V_{ik} \\ V_{ki} & V_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{1i}\alpha_i + v_{2i}\beta_i & v_{1i}\alpha_k + v_{2i}\beta_k \\ v_{1k}\alpha_i + v_{2k}\beta_i & v_{1k}\alpha_k + v_{2k}\beta_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{1i} & v_{2i} \\ v_{1k} & v_{2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} v_{1i} & v_{2i} \\ v_{1k} & v_{2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\alpha_i + a_{12}\beta_i & a_{21}\alpha_i + a_{22}\beta_i \\ a_{11}\alpha_k + a_{12}\beta_k & a_{21}\alpha_k + a_{22}\beta_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix};$$

demnach

$$V_{ii} V_{kk} - V_{ik}{}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix}^2 = A_{33} \sin^2 g_i g_k,$$

und wenn die beiden Richtungen conjugiert sind ($V_{ik} = 0$):

$$V_{ii}\, V_{kk} = A_{33} \sin^2 g_i g_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92$$

Multipliciert man beide Seiten der Gleichungen

$$V_{ii} = a_{11}\alpha_i^2 + a_{22}\beta_i^2 + 2a_{12}\alpha_i\beta_i;$$

$$V_{kk} = a_{11}\alpha_k^2 + a_{22}\beta_k^2 + 2a_{12}\alpha_k\beta_k;$$

$$V_{ik} = a_{11}\alpha_i\alpha_k + a_{22}\beta_i\beta_k + a_{12}(\alpha_i\beta_k + \alpha_k\beta_i).$$

Der Reihe nach zuerst mit α_k^2, α_i^2, $-2\alpha_i\alpha_k$, dann mit β_k^2, β_i^2, $-2\beta_i\beta_k$ und addiert jedesmal, so erhält man

$$V_{ii}\alpha_k^2 + V_{kk}\alpha_i^2 - 2V_{ik}\alpha_i\alpha_k = a_{22}(\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i)^2 = a_{22}\sin^2 g_i g_k;$$

$$V_{ii}\beta_k^2 + V_{kk}\beta_i^2 - 2V_{ik}\beta_i\beta_k = a_{11}(\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i)^2 = a_{11}\sin^2 g_i g_k;$$

und durch Summierung

$$V_{ii} + V_{kk} - 2 V_{ik} \cos g_i g_k = (a_{11} + a_{22}) \sin^2 g_i g_k;$$

demnach, wenn die Richtungen conjugiert sind:

$$V_{ii} + V_{kk} = (a_{11} + a_{22}) \sin^2 g_i g_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93$$

50. Beziehungen zwischen zwei Paaren paralleler Tangenten. Zwei Paare paralleler Tangenten bestimmen ein dem Kegelschnitte umschriebenes Parallelogramm, welchem bemerkenswerte Eigenschaften zukommen.

I. Die Diagonalen des umschriebenen Parallelogrammes sind conjugierte Durchmesser des Kegelschnittes. Es mögen P_1 und P_2 beliebige Punkte desselben sein. Dann werden durch die Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} U_1 = 0 \\ U_1 - 2 \frac{A}{A_{33}} = 0 \end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix} U_2 = 0 \\ U_2 - 2 \frac{A}{A_{33}} = 0 \end{matrix}\right\}$$

zwei Paare paralleler Tangenten dargestellt (Art. 49, V). Da

$$U_1 - U_2 \equiv \left(U_1 - 2 \frac{A}{A_{33}}\right) - \left(U_2 - 2 \frac{A}{A_{33}}\right),$$

so stellt die Gleichung

$$U_1 - U_2 = 0$$

eine Diagonale und ebenso, weil

$$U_1 + \left(U_2 - 2 \frac{A}{A_{33}}\right) \equiv U_2 + \left(U_1 - 2 \frac{A}{A_{33}}\right),$$

die Gleichung

$$U_1 + U_2 - 2 \frac{A}{A_{33}} = 0$$

die zweite Diagonale des von den zwei Tangentenpaaren gebildeten, umschriebenen Parallelogrammes vor. Nun halbiert die erste die Sehne $P_1 P_2$, während die zweite zu ihr parallel ist (Art. 49, III) und da beide durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen — wovon man sich durch Einsetzung der Mittelpunktscoordinaten leicht überzeugen kann — sind sie conjugierte Durchmesser. Bei der Parabel rückt offenbar der zweite Durchmesser mit zwei Tangenten in das Unendliche.

II. Durch die Gleichungen (s. Art. 36, Anmerkung)

$$V_{11} U - (u_1 \alpha_1 + u_2 \beta_1)^2 = 0;$$
$$V_{22} U - (u_1 \alpha_2 + u_2 \beta_2)^2 = 0$$

werden zwei Paare paralleler Tangenten mit den Richtungen $\alpha_1 : \beta_1$ und $\alpha_2 : \beta_2$ repräsentiert. Durch Addition erhält man die Gleichung

$$(V_{11} + V_{22}) U - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) u_1^2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2) u_2^2 - \\ - 2 (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) u_1 u_2 = 0,$$

welche einen durch die vier Schnittpunkte der Tangentenpaare, d. h. Eckpunkte des von ihnen bestimmten umschriebenen Parallelogrammes gehenden Kegelschnitt vorstellt. Sind die zwei Richtungen zu einander senkrecht, ist also das Parallelogramm ein Rechteck, so wird (Art. 15)

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1; \; \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1; \; \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0; \\ V_{11} + V_{22} = a_{11} + a_{22}$$

und jene Gleichung geht in

$$(a_{11} + a_{22}) U - (u_1^2 + u_2^2) = 0,$$

oder (Art. 49, I) in

$$A_{33} (x^2 + y^2) - 2 A_{13} x - 2 A_{23} y + A_{11} + A_{22} = 0$$

über, stellt somit einen Kreis vor, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $\frac{A_{31}}{A_{33}}; \frac{A_{32}}{A_{33}}$ hat, also mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes identisch ist. Da sich für eine beliebige Richtung $\alpha : \beta$ bei dieser Gleichung

$$V' = A_{33} (\alpha^2 + \beta^2) = A_{33};$$

ferner

$$A'_{33} = A_{33}^2$$

und

$$A' = A_{33} (A_{11} A_{33} - A_{13}^2 + A_{22} A_{33} - A_{23}^2) = A_{33} (a_{11} + a_{22}) A = \\ = A_{33} (\rho_1 + \rho_2) A$$

ergibt, findet man für den Radius des Kreises

$$r^2 = -\frac{1}{V'} \cdot \frac{A'}{A'_{33}} = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{A}{A_{33}} = R_1^2 + R_2^2,$$

also $r^2 = a^2 + b^2$ bei der Ellipse, $r^2 = a^2 - b^2$ bei der Hyperbel. Dieser Kreis, welcher bei der Hyperbel auch imaginär werden kann, wird der Leitkreis genannt. Auf ihm liegen die Eckpunkte eines jeden dem Kegelschnitte umschriebenen Rechteckes oder mit anderen Worten: Er ist der Ort der Schnittpunkte der zu einander senkrechten Tangenten. Bei der Parabel kann nur die letztere Anschauung in Betracht kommen; in diesem Falle reduciert sich die Gleichung des Kreises (wegen $A_{33} = 0$) auf die Gleichung

$$2 A_{13} x + 2 A_{23} y - (A_{11} + A_{22}) = 0,$$

einer zu der Scheiteltangente (Art. 43) im Abstande

$$\frac{1}{2} \frac{A}{(a_{11} + a_{22}) \sqrt{A_{31}^2 + A_{32}^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-A}{(a_{11} + a_{22})^3}} = \frac{p}{2}$$

parallelen Geraden, welche demnach identisch ist mit der Leitlinie der Parabel. (Art. 45, 30.)

III. Die Gleichungen

$$V U - (u_1 \alpha + u_2 \beta)^2 = 0;$$
$$V \frac{A}{A_{33}} + (u_1 \alpha + u_2 \beta)^2 = 0$$

stellen zwei Paare paralleler Tangenten eines centralen Kegelschnittes vor, von welchen das erste die Richtung $\alpha : \beta$ (Art. 36), hingegen das zweite jene Punkte zu Berührungspunkten hat, in welchen der Kegelschnitt von dem zum ersten parallelen Durchmesser getroffen wird. (Art. 49, VI.) Daher sind die Richtungen der beiden Tangentenpaare conjugiert, nämlich jedes derselben ist parallel zu einem von zwei conjugierten Durchmessern. Durch Addition folgt die Gleichung

$$U + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

einer Linie, welche durch die Schnittpunkte der Tangentenpaare, d. h. durch die Eckpunkte des von ihnen bestimmten Parallelogrammes geht. Da die Gleichung von der Richtung $\alpha : \beta$ unabhängig, liegen überhaupt die Eckpunkte aller umschriebenen Parallelogramme, deren Seiten parallel sind zu zwei conjugierten Durchmessern, auf dieser Linie, die offenbar ein Kegelschnitt derselben Art ist, wie der gegebene, denselben Mittelpunkt und dieselben Hauptdurchmesser besitzt. Hingegen sind, weil

$$V' = V; \; A'_{33} = A_{33}; \; A' = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + \left(a_{33} + \frac{A}{A_{33}}\right) A_{33} = 2 A;$$

also

$$r'^2 = -\frac{1}{V'} \cdot \frac{A'}{A'_{33}} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{2 A}{A_{33}} = 2 r^2$$

oder

$$r' = r \sqrt{2},$$

die Radien derselben Richtung nur proportional, mithin bei Ellipse und Hyperbel $a' = a \sqrt{2}$; $b' = b \sqrt{2}$.

Bei der Ellipse sind beide Tangentenpaare und mit ihnen die Eckpunkte des umschriebenen Parallelogrammes real. Bei der Hyperbel dagegen ist ein Tangentenpaar imaginär, deshalb sind auch die Eckpunkte des umschriebenen Parallelogrammes imaginär; ihre (imaginären) Coordinaten genügen aber der Gleichung

$$U + \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

wovon man sich leicht bei der auf die Hauptdurchmesser bezogenen Gleichung einer Hyperbel überzeugen kann. Ersetzt man das imaginäre Tangentenpaar der Hyperbel $U = 0$ durch das reale von derselben Richtung, das an die conjugierte Hyperbel (Art. 49, II)

$$U - 2\frac{A}{A_{33}} = 0$$

gelegt werden kann, so ergibt sich wieder ein Parallelogramm mit realen Seiten und Eckpunkten. Es sei $VU - (u_1\alpha + u_2\beta)^2 = 0$ das imaginäre Tangentenpaar; von diesem geht man zu dem gleichgerichteten realen an die conjugierte Hyperbel über, wenn man $U - 2\frac{A}{A_{33}}$ statt U schreibt:

$$V\left(U - 2\frac{A}{A_{33}}\right) - (u_1\alpha + u_2\beta)^2 = 0.$$

Die Gleichung des realen Tangentenpaares

$$V\frac{A}{A_{33}} + (u_1\alpha + u_2\beta)^2 = 0$$

bleibt ungeändert. Jetzt ergibt sich durch Addition die Gleichung

$$U - \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

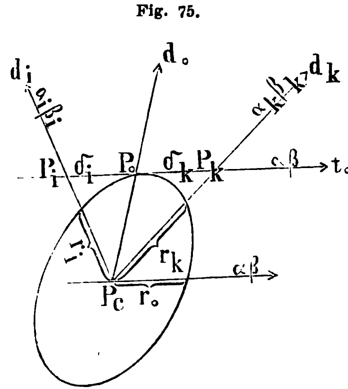
d. h. die Eckpunkte eines jeden Parallelogrammes, von welchem ein Paar paralleler Seiten eine Hyperbel, das andere Paar die conjugierte Hyperbel berühren, liegen auf den gemeinschaftlichen Asymptoten, sobald die Richtungen der Seiten conjugiert sind. Man erkennt daraus, dass ein Paar conjugierter Durchmesser der Hyperbel harmonisch ist zu ihren Asymptoten.

51. Beziehungen zwischen conjugierten Durchmessern und Radien centraler Kegelschnitte. Von den Beziehungen, die zwischen

conjugierten Durchmessern oder conjugierten Radien bestehen, sollen hier nur die wichtigsten angeführt werden.

I. Auf zwei conjugierten Durchmessern d_i und d_k (Fig. 75) mögen die Punkte P_i und P_k derart angenommen sein, dass ihre Verbindungslinie zusammenfällt mit der Tangente t_0 in einem beliebigen Punkte P_0 des Kegelschnittes. Die Gleichungen der Durchmesser sind:

Fig. 75.



$$d_i \ldots U_k - \frac{A}{A_{33}} = 0; \quad d_k \ldots U_i - \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

(Art. 49, IV.) Der zur Richtung $\alpha : \beta$ der Tangente t_0 conjugierte Durchmesser d_0 hat die Gleichung

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$$

und geht durch den Punkt P_0. Die Abstände $P_0 P_i = \delta_i$ und $P_0 P_k = \delta_k$ können auf zwei Arten bestimmt werden, entweder als die in der Richtung der Tangente t_0 gemessenen Entfernungen der Durchmesser d_i und d_k von dem Punkte P_0 oder als die in derselben Richtung gemessenen Abstände des Durchmessers d_0 von den Punkten P_i und P_k Die zur Berechnung nothwendigen Gleichungen ergeben sich im ersten Falle daraus, dass die Coordinaten $x_i = x_0 + \alpha \delta_i$; $y_i + \beta \delta_i$ und $x_k = x_0 + \alpha \delta_k$; $y_k = x_0 + \beta \delta_k$ den Gleichungen der Durchmesser d_i und d_k genügen müssen; durch Einsetzung erhält man

$$u_{1k}(x_0 + \alpha \delta_i) + u_{2k}(y_0 + \beta \delta_i) + u_{3k} - \frac{A}{A_{33}} = 0;$$

$$u_{1i}(x_0 + \alpha \delta_k) + u_{2i}(y_0 + \beta \delta_k) + u_{3i} - \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

oder

$$U_{k0} + \delta_i (u_{1k} \alpha + u_{2k} \beta) - \frac{A}{A_{33}} = 0;$$

$$U_{i0} + \delta_k (u_{1i} \alpha + u_{2i} \beta) - \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Wegen der Lage von P_i und P_k auf t_0 ist $U_{i0} = U_{k0} = 0$, demnach

$$\delta_i = \frac{1}{u_{1k}\alpha + u_{2k}\beta} \cdot \frac{A}{A_{33}}; \quad \delta_k = \frac{1}{u_{1i}\alpha + u_{2i}\beta} \cdot \frac{A}{A_{33}}.$$

Im anderen Falle genügen wieder die Coordinaten $x_0 = x_i - \alpha\delta_i$; $y_0 = y_i - \beta\delta_i$ oder $x_0 = x_k - \alpha\delta_k$; $y_0 = y_k - \beta\delta_k$ der Gleichung des Durchmessers d_0 und man erhält mittelst der Form

$$v_1 x + v_2 y + v_3 = 0$$

derselben die Bedingungsgleichungen:

$$v_1(x_i - \alpha\delta_i) + v_2(y_i - \beta\delta_i) + v_3 = 0;$$
$$v_1(x_k - \alpha\delta_k) + v_2(y_k - \beta\delta_k) + v_3 = 0$$

oder

$$v_1 x_i + v_2 y_i + v_3 - V\delta_i = 0;$$
$$v_1 x_k + v_2 y_k + v_3 - V\delta_k = 0$$

und aus diesen

$$\delta_i = \frac{v_1 x_i + v_2 y_i + v_3}{V} = \frac{u_{1i}\alpha + u_{2i}\beta}{V};$$

$$\delta_k = \frac{v_1 x_k + v_2 y_k + v_3}{V} = \frac{u_{1k}\alpha + u_{2k}\beta}{V}.$$

Multipliciert man den zuerst erhaltenen Wert von δ_i oder δ_k mit dem zuletzt erhaltenen von δ_k oder δ_i, so folgt immer

$$\delta_i\,\delta_k = \frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{33}},$$

also, weil der Ausdruck $\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{33}}$ das negative Quadrat des zur Tangente in P_0 parallelen Radius r_0 darstellt,

$$\delta_i\,\delta_k = -r_0^2.$$

Bei der Ellipse ist r_0^2 positiv, bei der Hyperbel negativ, daher werden bei jener die Schnittpunkte von zwei conjugierten Durchmessern mit einer Tangente durch den Berührungspunkt getrennt, bei dieser aber nicht. Bei der Hyperbel ist zu bemerken, dass $-r_0^2$ gleich ist dem Quadrate des zur Tangente parallelen Radius der conjugierten Hyperbel.

II. Sind r_i und r_k die Längen von zwei conjugierten Radien, also

$$r_i^2 = -\frac{1}{V_{ii}} \cdot \frac{A}{A_{33}}; \quad r_k^2 = -\frac{1}{V_{kk}} \cdot \frac{A}{A_{33}},$$

so ist

$$r_i^2 \, r_k^2 = \frac{1}{V_{ii} \, V_{kk}} \cdot \frac{A^2}{A_{33}^2},$$

oder, weil (Art. 49, VII)

$$V_{ii} \, V_{kk} = A_{33} \sin^2 d_i \, d_k = \rho_1 \, \rho_2 \sin^2 d_i \, d_k,$$

$$r_i^2 \, r_k^2 \sin^2 d_i \, d_k = \frac{1}{\rho_1 \, \rho_2} \frac{A^2}{A_{33}^2} = R_1^2 \, R_2^2,$$

demnach bei der Ellipse $r_i \, r_k \sin d_i \, d_k = a \, b$, d. h. die Fläche des von zwei conjugierten Radien bestimmten Dreieckes ist constant und gleich jener des von den Hauptradien bestimmten rechtwinkeligen Dreieckes. Ist bei der Hyperbel von den beiden conjugierten Radien r_k der imaginäre und R_2 der imaginäre Hauptradius, ferner r_k' der mit r_k gleich gerichtete Radius der conjugierten Hyperbel, b deren reale Halbaxe, so dass $r_k' \sqrt{-1} = r_k$; $b \sqrt{-1} = R_2$, so wird

$$r_i \, r_k' \sin d_i \, d_k = a \, b,$$

d. h. die Fläche des von einem Radius r_i einer Hyperbel und dem in der conjugierten Richtung gemessenen r_k' der conjugierten Hyperbel bestimmten Dreieckes ist constant und gleich jener eines rechtwinkeligen Dreieckes mit den Katheten a, b.

Noch lässt sich eine Beziehung bezüglich der Quadratsumme conjugierter Radien nachweisen. Es ist

$$r_i^2 + r_k^2 = -\left(\frac{1}{V_{ii}} + \frac{1}{V_{kk}}\right) \frac{A}{A_{33}} = -\frac{V_{ii} + V_{kk}}{V_{ii} \, V_{kk}} \frac{A}{A_{33}}$$

oder, weil (Art. 49, VII)

$$V_{ii} \, V_{kk} = \rho_1 \, \rho_2 \sin^2 d_1 \, d_2,$$

$$V_{ii} + V_{kk} = (a_{11} + a_{22}) \sin^2 d_i \, d_k = (\rho_1 + \rho_2) \sin^2 d_i \, d_k,$$

auch

$$r_i^2 + r_k^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \, \rho_2} \cdot \frac{A}{A_{33}} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{A}{A_{33}} - \frac{1}{\rho_2} \frac{A}{A_{33}} = R_1^2 + R_2^2,$$

mithin $r_i^2 + r_k^2 = a^2 + b^2$ bei der Ellipse, $r_i^2 + r_k^2 = a^2 - b^2$ bei der Hyperbel.

52. Der Kreis. Bei der Behandlung des Problems der Hauptdurchmesser (Art. 42) wurde festgestellt, dass eine Gleichung von der Form

$$a_{11} (x^2 + y^2) + 2 \, a_{13} \, x + 2 \, a_{23} \, y + a_{33} = 0$$

einen Kreis vorstellt. Anderseits folgt aus der Definition des Kreises als Ort eines Punktes P (x, y), welcher von dem gegebenen Punkte C (a, b) den gegebenen Abstand r hat, direct die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Ordnet man und setzt $a^2 + b^2 - r^2 = k$. so folgt daraus die sogenannte Normalform

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0$$

der Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkte C und dem Radius r. Abgekürzt sei dieselbe durch

$$S = 0$$

dargestellt. Der Vergleich beider Formen zeigt, dass

$$a = -\frac{a_{13}}{a_{11}}; \quad b = -\frac{a_{23}}{a_{11}}; \quad r^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2};$$

demnach repräsentiert die allgemeine Gleichung einen realen oder imaginären Kreis, je nachdem

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 \gtreqless a_{11}a_{33}.$$

Besondere Gleichungsformen ergeben sich bei speciellen Lagen des Kreises:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

wenn sein Mittelpunkt im Nullpunkte liegt;

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0,$$

wenn er durch den Nullpunkt geht:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0;$$
$$x^2 + y^2 - 2by = 0,$$

wenn außerdem der Mittelpunkt auf der x-Axe oder auf der y-Axe liegt u. s. w.

Beachtenswerth ist der Fall, wenn $r = 0$ (Nullkreis). Dann lässt sich die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

auch in der Form

$$\left[(x - a) + i(x - b)\right]\left[(x - a) - i(x - b)\right] = 0$$

darstellen und repräsentiert ein imaginäres Geradenpaar mit dem realen Mittelpunkte C (a, b); doch wird sie in manchen Untersuchungen als Repräsentant des Nullkreises angewendet.

I. Eine durch den beliebigen Punkt P_0 und die Richtung $\alpha : \beta$ bestimmte Gerade schneidet den Kreis

$$S = 0$$

in zwei Punkten, deren Abstände s' und s'' von P_0 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$s^2 - 2\left[(x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta\right]s + S_{00} = 0$$

sind (Art. 36). Die Schnittpunkte können real getrennt, zusammenfallend oder imaginär sein, immer ist aber (Art. 29)

$$s' s'' = S_{00},$$

d. h. unabhängig von der Richtung der Geraden ist das Product der vom Kreise auf ihr bestimmten Abschnitte eine constante, nur von der Lage des Punktes P_0 abhängige Größe S_{00}, welche dessen Potenz in Bezug auf den Kreis genannt wird. Die Potenz des Nullpunktes ist k. Sind aus P_0 reale Tangenten an den Kreis möglich, deren Berührungspunkte von P_0 den Abstand t haben, so ist für diese $s' = s'' = t$, mithin

$$S_{00} = t^2.$$

Sind aber keine realen Tangenten möglich, dann gibt es zwei reale, entgegengesetzt gleiche Abschnitte, wenn nämlich

$$(x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta = 0,$$

d. h. wenn die Gerade senkrecht ist zu der Verbindungslinie des Punktes P_0 mit dem Mittelpunkte C des Kreises. In diesem Falle ist $s' = h$; $s'' = -h$ und

$$S_{00} = -h^2.$$

Man entnimmt dem Vorstehenden, dass die Potenz eines Punktes positiv oder negativ ist, je nachdem er außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt. Sie wird Null, wenn der Punkt sich auf dem Kreise selbst befindet.

II. Die Tangente in dem Punkte P_0 des Kreises ist senkrecht zu dem Radius CP_0, ihre Gleichung ist demnach

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

Schreibt man $x - a + a - x_0$ und $y - b + b - y_0$ statt $x - x_0$ und $y - y_0$, so wird daraus:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - (x_0 - a)^2 - (y_0 - b)^2 = 0$$

und da

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2,$$

weil der Punkt auf dem Kreise liegt, kann die Gleichung der Tangente auch in der Form

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - r^2 = 0$$

gegeben werden. Befindet sich der Mittelpunkt im Nullpunkte, so reduciert sie sich auf

$$x_0 x + y_0 y - r^2 = 0.$$

III. Durch die Schnittpunkte der Kreise

$$S' = 0; \quad S'' = 0$$

gehen unendlich viele Kreise, die ein Kreisbüschel bilden. Sie werden durch die Gleichung

$$S' - \lambda S'' = 0$$

repräsentiert. In der That hat diese Gleichung die Form

$$(1 - \lambda)(x^2 + y^2) - 2(a' - \lambda a'')x + 2(b' - \lambda b'')y + k' - \lambda k'' = 0$$

oder die Normalform

$$x^2 + y^2 - 2\frac{a' - \lambda a''}{1 - \lambda}x - 2\frac{b' - \lambda b''}{1 - \lambda}y + \frac{k' - \lambda k''}{1 - \lambda} = 0,$$

stellt daher einen Kreis vor, dessen Mittelpunkt C die Coordinaten

$$a = \frac{a' - \lambda a''}{1 - \lambda}; \quad b = \frac{b' - \lambda b''}{1 - \lambda}$$

hat, also auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte C' und C'' liegend, die Strecke C' C'' nach dem Verhältnis λ theilt. Wird $\lambda = 1$, so rückt C in unendliche Entfernung, aus der Gleichung

$$S' - \lambda S'' = 0$$

wird aber

$$S' - S'' = 0$$

oder

$$2(a'' - a')x + 2(b'' - b')y + k' - k'' = 0,$$

d. h. der Kreis ist in die gerade Verbindungslinie der Schnittpunkte der gegebenen zwei Kreise übergegangen, welche auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht steht und die Chordale oder Potenzlinie derselben genannt wird. Liegt ein Punkt P_0 auf der Chordale, so ist $S'_{00} - S''_{00} = 0$ oder $S'_{00} = S''_{00}$, d. h. der Punkt hat gleiche Potenzen

in Bezug auf beide Kreise; wenn also aus ihm Tangenten an diese möglich sind, liegen deren Berührungspunkte in einem Kreise, welcher die Kreise $S' = 0$ und $S'' = 0$ rechtwinkelig schneidet.

IV. Den drei Kreisen

$$S' = 0; \quad S'' = 0; \quad S''' = 0$$

entsprechen die drei Chordalen

$$S' - S'' = 0; \quad S'' - S''' = 0; \quad S''' - S' = 0,$$

die offenbar durch einen Punkt gehen, welcher der Potenzmittelpunkt oder Chordalpunkt genannt wird. Bezeichnet man denselben mit P_0, so gilt für seine Coordinaten die Beziehung

$$S_{00}' = S_{00}'' = S_{00}''',$$

d. h. er hat dieselbe Potenz in Bezug auf alle drei Kreise. Sind aus ihm Tangenten an die Kreise möglich, so liegen deren Berührungspunkte in einem vierten Kreise, welcher die drei anderen rechtwinkelig schneidet.

53. Die Ellipse. Die auf ihre Hauptdurchmesser bezogene Ellipse hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Durch Auflösung nach x oder y erhält man

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2};$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

und erkennt, dass für reale Punkte $-b \leqq y \leqq b$; $-a \leqq x \leqq a$ sein muss. Es sei $a > b$ angenommen, so dass $a^2 - b^2 = e^2$; für den Radius OP ergibt sich

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

oder

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 = y^2 + \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2),$$

demnach

$$\overline{OP}^2 = b^2 + \frac{e^2}{a^2} x^2 = a^2 - \frac{e^2}{b^2} y^2.$$

Daraus folgt, dass die kleine Halbaxe b der kleinste, die große Halbaxe a der größte Radius der Ellipse ist. Da sich innerhalb der

angegebenen Grenzen keine imaginären Werte der Coordinaten eines Punktes der Ellipse ergeben können, ist sie eine allseitig begrenzte, geschlossene Linie.

I. Die Tangente im Punkte P_0 hat (Art. 36) die Gleichung

$$\frac{x_0\,x}{a^2} + \frac{y_0\,y}{b^2} - 1 = 0,$$

also ist $\frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2}$ das Richtungsverhältnis der Normale in demselben Punkte und

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)}$$

deren Gleichung, die leicht auf die Form

$$\frac{a^2\,x}{x_0} - \frac{b^2\,y}{y_0} - e^2 = 0$$

gebracht werden kann. Die x-Axe (große Axe der Ellipse) wird von Tangente und Normale in den Punkten T_0 und N_0 geschnitten, deren Theilverhältnisse τ_0 und ν_0 in Bezug auf die Brennpunkte $F_1(-e, 0)$; $F_2(e, 0)$ (Art. 19, II)

$$\tau_0 = \frac{-\frac{x_0\,e}{a^2} - 1}{\frac{x_0\,e}{a^2} - 1} = \frac{a + \frac{e}{a}\,x_0}{a - \frac{e}{a}\,x_0}; \quad \nu_0 = \frac{-\frac{a^2\,e}{x_0} - e^2}{\frac{a^2\,e}{x_0} - e^2} = -\frac{a + \frac{e}{a}\,x_0}{a - \frac{e}{a}\,x_0}$$

sind oder, weil $a + \frac{e}{a}\,x_0 = r_{10} = F_1 P_0$; $a - \frac{e}{a}\,x_0 = r_{20} = F_2 P_0$ (Fig. 76, vgl. Art. 30),

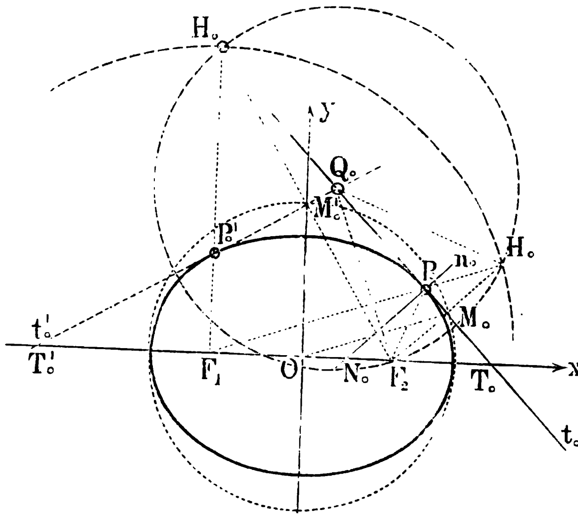
$$\tau_0 = \frac{r_{10}}{r_{20}}; \quad \nu_0 = -\frac{r_{10}}{r_{20}},$$

also sind diese Punkte harmonisch zu den Brennpunkten, und zwar liegt N_0 zwischen denselben. Zieht man durch F_2 zu der Normalen die Parallele bis zu ihrem Schnittpunkte H_0 mit dem Leitstrahl $F_1 P_0$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $F_1 N_0 P_0$ und $F_1 F_2 H_0$

$$\frac{F_1 P_0}{P_0 H_0} = \frac{F_1 N_0}{N_0 F_2} = -\frac{F_1 N_0}{F_2 N_0} = -\nu_0 = \frac{r_{10}}{r_{20}}$$

nd da $F_1 P_0 = r_{10}$, ist $P_0 H_0 = r_{20} = F_2 P_0$, somit $F_2 H_0 P_0$ ein gleichc henkeliges Dreieck und die Tangente das Höhenloth desselben,

Fig. 76.



welches die Basis $F_2 H_0$ in M_0 halbiert. Daraus erkennt man, dass Tangente und Normale die Winkel der Leitstrahlen halbieren.

Ist Q_0 ein beliebiger Punkt der Tangente, so liegt, weil $Q_0 F_2 = Q_0 H_0$, der Punkt H_0 auf einem um Q_0 beschriebenen Kreise, welcher durch den Brennpunkt F_2 geht. Anderseits ist $F_1 H_0 = F_1 P_0 + P_0 H_0 = r_{10} + r_{20} = 2a$, mithin H_0 auch ein Punkt des um den Brennpunkt F_1 mit dem Radius $2a$ beschriebenen Kreises. Damit ist die Construction der Tangenten aus einem beliebigen Punkte Q_0 gegeben: Man zieht die genannten zwei Kreise, verbindet ihre Schnittpunkte H_0, H'_0 mit F_2 und fällt aus Q_0 auf die Verbindungslinien die Senkrechten. Diese sind die gesuchten Tangenten. Sie werden von den Strahlen $F_1 H_0$ und $F_1 H'_0$ in den Berührungspunkten P_0 und P'_0 getroffen.

Da $O M_0 = \frac{1}{2} F_1 H_0 = a$, liegt der Fußpunkt M_0 der auf die Tangente Senkrechten aus dem Brennpunkte F_2 auf dem Kreise, welcher um den Mittelpunkt der Ellipse mit dem Radius a beschrieben ist. Dadurch ist die Construction der Tangenten von gegebener Richtung ermittelt: Man schneidet den genannten Kreis durch die Senkrechte zu der Tangentenrichtung aus einem Brennpunkte und erhält dadurch von jeder Tangente einen Punkt.

II. Schreibt man die Gleichung der Ellipse in der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

und beachtet, dass darin die Ausdrücke $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ dasselbe Verhalten zeigen wie Cosinus und Sinus eines Winkels, so wird man darauf geführt

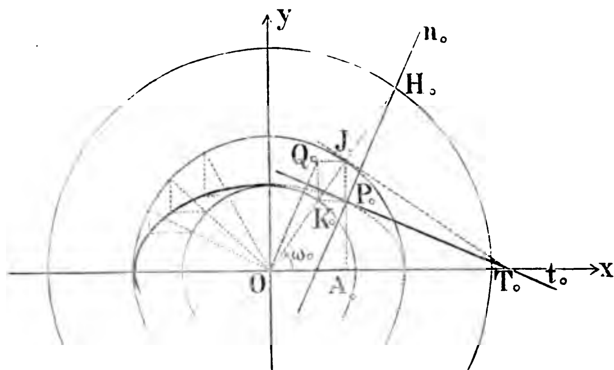
$$\frac{x}{a} = \cos \omega; \ \frac{y}{b} = \sin \omega$$

oder

$$x = a \cos \omega; \ y = b \sin \omega$$

zu setzen, so dass die Coordinaten irgend eines Punktes der Ellipse mittelst des Parameters ω dargestellt erscheinen. Durch diese Parametergleichungen ist eine bekannte Construction der Ellipse ausgesprochen: Man beschreibt (Fig. 77) mit den Radien a und b um den Mittel-

Fig. 77.



punkt O zwei Kreise, zieht unter dem Winkel ω_0 gegen die große Axe (x-Axe) einen Strahl, der die Kreise in den Punkten J_0, K_0 schneidet. Die Parallelen durch K_0 zu der großen, durch J_0 zu der kleinen Axe bestimmen einen Punkt P_0 der Ellipse, denn es ist $x_0 = a \cos \omega_0$; $y_0 = b \sin \omega_0$.

Die Normale in P_0 hat das Richtungsverhältnis

$$\frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} = \frac{a \cos \omega_0}{a^2} = \frac{b \sin \omega_0}{b^2} = b \cos \omega_0 : a \sin \omega_0,$$

sie ist also parallel zu dem Strahl, welcher den Nullpunkt mit dem Schnittpunkte Q_0 der Parallelen durch J_0 zu der großen, durch K_0 zu der kleinen Axe verbindet; sie schneide den Strahl $O K_0$ in dem Punkte H_0; die Dreiecke $O K_0 Q_0$ und $H_0 J_0 P_0$ sind congruent, somit ist $J_0 H_0 = O K_0 = b$ und $O H_0 = O J_0 + J_0 H_0 = a + b$, d. h. der Ort

aller Punkte H_0 ist der um den Mittelpunkt der Ellipse mit dem Radius $a + b$ beschriebene Kreis. Die auf dieser Thatsache beruhende Normalenconstruction bedarf keiner näheren Erläuterung.

Aus der Gleichung der Tangente

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

findet man den Abschnitt derselben auf der x-Axe, wenn man darin $y = 0$ setzt:

$$O T_0 = \frac{a^2}{x_0} = \frac{a^2}{a \cos \omega_0} = \frac{a}{\cos \omega_0},$$

also treffen sich die Tangente der Ellipse in P_0 und die Tangente an den Kreis vom Radius a in J_0 auf der x-Axe. Hierauf beruht eine leicht verständliche Tangentenconstruction.

Wenn P_1, P_2 Punkte der Ellipse, J_1, J_2 die ihnen entsprechenden Punkte auf dem Kreise mit dem Radius a sind, werden die Geraden $P_1 P_2$ und $J_1 J_2$ durch die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a \cos \omega_1 & b \sin \omega_1 & 1 \\ a \cos \omega_2 & b \sin \omega_2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a \cos \omega_1 & a \sin \omega_1 & 1 \\ a \cos \omega_2 & a \sin \omega_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ausgedrückt, welche für $y = 0$ denselben Wert

$$x = a \frac{\sin (\omega_2 - \omega_1)}{\sin \omega_2 - \sin \omega_1}$$

ergeben; die zwei Geraden schneiden sich demnach auf der x-Axe. Damit wird die Aufgabe gelöst, die Halbaxen einer Ellipse zu construieren, wenn Mittelpunkt, Axenrichtungen und zwei Punkte derselben gegeben sind (mit Hilfe der Mittelpunkte von $P_1 P_2$ und $J_1 J_2$).

III. Aus den Gleichungen der Tangente und Normale ergeben sich die Abschnitte der letzteren auf der y-Axe (kleinen Axe)

$$O T'_0 = \frac{b^2}{y_0}; \quad O N'_0 = -\frac{e^2 y_0}{b^2},$$

so dass

$$O T'_0 \, . \, O N'_0 = - e^2,$$

d. h. der über $T'_0 N'_0$ als Durchmesser geschlagene Kreis geht durch die Brennpunkte. Letztere können also gefunden werden, wenn von der Ellipse Mittelpunkt, Axenrichtungen und eine Tangente sammt

ihrem Berührungspunkte bekannt sind. Dann ergibt sich die große Axe als Summe der Leitstrahlen u. s. w.

IV. Eine wichtige Aufgabe ist die Ermittlung der Axen der Ellipse, wenn ein Paar conjugierter Durchmesser mit den zugehörigen Radien gegeben ist. Sind die conjugierten Radien durch $P_c P_1$ und $P_c P_2$ (Fig. 78) nach Länge und Richtung dargestellt, so ist die Parallele

Fig. 78.

durch P_2 zu $P_c P_1$ eine Tangente der Ellipse und wird infolge dessen von zwei beliebigen conjugierten Durchmessern d_i, d_k in den Punkten P_i, P_k getroffen, so dass (Art. 51, I) $P_2 P_i \cdot P_2 P_k = -r_1{}^2$. Schlägt man demnach über $P_i P_k$ als Durchmesser einen Kreis, so schneidet dieser die Normale in P_2 in den Punkten P und Q derart, dass $Q P_2 = P_2 P = r_1$. Umgekehrt bestimmt dieser Kreis und jeder andere durch P und Q gehende zwei Punkte P_i, P_k auf der Tangente, deren Verbindungslinien mit dem Mittelpunkte conjugierte Durchmesser sind. Unter diesen Kreisen befindet sich einer, welcher auch durch P_c geht und auf der Tangente die Punkte H_1, H_2 ausschneidet, deren Verbindungslinien h_1, h_2 mit P_c zu einander senkrecht und conjugierte Durchmesser, also die Axen der Ellipse sind. Sie halbieren den Winkel der Geraden $P_c Q$ und $P_c P$, denn es ist $Q P_c P$ ein Peripheriewinkel auf dem Bogen $Q H_1 P$, der von H_1, oder auf dem Bogen $Q H_2 P$, der von H_2 halbiert wird. Da ferner $\sphericalangle P_c P_2 Q = \frac{\pi}{2} - d_1 d_2$, findet man

$$\overline{P_c P}^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \sin d_1 d_2;$$
$$\overline{P_c Q}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \sin d_1 d_2$$

oder, weil (Art. 51, II)

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2 + b^2; \quad r_1 r_2 \sin d_1 d_2 = a b,$$

auch

$$P_c P = a + b; \quad P_c Q = a - b,$$

also

$$a = \frac{1}{2}(P_c P + P_c Q); \quad b = \frac{1}{2}(P_c P - P_c Q).$$

54. Die Hyperbel. Die auf ihre Hauptdurchmesser bezogene Hyperbel hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Durch Auflösung nach x oder y erhält man

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2};$$
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2};$$

und erkennt, dass y jeden positiven oder negativen Wert annehmen darf, während für reale Punkte $-a \geqq x \geqq a$ sein muss.

Im vorliegenden Falle ist a die Halbaxe der Brennpunkte, $a^2 + b^2 = e^2$ und für den Radius OP ergibt sich

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 = y^2 + \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2),$$

demnach

$$\overline{OP}^2 = a^2 + \frac{e^2}{b^2} y^2.$$

Daraus folgt, dass die reale Halbaxe a der kleinste Radius der Hyperbel ist; die Längen der übrigen Radien liegen zwischen a und ∞.

Die der betrachteten conjugierte Hyperbel hat die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

und man sieht leicht ein, dass bei ihr x jeden Wert annehmen kann, während $-b \geqq y \geqq b$ sein muss. Die Längen der Radien nehmen von b bis ∞ zu.

I. Die Asymptoten der Hyperbel sind (Art. 40) zusammen durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

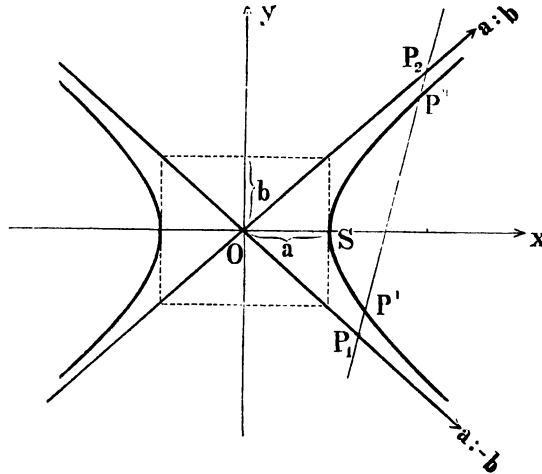
repräsentiert, einzeln durch

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

sie haben also die Richtungsverhältnisse a : b und a : — b und geben auch die Richtungen der unendlich großen Radien an.

Nimmt man auf den Asymptoten (Fig. 79) zwei beliebige Punkte P_1, P_2 an, so schneidet deren Verbindungslinie die Hyperbel in zwei

Fig. 79.



Punkten P', P'', deren Theilverhältnisse in Bezug auf P_1 und P_2 aus der Gleichung (Art. 34)

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) - 2\left(\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1\right)\lambda + \left(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - 1\right)\lambda^2 = 0$$

zu berechnen sind. Da laut Voraussetzung

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0; \quad \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 0,$$

reduciert sich die Gleichung auf

$$\lambda^2 + 2\left(\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1\right)\lambda + 1 = 0,$$

also ist

$$\lambda' \lambda'' = 1$$

oder

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda''}; \ \lambda'' = \frac{1}{\lambda'}.$$

Man schließt daraus, dass $P_1 P' = P'' P_2$ oder $P_1 P'' = P' P_2$, ferner dass die Halbierungspunkte der Strecken $P_1 P_2$ und $P' P''$ zusammenfallen. Die Hyperbel und ihre Asymptoten werden daher von einer Geraden in vier Punkten geschnitten, so dass die zwischen je einem Punkte der Hyperbel und einem der Asymptoten enthaltenen Strecken einander gleich sind. Darauf gründet sich die einfache und bekannte Construction der Hyperbel, wenn deren Asymptoten und ein Punkt gegeben sind: Man zieht durch den Punkt beliebige Strahlen und trägt auf jedem die in ihm gemessene Strecke von dem Punkte bis zu einer Asymptote von der anderen Asymptote derart auf, dass ein Punkt in demselben Winkel oder in dem Scheitelwinkel bestimmt wird.

Wird die Hyperbel von der Geraden $P_1 P_2$ berührt, so fallen die Schnittpunkte $P' P''$ zusammen in einem Punkte P_0, der die Strecke $P_1 P_2$ halbiert. Damit löst man die Aufgabe, zu einer Tangente den Berührungspunkt oder zu einem Punkte die Tangente zu construieren, wenn die Asymptoten gegeben sind.

Die Parallelen zu den Asymptoten durch einen beliebigen Punkt P_0 der Hyperbel haben die Gleichungen

$$\frac{x - x_0}{a} - \frac{y - y_0}{b} = 0; \ \frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{b} = 0;$$

sie schneiden die x-Axe (Axe der Brennpunkte) in den Punkten M_1 $(a_1, 0)$ und M_2 $(a_2, 0)$, so dass

$$a_1 = x_0 - \frac{a}{b} y_0; \quad a_2 = x_0 + \frac{a}{b} y_0$$

und

$$a_1 a_2 = x_0^2 - \frac{a^2}{b^2} y_0^2 = x_0^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} (x_0^2 - a^2),$$

also

$$a_1 a_2 = a^2,$$

mithin a als mittlere geometrische Proportionale zwischen a_1 und a_2 leicht zu construieren ist.

II. Die Tangente im Punkte P_0 hat (Art. 36) die Gleichung

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0,$$

also ist[1] $\frac{x_0}{a^2} : -\frac{y_0}{b^2}$ das Richtungsverhältnis der Normale in demselben Punkte und

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)} = \frac{y - y_0}{\left(-\frac{y_0}{b^2}\right)},$$

deren Gleichung, die leicht auf die Form

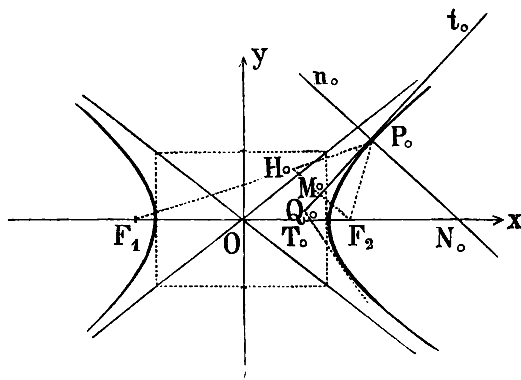
$$\frac{a^2 x}{x_0} + \frac{b^2 y}{y^0} - e^2 = 0$$

gebracht werden kann. Die x-Axe (Axe der Brennpunkte der Hyperbel) wird von Tangente und Normale in den Punkten T_0 und N_0 geschnitten, deren Theilverhältnisse τ_0 und ν_0 in Bezug auf die Brennpunkte F_1 $(-e, 0)$; F_2 $(e, 0)$ (Art. 19, II)

$$\tau_0 = \frac{-\frac{x_0 e}{a^2} - 1}{\frac{x_0 e}{a^2} - 1} = -\frac{\frac{e}{a} x_0 + a}{\frac{e}{a} x_0 - a}; \quad \nu_0 = \frac{-\frac{a^2 e}{x_0} - e^2}{\frac{a^2 e}{x_0} - e^2} = \frac{\frac{e}{a} x_0 + a}{\frac{e}{a} x_0 - a}$$

sind oder, weil $\frac{e}{a} x_0 + a = r_{10} = F_1 P_0$; $\frac{e}{a} x_0 - a = r_{20} = F_2 P_0$ (Fig. 80, vgl. Art. 30),

Fig. 80.



$$\tau_0 = -\frac{r_{10}}{r_{20}}; \quad \nu_0 = \frac{r_{10}}{r_{20}};$$

diese Punkte sind also harmonisch zu den Brennpunkten, und zwar liegt T_0 zwischen den letzteren. Die Winkel der Leitstrahlen werden von Tangente und Normale halbiert, wofür der Beweis analog jenem bei der Ellipse leicht zu erbringen ist, ebenso für die Construction der

Tangenten aus einem gegebenen Punkte Q_0 oder mit gegebener Richtung.

III. Die Tangente im Punkte P_0 der Hyperbel (Fig. 81)

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

und die Asymptoten

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

begrenzen ein Dreieck $O P_1 P_2$, für dessen Fläche sich (Art. 22)

$$2F = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a^2} & -\frac{y_0}{b^2} & -1 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \end{vmatrix}^2}{-\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x_0}{a^2} & -\frac{y^0}{b^2} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x_0}{a^2} & -\frac{y_0}{b^2} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{-2}{ab}\right)^2}{\frac{2}{a^3 b^3}\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)}$$

oder, weil $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$,

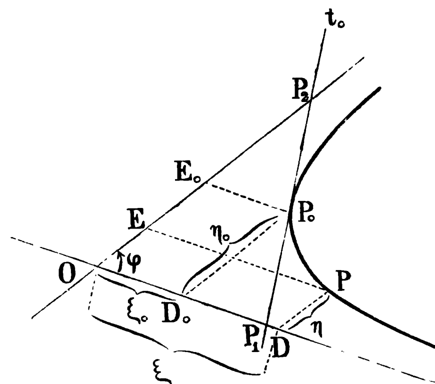
$$2F = 2ab$$

ergibt; demnach ist

$$F = ab,$$

d. h. diese Fläche hat für jede Tangente dieselbe Größe wie die Fläche, welche eine Scheiteltangente abschneidet.

Fig. 81.



Zieht man durch P_0 die Parallele zu jeder Asymptote bis zum Schnittpunkte mit der anderen, so entsteht das Parallelogramm $O D_0 P_0 E_0$, dessen Inhalt die Hälfte von jenem des Dreieckes $O P_1 P_2$ beträgt, weil P_0 die Strecke $P_1 P_2$ halbiert. Bezeichnet man

mit ξ_0 und η_0 die Seiten des Parallelogrammes, mit φ den Winkel der Asymptoten, so ist

$$2\,\xi_0\,\eta_0\,\sin\varphi = a\,b.$$

Da ξ_0, η_0 als die (schiefwinkeligen) Coordinaten des Punktes P_0 in Bezug auf die Asymptoten als Coordinatenaxen angesehen werden können, so gilt für einen beliebigen Punkt P mit den Coordinaten ξ, η die Gleichung

$$2\,\xi\,\eta = \frac{a\,b}{\sin\varphi},$$

welche mithin die auf ihre Asymptoten bezogene Hyperbel repräsentiert.

IV. Schreibt man die Gleichung der Hyperbel in der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

und beachtet, dass darin die Ausdrücke $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ dasselbe Verhalten zeigen, wie Secante und Tangente eines Winkels, so wird man darauf geführt

$$\frac{x}{a} = \sec\omega = \frac{1}{\cos\omega};\ \frac{y}{b} = \tan\omega$$

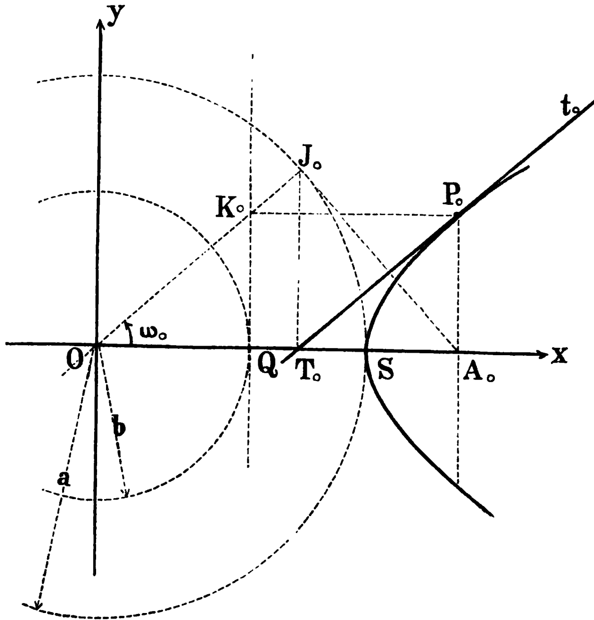
oder

$$x = \frac{a}{\cos\omega};\ y = b\tan\omega$$

zu setzen, so dass die Coordinaten irgend eines Punktes der Hyperbel mittelst des Parameters ω dargestellt erscheinen. Durch diese Parametergleichungen ist folgende Construction der Hyperbel ausgesprochen: Man beschreibt (Fig. 82) mit den Radien a und b um den Mittelpunkt O zwei Kreise, zieht unter dem Winkel ω_0 gegen die reale Axe (x-Axe) einen Strahl, der den ersten Kreis in dem Punkte J_0, die zur imaginären Axe (y-Axe) parallele Tangente des zweiten (in Q) in dem Punkte K_0 schneidet. Die Tangente des ersten Kreises in J_0 schneidet die x-Axe in dem Fußpunkte A_0 des Lothes aus dem gesuchten Hyperbelpunkte P_0, während die Parallele durch K_0 zu der x-Axe auch durch P_0 geht. Denn es ist dann

$$O\,A_0 = x_0 = \frac{O\,J_0}{\cos\omega_0} = \frac{a}{\cos\omega_0};\ A_0\,P_0 = y_0 = Q\,K_0 = O\,Q\tan\omega_0 = b\tan\omega_0.$$

Fig. 82.



Die Tangente

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

der Hyperbel in dem Punkte P_0 trifft die x-Axe in dem Punkte T_0, so dass

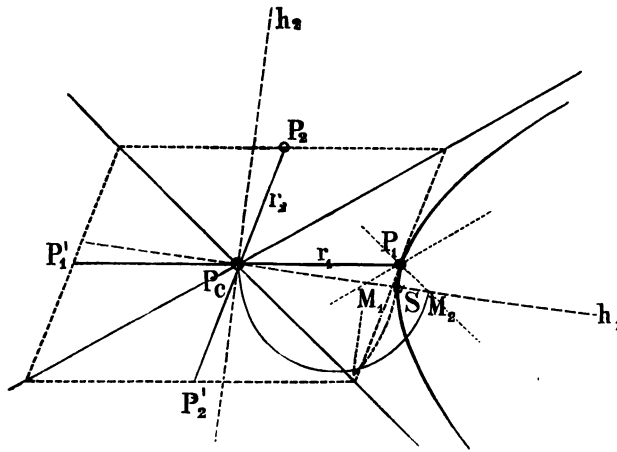
$$O T_0 = \frac{a^2}{x_0} = \frac{a^2}{\left(\frac{a}{\cos \omega_0}\right)} = a \cos \omega_0;$$

mithin ist T_0 der Fußpunkt der zur x-Axe Senkrechten aus J_0.

V. Von zwei conjugierten Radien der Hyperbel ist bekanntlich einer imaginär, doch pflegt man denselben durch den gleichgerichteten Radius der conjugierten Hyperbel zu ersetzen und kann kurzweg zwei solche Radien auch conjugierte Radien nennen. Sind dieselben (Fig. 83) durch $P_c P_1 = r_1$; $P_c P_2 = r_2$ der Länge und Richtung nach gegeben, derart dass P_1 ein Punkt der Hyperbel sei, macht man ferner $P'_1 P_c = r_1$; $P'_2 P_c = r_2$, so liegen die Eckpunkte jenes Parallelogrammes, dessen Mittellinien $P'_1 P_1$; $P'_2 P_2$ sind, auf den Asymptoten. (Art. 50, III.)

Halbiert man die Winkel der letzteren, so erhält man die Axen h_1 und h_2. Zieht man endlich durch P_1 die Parallelen zu den Asymptoten

Fig. 83.



bis M_1 und M_2 auf h_1, so ist $OS^2 = OM_1 . OM_2 = a^2$ und man erhält durch Construction der mittleren geometrischen Proportionalen den Scheitelpunkt und die reale Halbaxe a.

55. Die Parabel. Die auf den Hauptdurchmesser und die Scheiteltangente bezogene Parabel hat die Gleichung

$$y^2 = 2px.$$

Wird der Parameter p als positiv vorausgesetzt, so kann x alle Werte von 0 bis $+\infty$ annehmen und die Gleichung lässt erkennen, dass die Parabel vollständig auf der positiven Seite der y-Axe und selbstverständlich symmetrisch zu der x-Axe liegt. Es ist aber darin auch direct eine Construction der Parabel ausgesprochen: Verbindet man nämlich (Fig. 84) die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots$ der Scheiteltangente (y-Axe) mit dem im Abstande $-2p$ vom Nullpunkte (Scheitel) auf der x-Axe liegenden Punkte Q $(-2p, 0)$ und macht $B_1A_1 \perp QB_1$; $B_2A_2 \perp QB_2$; $B_3A_3 \perp QB_3$; . . ., so sind A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3; . . . die Projectionen der Parabelpunkte P_1, P_2, P_3 . . . auf die Coordinatenaxen. Symmetrisch zu diesen sind die Parabelpunkte P'_1, P'_2, P'_3 . . . u. s. w.

I. Die Tangente im Punkte P_0 hat (Art. 36) die Gleichung

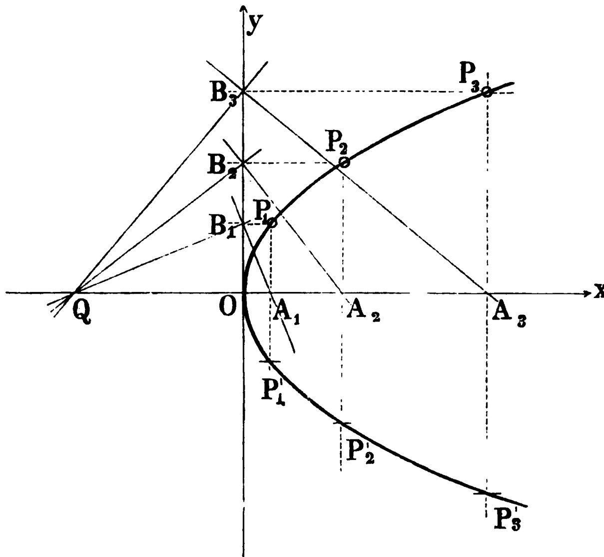
$$px - y_0y + px_0 = 0,$$

also ist $p : -y_0$ das Richtungsverhältnis der Normale in demselben Punkte und

$$\frac{x - x_0}{p} + \frac{y - y_0}{y_0} = 0$$

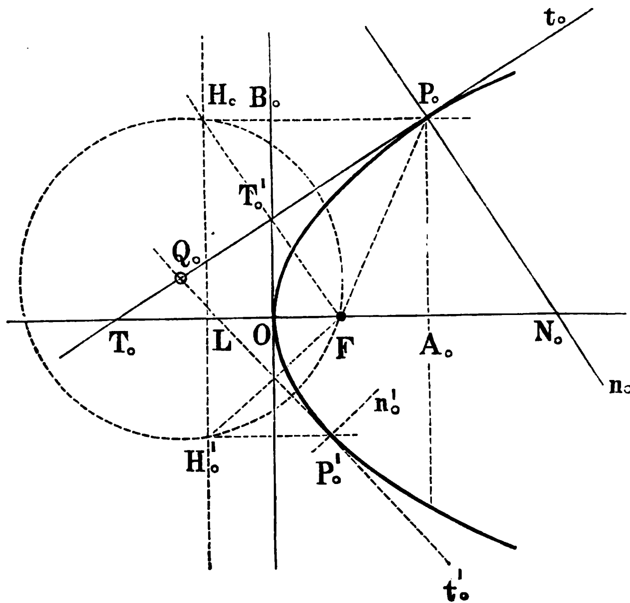
deren Gleichung.

Fig. 84.



Von der Tangente in P_0 werden (Fig. 85) der Hauptdurchmesser (x-Axe) und die Scheiteltangente (y-Axe) in den Punkten T_0 und T'_0 getroffen, so dass

Fig. 85.



$$O\,T_0 = -x_0;$$

$$O\,T'_0 = \frac{p\,x_0}{y_0} = \frac{2\,p\,x_0}{2\,y_0} = \frac{y_0^2}{2\,y_0} = \frac{y_0}{2},$$

also wird die Strecke $T_0\,A_0$ von O und die Strecke $O\,B_0$ von T'_0 halbiert, womit zwei einfache Tangentenconstructionen ausgesprochen sind. Von der Normale wird der Hauptdurchmesser (x-Axe) in dem Punkte N_0 geschnitten, so dass

$$O\,N_0 = x_0 + p,$$

also

$$A_0\,N_0 = p,$$

d. h. die Projection des Normalenstückes $P_0\,N_0$ auf die Axe der Parabel (Subnormale) hat die constante Länge p. Damit ist eine einfache Normalenconstruction der Parabel ausgedrückt, wenn der Parameter p bekannt und umgekehrt die Construction des letzteren, wenn von der Parabel außer der Axe und Scheiteltangente noch ein Punkt oder eine Tangente gegeben ist.

Die Parallele durch T'_0 zu der Normalen schneide die x-Axe in dem Punkte F; aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $T_0\,F\,T'_0$ und $T_0\,N_0\,P_0$ folgt

$$\frac{T_0\,O + O\,F}{O\,T'_0} = \frac{T_0\,A_0 + A_0\,N_0}{A_0\,P_0}$$

oder

$$\frac{x_0 + O\,F}{\frac{y_0}{2}} = \frac{2\,x_0 + p}{y_0};$$

$$\frac{2\,x_0 + 2\,O\,F}{y_0} = \frac{2\,x_0 + p}{y_0},$$

demnach

$$O\,F = \frac{p}{2},$$

d. h. der Punkt F ist der Brennpunkt der Parabel und der Fußpunkt der Senkrechten aus demselben auf eine beliebige Tangente ist ein Punkt der Scheiteltangente. Macht man auf dieser Senkrechten $F\,H_0 = 2\,F\,T'_0$, so hat der Punkt P_0 die Coordinaten $O\,L = -\frac{p}{2}$ und $L\,H_0 = A_0\,P_0 = y_0$, liegt demnach auf der Leitlinie dort, wo sie von der auf sie aus P_0 gefällten Senkrechten getroffen wird. Daraus folgt, dass bei der Parabel Tangente und Normale die von dem Leitstrahle $F\,P_0$ und dem Durchmesser $H_0\,P_0$ gebildeten Winkel halbieren. Den Durchmesser kann man auch als den zu einem unendlich fernen

Brennpunkte gehörigen Leitstrahl ansehen, so dass die Analogie mit Ellipse und Hyperbel hergestellt erscheint.

Für irgend einen Punkt Q_0 auf der Tangente t_0 ist $Q_0 F = Q_0 H_0$. Darin liegt das Mittel, aus diesem Punkte die Tangenten an die Parabel zu ziehen: Man beschreibt um Q_0 mit dem Radius $Q_0 F$ einen Kreis, welcher die Leitlinie in den Punkten H_0, H'_0 schneidet, deren Verbindungslinien mit dem Brennpunkte auf der Scheiteltangente je einen Punkt der gesuchten Tangenten bestimmen. Die Berührungspunkte P_0 und P'_0 liegen auf den durch H_0 und H'_0 gezogenen Durchmessern. Noch einfacher ist die Construction einer Tangente von gegebener Richtung, indem die aus F Senkrechte zu dieser gleich einen Punkt der gesuchten Tangente auf der Scheiteltangente ausschneidet.

II. Wenn P_1 und P_2 Punkte der Parabel

$$y^2 = 2px$$

sind, hat man

$$y_1^2 = 2px_1; \quad y_2^2 = 2px_2,$$

also

$$y_2^2 - y_1^2 = (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 2p(x_2 - x_1)$$

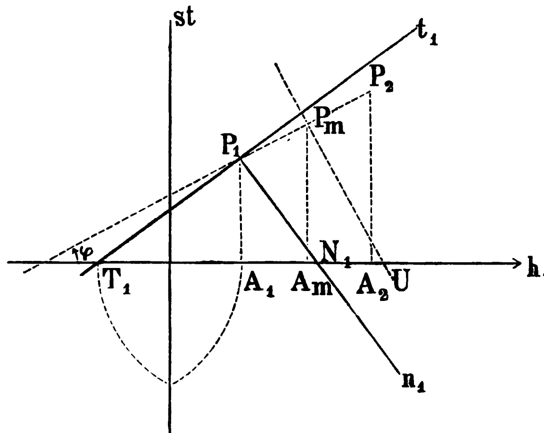
oder

$$\frac{y_2 + y_1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = p$$

und wenn man den Halbierungspunkt der Sehne $P_1 P_2$ mit P_m, den Winkel der Geraden $P_1 P_2$ mit der x-Axe mit φ bezeichnet (Fig. 86):

$$y_m \cdot \tan\varphi = A_m U = p,$$

Fig. 86.

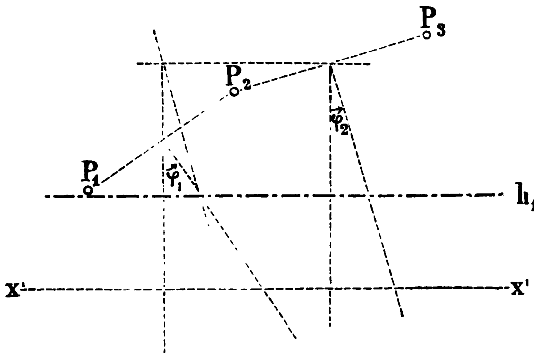


d. h. die Strecke zwischen der Projection des Halbierungspunktes einer Sehne auf die Parabelaxe und dem Schnittpunkte der letzteren mit der Mittelsenkrechten der Sehne ist gleich dem Parameter. Davon kann man Gebrauch machen, um die Parabel zu construieren, wenn deren Axe und zwei Punkte

gegeben sind, indem man sich die Parameterlänge verschafft, mit ihrer Hilfe die Tangente in einem der Punkte — etwa P_1 — ermittelt. die Strecke $T_1 A_1$ halbiert, wodurch man den Scheitelpunkt erhält u. s. w.

Sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 und die Richtung x' der Parabelaxe bekannt, so zieht man (Fig. 87) durch die Halbierungspunkte der Sehnen $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ die Senkrechten zu der Axenrichtung und die Mittelsenkrechten der Sehnen; dadurch ergeben sich die Winkel φ_1, φ_2 und es ist jene Gerade von der gegebenen Richtung die Axe, auf welcher durch die Schenkel dieser Winkel gleiche Strecken ausgeschnitten werden; die in der Figur dargestellte Construction bedarf keiner näheren Erläuterung

Fig. 87.

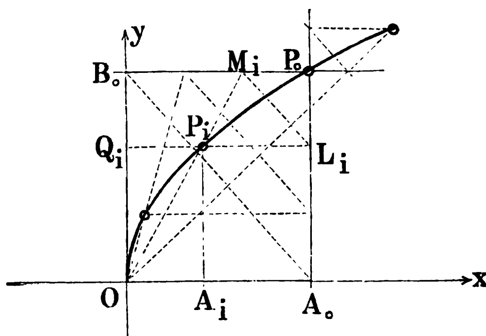


III. Wird auf der Parabel (Fig. 88)

$$y^2 = 2\,p\,x$$

der beliebige Punkt P_0 angenommen, durch einen anderen Punkt P_i aber die Gerade O P_i und die Parallele zu der Parabelaxe gezogen, so schneiden diese die Seiten $B_0 P_0$. $A_0 P_0$ des Rechteckes $O A_0 P_0 B_0$, welches das Parabelstück $O P_i P_0$ umschließt, in den Punkten $M_i \left(x_i \frac{y_0}{y_i}, y_0\right)$ und $L_i (x_0, y_i)$. Demnach hat die Gerade $L_i M_i$ das Richtungsverhältnis

Fig. 88.



$$\left(x_i \frac{y_0}{y_i} - x_0\right) : (y_0 - y_i),$$

oder, weil $y_0^2 = 2\,p\,x_0$; $y_i^2 = 2\,p\,x_i$; $\frac{y_0}{y_i} = \frac{x_0\,y_i}{x_i\,y_0}$, auch

$$\left(x_i \frac{x_0 y_i}{x_i y_0} - x_0\right) : (y_0 - y_i) = x_0 (y_i - y_0) : y_0 (y_0 - y_i) = - x_0 : y_0,$$

d. h. sie ist parallel zu der Diagonale $A_0 B_0$ des Rechteckes. Darin ist eine Construction der Parabel ausgesprochen: Man zieht $L_i M_i \parallel A_0 B_0$; $Q_i L_i \parallel O A_0$; verbindet M_i mit O; dann schneiden sich $Q_i L_i$ und $O M_i$ in dem Punkte P_i der Parabel. Die Construction kann über die Punkte O und P_0 hinaus beiderseits fortgesetzt werden; sie gilt auch dann, wenn an die Stelle des Scheitelpunktes ein beliebiger Punkt der Parabel tritt und das Rechteck $O A_0 P_0 B_0$ in ein Parallelogramm übergeht, dessen eine Seite mit der Tangente in jenem Punkte zusammenfällt.

IV. Durch zwei Punkte und die Tangenten in denselben ist eine Parabel vollkommen bestimmt. In diesem Falle ist nämlich die Verbindungslinie des Schnittpunktes Q der Tangenten (Fig. 89, a) mit dem

Fig. 89, a.

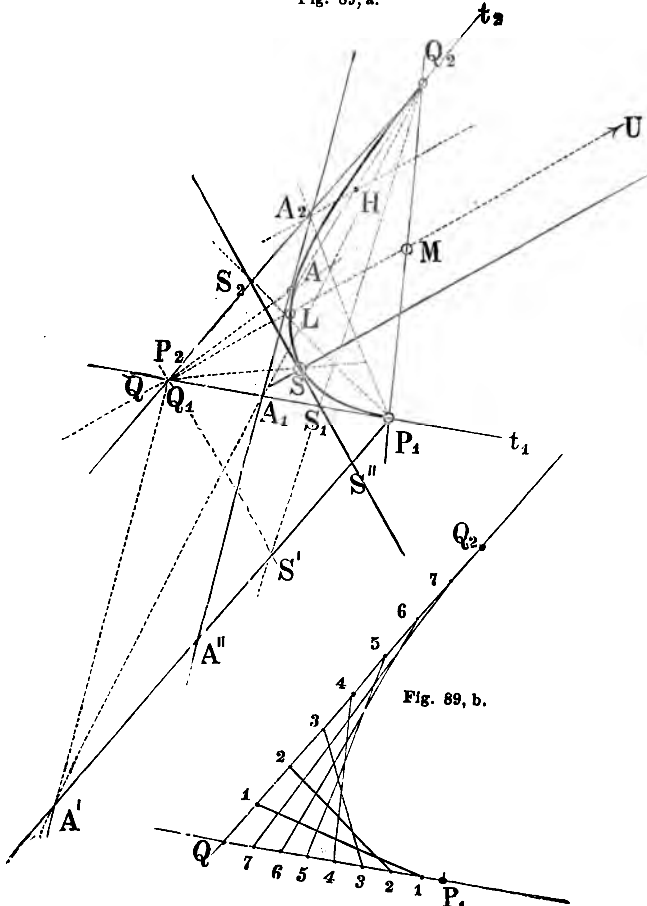


Fig. 89, b.

Halbierungspunkte M der gegebenen Sehne $P_1 Q_2$ ein Durchmesser der Parabel (Art. 49, III), mithin die Richtung aller Durchmesser bekannt u. s. w. (II.) Da Q der Pol von $P_1 Q_2$ ist und der Durchmesser QM die Parabel einmal in dem unendlich fernen Punkte U trifft, muss sein zweiter Treffpunkt L die Strecke QM halbieren, weil die Punktepaare Q, M und L, U harmonisch sind. Auf den Tangenten t_1 und t_2 werden von den übrigen Tangenten der Parabel zwei projectivisch ähnliche Punktreihen ausgeschnitten (II. Th., Art. 34), so dass den im Schnittpunkte Q vereinigten Punkten Q_1 und P_2 die Berührungspunkte P_1 und Q_2 entsprechen. Theilt man daher die Strecken $Q_1 P_1$ und $Q_2 P_2$ in die gleiche Anzahl von Theilen, so sind die Verbindungslinien entsprechender Theilpunkte Tangenten der Parabel (Fig. 89, b).

Zieht man durch P_1 eine Parallele zu $Q_2 Q$ und durch Q eine beliebige Gerade QA′, ferner durch den Schnittpunkt A_1 von $A'Q_2$ mit QP_1 die Parallele $A''A_1$ zu QA′, welche QQ_2 in A_2 schneidet, so ist $QA_1 : A_1P_1 = A'A'' : A''P_1$ und $A'A'' : A''P_1 = A_2Q_2 : QA_2$, also $QA_1 : A_1P_1 = A_2Q_2 : QA_2$; daher sind A_1 und A_2 entsprechende Punkte der ähnlichen Punktreihen und $A_1 A_2$ ist eine Tangente der Parabel. Damit ist die Aufgabe gelöst, Tangenten von gegebener Richtung zu ziehen: Man braucht bloß QA′ mit dieser Richtung zu ziehen u. s. w. Insbesondere wird die Scheiteltangente erhalten, wenn man QS′ senkrecht zum Durchmesser QM macht und die angegebene Construction durchführt. Die Berührungspunkte der erhaltenen Tangenten ergeben sich aus der Eigenschaft des umschriebenen Dreieckes (II. Th., Art. 33), dass die Verbindungslinien seiner Eckpunkte mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt gehen. Da auf t_1 und t_2 die Berührungspunkte bekannt sind, findet man leicht jenen einer dritten Tangente, also speciell auf der Scheiteltangente den Scheitelpunkt und mit ihm die Axe. Wäre in dem gegebenen Punkte A die Tangente zu construieren, so verbindet man ihn mit Q_2, zieht durch den Halbierungspunkt H von AQ_2 den Durchmesser bis zu dessen Schnittpunkt A_2 mit t_2 und erhält in $A_2 A$ die Tangente. Den Schnittpunkt eines beliebigen Durchmessers mit der Parabel construiert man mit Hilfe der Tangente, welche durch dessen Schnittpunkt mit einer der gegebenen Tangenten geht.

II. Abtheilung.

Analytische Geometrie des Raumes.

I. Abschnitt.

Grundbegriffe und vorbereitende Aufgaben.

1. Die Raumelemente und ihre Beziehungen zu einander. Die Raumgebilde setzen sich aus Punkten, Ebenen und Geraden zusammen.

Zwei Punkte bestimmen eine Gerade; drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene.

Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade; drei Ebenen, die nicht durch eine Gerade gehen, bestimmen einen Punkt.

Ein Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade bestimmen eine Ebene. Eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade bestimmen einen Punkt.

Parallele Geraden haben die Richtung gemein. Man kann von einer Richtung sprechen, ohne an eine bestimmte Gerade zu denken. Ist bei jeder von zwei solchen Geraden der positive Sinn ihrer Richtungen oder kurzweg die positive Richtung angegeben, so können dieselben gleichsinnig oder entgegengesetzt parallel sein.

Unter dem Winkel von zwei Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, soll in der Folge der Winkel ihrer positiven Richtungen verstanden sein. Werden durch die Geraden Richtungen repräsentiert, so kann man auch von dem Winkel zweier Richtungen sprechen.

Unter dem Winkel von zwei Geraden, die sich nicht schneiden, ist der Winkel ihrer Richtungen gemeint; er wird also durch zwei gleichsinnig Parallele dieser Geraden bestimmt, welche sich in einem beliebigen Punkte schneiden.

Es gibt unendlich viele Richtungen, welche mit einer gegebenen Richtung denselben, von 0 oder π verschiedenen Winkel bilden.

Parallele Ebenen haben die Stellung gemein. Man kann von einer Stellung sprechen, ohne an eine bestimmte Ebene zu denken.

Der Winkel einer Geraden mit einer Ebene ist jenem gleich, welchen die Gerade mit ihrer orthogonalen Projection auf die Ebene bestimmt. Wird durch die Gerade eine Richtung, durch die Ebene eine Stellung repräsentiert, so kann man von dem Winkel sprechen, welchen eine Richtung mit einer Stellung bildet.

Es gibt unendlich viele Richtungen, welche mit einer Stellung denselben, von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel bilden, aber nur eine, die zu ihr senkrecht ist, nämlich ihre Normalenrichtung. Daher ist durch eine Richtung eine Stellung bestimmt. Wenn eine Richtung einer Stellung angehört, ist sie zu deren Normalenrichtung senkrecht.

Zwei Richtungen bestimmen eine Stellung, in welcher sie enthalten sind, also auch die Normalenrichtung derselben. Eine dritte Richtung gehört im allgemeinen dieser Stellung nicht an.

Zwei Stellungen bestimmen eine Richtung, die jeder von ihnen angehört, aber im allgemeinen in einer dritten Stellung nicht enthalten ist.

Eine Ebene hat zwei Seiten, von welchen man die eine als die positive, die andere als die negative bezeichnen kann. Die positive Seite einer Ebene wird durch die von einem Punkte der letzteren ausgehende positive Normalenrichtung kenntlich gemacht; ihre Feststellung ist für die Beurtheilung des positiven Drehungssinnes in der Ebene von Bedeutung, denn dieselbe Drehung erscheint Beobachtern auf verschiedenen Seiten der Ebene in entgegengesetztem Sinne. Daher soll in der Folge der positive Drehungssinn immer auf einen Beobachter bezogen sein, der auf der positiven Seite der Ebene gedacht wird.

Die Schnittlinie von zwei Ebenen ist zu deren Normalenrichtungen senkrecht, denn ihre Richtung ist in den Stellungen beider Ebenen enthalten. Diese werden von einer dritten, zu der Schnittlinie senkrechten Ebene nach zwei Geraden geschnitten, deren Winkel gleich ist jenem der Ebenen und jenem ihrer Normalen. Werden durch die Ebenen zwei Stellungen repräsentiert, so kann man auch von dem Winkel der letzteren sprechen.

Die positive Richtung einer Geraden, die positive Seite einer Ebene und der positive Drehungssinn in einer Ebene können gegeben sein oder willkürlich angenommen werden.

2. Orthogonale Projectionen von Strecken und Streckenzügen auf Geraden. Eine Ebene, welche durch einen Punkt geht und zu einer Geraden senkrecht ist, projiciert den Punkt orthogonal auf die Gerade und auf alle Parallelen derselben. Mehrere Punkte werden auf dieselbe Gerade durch parallele Ebenen projiciert. Die Projection einer Strecke auf eine Projectionsaxe ist das zwischen den parallelen, projicierenden Ebenen der Endpunkte enthaltene Stück der Projectionsaxe. Demnach sind die Projectionen der Strecke auf gleichsinnig oder

entgegengesetzt Parallele gleich oder entgegengesetzt gleich. Davon kann man Gebrauch machen, um die Länge der Projection $A_1 A_2$ einer Strecke $P_1 P_2$ der Geraden g auf die Projectionsaxe x zu berechnen. Wird nämlich die projicierende Ebene des Punktes P_2 von der durch P_1 zu x gleichsinnig Parallelen x' in dem Punkte Q getroffen, so ist $A_1 A_2 = P_1 Q$ und weil das Dreieck $P_1 Q P_2$ bei Q einen rechten Winkel enthält, findet man

$$A_1 A_2 = P_1 P_2 \cos x g,$$

so dass hiedurch Länge und Vorzeichen der Projection bestimmt sind.

Eine Aufeinanderfolge von Strecken $P_0 P_1$, $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, ... $P_{n-1} P_n$, welche aneinander anschließen, aber nicht alle in derselben Geraden und im allgemeinen nicht in derselben Ebene liegen, soll ein Streckenzug genannt werden. Unter der Projection eines Streckenzuges auf eine Gerade versteht man die algebraische Summe der Projectionen der Strecken, welche ihn zusammensetzen. Da $A_0 A_1 + A_1 A_2 + \ldots + A_{n-1} A_n = A_0 A_n$ und $A_0 A_n$ die Projection der Schlusslinie $P_0 P_n$ des Streckenzuges ist, ergeben sich folgende Sätze:

Die Projection eines Streckenzuges auf eine Gerade ist gleich der Projection seiner Schlusslinie auf dieselbe Gerade.

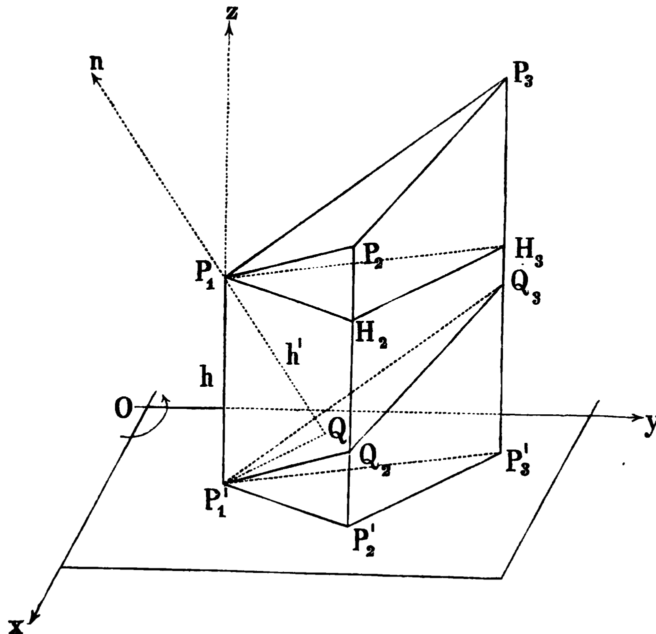
Streckenzüge mit derselben Schlusslinie haben gleiche Projectionen auf eine beliebige Projectionsaxe.

3. Orthogonale Projectionen von Strecken und ebenen Flächen auf Ebenen. Der Fußpunkt der Senkrechten aus einem Punkte auf eine Ebene ist die orthogonale Projection des Punktes auf diese Ebene. Mehrere Punkte werden auf eine und folglich auch auf alle dazu parallelen Ebenen durch parallele Geraden projiciert. Die Projection $P'_1 P'_2$ einer Strecke $P_1 P_2$ der Geraden g auf eine Ebene ist jenes Stück der Projection g' dieser Geraden auf die Ebene, welches zwischen den Fußpunkten der die Strecke projicierenden Lothe enthalten ist. Da Projection und Strecke in der Ebene g' g liegen, findet man

$$P'_1 P'_2 = P_1 P_2 \cos g' g.$$

Die Fußpunkte der Senkrechten auf eine Ebene aus den Eckpunkten eines Dreieckes bestimmen die Projection desselben auf die Ebene. Das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ (Fig. 90) und seine Projection $P'_1 P'_2 P'_3$ auf die Ebene x O y bilden die Endflächen von einem Prisma, welches durch die Ebene des Dreieckes schief, durch die Projectionsebene senkrecht geschnitten wird. Ist $P'_1 P_1 = h$ seine kleinste Kante und man legt durch P_1 die Ebene $P_1 H_2 H_3$ parallel zu der Projections-

Fig. 90.



ebene; durch P'_1 die Ebene $P'_1\,Q_2\,Q_3$ parallel zu der Dreiecksebene. so sind die Körper $P_1\,H_2\,H_3\,P_3\,P_2$ und $P'_1\,P'_2\,P'_3\,Q_3\,Q_2$ congruent, mithin die parallel begrenzten Prismen $P'_1\,P'_2\,P'_3\,P_1\,H_2\,H_3$ und $P'_1\,Q_2\,Q_3\,P_1\,P_2\,P_3$ an Körperinhalt gleich; bezeichnet man mit h und h' deren Höhen. mit f und f' die Flächen des Dreieckes und seiner Projection, so ist

$$f'\,h = f\,h'.$$

Sind ferner n und z die positiven Normalenrichtungen der Dreiecks- und der Projectionsebene, so erkennt man leicht, dass

$$Q\,P_1 = h' = P'_1\,P_1 \cos n\,z = h \cos z\,n,$$

also

$$h' = h \cos z\,n,$$

somit

$$f' = f \cos z\,n,$$

d. h. die Fläche der Projection eines Dreieckes ist gleich der Fläche des letzteren, multipliciert mit dem Cosinus des Winkels, welchen die Normalen der Ebenen beider, demnach auch diese Ebenen selbst bilden. Wird die Fläche der Projection aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte

in Bezug auf ein Coordinatensystem x y der Projectionsebene berechnet, so liefert die Formel

$$2\,f = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

einen positiven oder negativen Wert, je nachdem die Eckpunkte P'_1, P'_2, P'_3 im positiven (durch das Coordinatensystem gegebenen) Drehungssinn in der Projectionsebene aufeinander folgen oder nicht. Gilt letzterer (in der Figur »linksum«) auch für die Ebene des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$, so erscheinen einem Beobachter, welcher auf der positiven Seite beider Ebenen gedacht wird, die Punkte des Dreieckes und jene seiner Projection in gleichem Drehungssinne geordnet, wenn die positiven Richtungen der Normalen der Ebenen einen spitzen Winkel bilden, in entgegengesetztem aber, wenn dieser Winkel ein stumpfer ist. Im ersten Falle ist cos n z positiv, daher sind f und f' gleich bezeichnet und es muss die Fläche des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ als positiv oder negativ vorausgesetzt werden, je nachdem die seiner Projection positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem seine Eckpunkte dem positiven oder negativen Drehungssinn entsprechend aufeinander folgen. Im zweiten Falle ist cos n z negativ, f und f' sind ungleich bezeichnet; die Fläche des Dreieckes ist nun positiv oder negativ, je nachdem die seiner Projection negativ oder positiv, also wieder je nachdem seine Eckpunkte die Aufeinanderfolge im positiven oder im negativen Drehungssinn zeigen. Demnach ist die Fläche eines Dreieckes als positiv anzusehen, wenn dessen Eckpunkte die dem positiven Drehungssinne seiner Ebene entsprechende Anordnung haben, sonst aber als negativ; dann werden durch die Formel

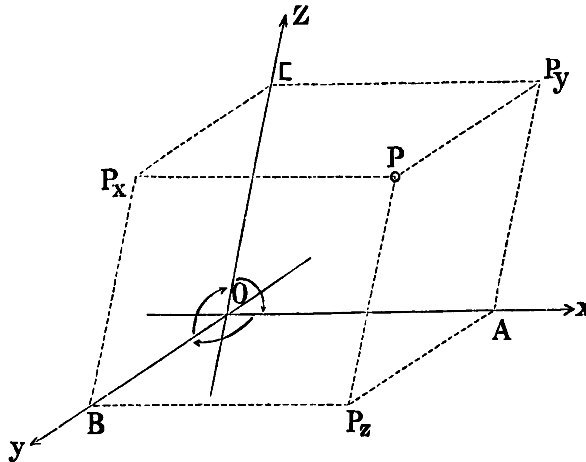
$$f' = f \cos n z$$

Größe und Vorzeichen der Projection ausgedrückt. Die Formel gilt für jedes ebene Polygon, denn die vorstehenden Betrachtungen sind nicht auf den speciellen Eigenschaften des Dreieckes gegründet, sondern sie bleiben aufrecht, wenn darin statt »Dreieck« überall »Polygon« gesetzt wird.

4. Coordinatensysteme. Die Lage eines Punktes im Raume wird durch seine Coordinaten bestimmt. Die wichtigsten Coordinatensysteme sind:

a) System der Parallelcoordinaten. Es besteht (Fig. 91) aus drei Geraden x, y, z, Coordinatenaxen genannt, welche sich in dem Nullpunkte O (Ursprung, Anfangspunkt) schneiden und die drei Co-

Fig. 91.



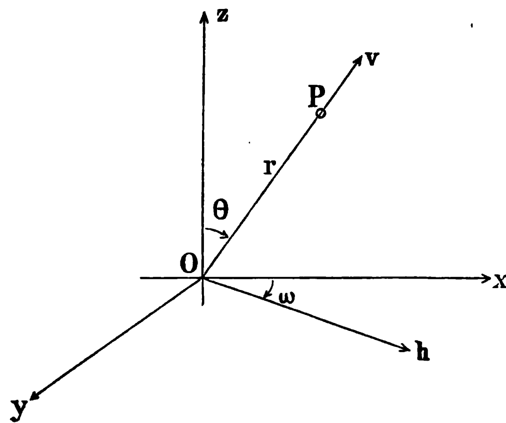
ordinatenebenen xy, yz, zx bestimmen. Die positiven Richtungen der Coordinatenaxen können willkürlich angenommen oder gegeben sein. Positiv ist jener Drehungssinn, demzufolge die hohlen Winkel xy, yz, zx positiv erscheinen. Das System ist ein rechtwinkeliges oder orthogonales, wenn diese drei Winkel rechte sind, in allen anderen Fällen ein schiefwinkeliges. Ein beliebiger Punkt P des Raumes wird durch Ebenen, die parallel sind den Coordinatenebenen, nach den Punkten A auf x, B auf y und C auf z projiciert. Die Abscissen $OA = x$; $OB = y$; $OC = z$ der Punkte A, B, C heißen die Coordinaten des Punktes P, welchen sie vollkommen bestimmen; denn durch die Coordinaten werden zunächst die Projectionen A, B, C bestimmt und die durch letztere gehenden, zu den Coordinatenebenen parallelen Ebenen schneiden sich in P. Da in dem Parallelepiped $OAP_zBP_xCP_yP$ je vier parallele Kanten gleich sind, kann P in übersichtlicher Weise durch einen der Streckenzüge OAP_zP, OBP_xP u. s. w. dargestellt werden. Den acht Winkelräumen, in welche der Raum durch die Coordinatenebenen getheilt ist, entsprechen verschiedene Vorzeichencombinationen der Coordinatenwerte:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	+	−	−	+	+	−	−
y	+	−	−	+	+	−	−	+
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Für die Punkte der x y-Ebene ist $z = 0$, der y z-Ebene $x = 0$, der z x-Ebene $y = 0$. Für jene der x-Axe ist $y = 0$; $z = 0$; der y-Axe $z = 0$, $x = 0$; der z-Axe $x = 0$, $y = 0$. Für den Nullpunkt ist $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

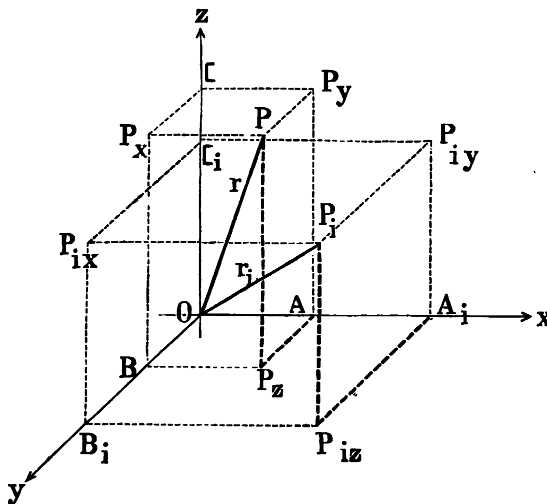
b) System der Polarcoordinaten. Es besteht (Fig. 92) aus einer Ebene x y, einer darin liegenden Axe x mit dem Pole O, ferner der zur Ebene senkrechten Axe z. Ein beliebiger Punkt P des Raumes wird mit dem Pole O durch die Gerade v, mit der Axe z durch die Ebene h o z verbunden. Die Winkel $xh = \omega$; $zv = \Theta$ und der Vector $OP = r$ heißen die Polar-Coordinaten des Punktes P und bestimmen denselben vollständig, sobald über die Zählung derselben die nöthigen Feststellungen gemacht worden sind.

Fig. 92.



5. Rechtwinkelige Coordinaten. Bezeichnung und Bestimmung der Punkte. Abstand eines Punktes vom Nullpunkte. In der Folge soll ausschließlich das rechtwinkelige Coordinatensystem Anwendung finden. Feste gegebene Punkte werden mit $P_0, P_1, P_2, \dots P_i$ bezeichnet; ein veränderlicher oder erst zu bestimmender mit P. Der Punkt $P(P_i)$ hat die Coordinaten x, y, z (x_i, y_i, z_i). Seine orthogonalen Projectionen auf die Axen sind A, B, C (A_i, B_i, C_i); auf die Coordinatenebenen P_z, P_x, P_y (P_{iz}, P_{ix}, P_{iy}). Er wird (Fig. 93) durch den

Fig. 93.



Streckenzug OAP_zP ($OAP_{iz}P_i$) festgelegt. Punkte von besonderer Bedeutung werden auch mit anderen Buchstaben bezeichnet werden. Der Abstand $OP = r$ des Punktes P vom Nullpunkte ergibt sich aus den rechtwinkeligen Dreiecken OP_zP und OAP_z; es ist nämlich

$$r^2 = \overline{OP_z}^2 + \overline{P_zP}^2 = OP_z^2 + z^2;\ \overline{OP_z}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP_z}^2 = x^2 + y^2,$$

demnach

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

und

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ebenso findet man für $OP_i = r_i$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Der Punkt P_0 (1, 4, 8) hat vom Nullpunkte den Abstand

$$r_0 = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9.$$

b) Die Punkte P_1 (2, 3, 5); P_2 (3, — 1, 4); P_3 (5, 1, — 2); P_4 (— 3, — 2, — 4) haben vom Nullpunkte die Abstände

$$r_1 = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38};\ r_2 = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26};$$
$$r_3 = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30};\ r_4 = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}.$$

c) Welchen Abstand hat der Punkt P_5 (2, 6, 9) vom Nullpunkte?

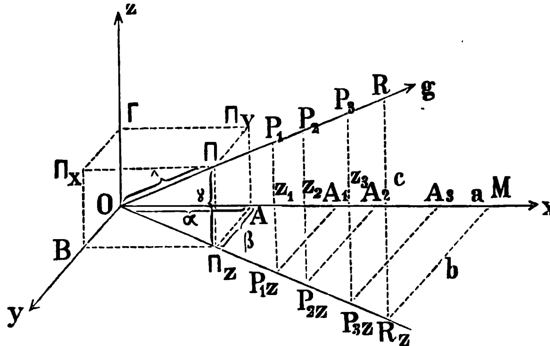
d) Der Punkt P soll derart bestimmt werden, dass er vom Nullpunkte den Abstand $r = 13$ habe. Wie viele Lösungen sind möglich? Man suche jene heraus, bei welcher $x = 3$, $y = 4$; wie groß ist dann z? Ferner suche man aus den möglichen Lösungen jenen Punkt heraus, der in der xy-Ebene liegt und $x = 5$ hat.

6. Bestimmung einer Richtung oder einer Stellung. Parallele Geraden haben dieselbe Richtung. Eine von ihnen bestimmt die Richtung der übrigen. Es ist zweckmäßig, jene Gerade, welche die Richtung repräsentieren soll, in den Nullpunkt zu verlegen und den positiven Sinn durch eine ihr angesetzte Pfeilspitze anzudeuten. Eine solche Gerade g (Fig. 94) soll kurzweg als Richtung bezeichnet werden. Sie ist durch einen in ihr liegenden Punkt P_1 bestimmt, ebenso durch Punkte $P_2, P_3, \ldots$, wenn die Strecken $OP_1, OP_2, OP_3, \ldots$ mit Rücksicht auf die Pfeilspitze positiv erscheinen. Da

$$x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2 = x_3 : y_3 : z_3 = \ldots,$$

so ist eine Richtung auch durch das constante Verhältnis der Coordinaten der sie bestimmenden Punkte festgelegt, welches durch $a : b : c$

Fig. 94.



dargestellt und Richtungsverhältnis genannt werden möge. Die Verhältniszahlen a, b, c kann man als Componenten der Richtung bezeichnen. Die Richtung wird construiert, indem man einen Punkt R, dessen Coordinaten den Richtungscomponenten a, b, c proportional oder gleich sind, mit dem Nullpunkte verbindet. Das Richtungsverhältnis $-a:-b:-c$ stellt die der Richtung $a:b:c$ direct entgegengesetzte Richtung vor. Der Punkt Π, welcher die Richtung bestimmt und den Abstand $O\Pi = 1$ vom Nullpunkte hat, heißt der Einheitspunkt. Sind α, β, γ seine Coordinaten, so besteht zwischen diesen (Art. 5, Gl. 1) die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Sie werden die Coordinaten der Richtung (Richtungscoordinaten) genannt und haben auch eine trigonometrische Bedeutung. Aus den rechtwinkeligen Dreiecken $OA\Pi$, $OB\Pi$, $O\Gamma\Pi$ folgt nämlich

$$\alpha = OA = \frac{OA}{1} = \frac{OA}{O\Pi} = \cos xg;$$

$$\beta = OB = \frac{OB}{1} = \frac{OB}{O\Pi} = \cos yg;$$

$$\gamma = O\Gamma = \frac{O\Gamma}{1} = \frac{O\Gamma}{O\Pi} = \cos zg,$$

also sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung mit den Coordinatenaxen bildet. In dieser Eigenschaft führen sie auch den Namen »Richtungscosinus«.

Da eine Richtung durch das Richtungsverhältnis $a:b:c$ vollkommen bestimmt ist, müssen ihre Richtungscoordinaten α, β, γ durch a, b, c ausgedrückt werden können. In der That findet man, wenn

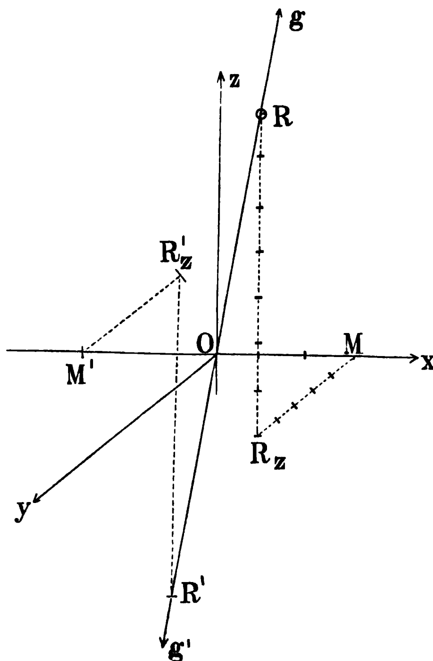
der Richtungspunkt R die Coordinaten a, b, c, also den Abstand $\rho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ vom Nullpunkte hat, da $\cos xg = \frac{OM}{OR}$ u. s. w.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos xg = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \beta &= \cos yg = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \gamma &= \cos zg = \frac{c}{\rho} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (3$$

Von gegebenen Richtungen $g_1, g_2, g_3, \ldots g', \ldots$ sollen in der Folge die Richtungspunkte mit $R_1, R_2, R_3, \ldots R', \ldots$ die Einheitspunkte mit $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots \Pi', \ldots$ bezeichnet, ihre Richtungsverhältnisse durch $a_1 : b_1 : c_1$; $a_2 : b_2 : c_2$; $\ldots a' : b' : c'$; $\ldots$, ihre Richtungscoordinaten durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\ldots \alpha', \beta', \gamma'$; $\ldots$ dargestellt werden; ferner sei ρ immer positiv vorausgesetzt.

Da durch eine Richtung auch eine Stellung bestimmt erscheint, kann man durch eine Gerade im Nullpunkte die Normalenrichtung einer Ebene oder mehrerer paralleler Ebenen repräsentiert denken, deren Stellung dadurch gegeben ist. In diesem Sinne kann man von einem Stellungsverhältnis und von Stellungscoordinaten sprechen. Von jeder Ebene einer derart gegebenen Stellung ist dann auch die positive Seite festgelegt.

Fig. 95.



Beispiele und Aufgaben.

a) Bei der Richtung g (3 : 5 : 7) ist (Fig. 95)

$$\rho = \sqrt{9 + 25 + 49} = \sqrt{83},$$

also

$$\alpha = \frac{3}{\sqrt{83}}; \quad \beta = \frac{5}{\sqrt{83}}; \quad \gamma = \frac{7}{\sqrt{83}}.$$

Die direct entgegengesetzte Richtung ist

$$g'(-3 : -5 : -7)$$

mit

$$\rho = \sqrt{83}$$

und

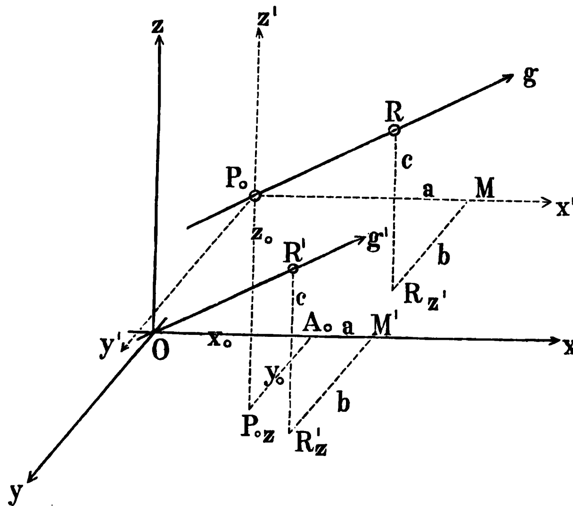
$$\alpha' = \frac{-3}{\sqrt{83}}; \quad \beta' = \frac{-5}{\sqrt{83}}; \quad \gamma' = \frac{-7}{\sqrt{83}}.$$

b) Die positive Richtung der x-Axe hat das Richtungsverhältnis a : 0 : 0 und die Richtungscoordinaten 1, 0, 0; jene der y-Axe 0 : b : 0 und 0, 1, 0; jene der z-Axe 0 : 0 : c und 0, 0, 1, wenn a, b, c positive Größen sind. Eine Richtung der x y-Ebene hat das Richtungsverhältnis a : b : 0, der y z-Ebene 0 : b : c; der z x-Ebene a : 0 : c.

c) Man gebe die Coordinaten der Richtungen g_1 (1 : 2 : 2); g_2 (— 6 : 3 : 2); g_3 (— 9 : — 6 : — 2); g_4 (12 : — 3 : — 4); g_5 (0 : 5 : 12) und jene der ihnen entgegengesetzten Richtungen an.

7. Richtung einer beliebigen Geraden. Wenn eine Gerade g (Fig. 96) nicht durch den Nullpunkt geht, so werden ihr Richtungs-

Fig. 96.



verhältnis a : b : c und ihre Richtungscoordinaten (Richtungscosinus) α, β, γ an einer durch den Nullpunkt gelegten, zu ihr Parallelen g' bestimmt. Man kann auch durch einen beliebigen Punkt P_0 der Geraden Parallele x', y', z' zu den Coordinatenaxen ziehen u. s. w., denn es ist $x'g = xg = xg'$; $y'g = yg = yg'$; $z'g = zg = zg'$. Soll eine Gerade durch den Punkt P_0 mit der Richtung a : b : c bestimmt werden, so kann dieses auf zwei Arten geschehen. Entweder construiert man in O die Richtung a : b : c und legt durch P_0 die Parallele dazu, oder man trägt von P_0 die Strecke a parallel zu x bis M, von M die Strecke b parallel zu y bis R'_z, von R'_z die Strecke c parallel zu z bis R auf u. s. w.

In allen Fällen ist aber

$$\alpha = \cos xg; \quad \beta = \cos yg; \quad \gamma = \cos zg.$$

Aufgabe.

Durch die Punkte P_1 (3, 1, 5); P_2 (3, 5, 0); P_3 (0, 0, 4); P_4 (— 2, — 1, — 5) sollen die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mit den Richtungen 2 : 3 : 6; 3 : 0 : 5; 4 : — 2 : 7; 0 : 0 : 2 gelegt und deren Richtungscoordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$; $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ (Richtungscosinus) berechnet werden.

8. Orthogonale Projectionen ebener Flächen auf die Coordinatenebenen. Berechnung ebener Flächen. Stellung derselben. Die Projectionen einer beliebigen ebenen Fläche f auf die Coordinatenebenen yz, zx, xy mögen mit f_x, f_y, f_z bezeichnet werden und die Ebene der Fläche habe die Stellungscoordinaten α, β, γ. Da die Coordinatenaxen x, y, z die Stellungen und positiven Seiten der Coordinatenebenen angeben, findet man (Art. 3)

$$f_x = f\alpha;\ f_y = f\beta;\ f_z = f\gamma, \quad \ldots\ldots \quad (4$$

demnach, wenn man quadriert und addiert, mit Rücksicht auf $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ (Art. 6, Gl. 2)

$$f_x{}^2 + f_y{}^2 + f_z{}^2 = f^2, \quad \ldots\ldots \quad (5$$

d. h. das Quadrat einer ebenen Fläche ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drei zu einander senkrechte Ebenen. Damit ist die Aufgabe gelöst, eine ebene Fläche zu berechnen, wenn ihre Projectionen auf die Coordinatenebenen (eines orthogonalen Systems) bekannt sind. Aus den Gleichungen 4 ergeben sich ferner die Stellungscoordinaten

$$\alpha = \frac{f_x}{f};\ \beta = \frac{f_y}{f};\ \gamma = \frac{f_z}{f} \quad \ldots\ldots \quad (6$$

der Ebene der Fläche. Multipliciert man beide Seiten der Gleichungen 4 mit α, β, γ und addiert, so erhält man die bemerkenswerte Beziehung

$$\alpha f_x + \beta f_y + \gamma f_z = f,$$

welche ausspricht, dass die Summe der Projectionen der drei Projectionen einer ebenen Fläche f auf die Ebene der letzteren wieder der Fläche selbst gleich ist.

Beispiele und Aufgaben.

a) Für die Projectionen des Dreieckes $O P_1 P_2$ ergibt sich:

$$2 f_x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};\quad 2 f_y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix};\quad 2 f_z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

mithin ist

$$4f^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2;$$

die Stellungscoordinaten der Dreiecksebene sind

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{2f}; \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_1 \end{vmatrix}}{2f}; \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{2f}$$

und das Stellungsverhältnis ist:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

b) Für die Projectionen des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ findet man:

$$2f_x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2f_y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2f_z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

mithin ist

$$4f^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

und die Stellungscoordinaten der Dreiecksebene sind

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{2f}; \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{2f}; \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{2f};$$

hingegen findet man als Stellungsverhältnis

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

c) Wenn ein Dreieck durch die Punkte O; $P_1 (5, 2, 3)$; $P_2 (3, 7, 5)$ gegeben ist, hat man:

$$2f_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -11; \quad 2f_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -16; \quad 2f_z = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 29.$$

$$4f^2 = 121 + 256 + 841 = 1218,$$

$$2f = \sqrt{1218},$$

$$\alpha = -\frac{11}{\sqrt{1218}}; \quad \beta = -\frac{16}{\sqrt{1218}}; \quad \gamma = \frac{29}{\sqrt{1218}},$$

$$\alpha : \beta : \gamma = -11 : -16 : 29.$$

d) Bei dem durch die Punkte P_1 (2, 3, 4); P_2 (7, 1, 2); P_3 (3, 5, 5) gegebenen Dreiecke findet man

$$2\,f_x = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ 2\,f_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7;\ 2\,f_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 12,$$

$$4\,f^2 = 4 + 49 + 144 = 197,$$

$$2\,f = \sqrt{197};$$

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{197}};\ \beta = \frac{-7}{\sqrt{197}};\ \gamma = \frac{12}{\sqrt{197}};$$

$$\alpha : \beta : \gamma = 2 : -7 : 12.$$

e) Man gebe Projectionen, Flächen und Stellungen der Dreiecke an, welche durch die Punkte: O; P_1 (2, — 3, 5); P_2 (— 3, 4, — 2), oder P_3 (1, 1, 1); P_4 (2, — 1, 3); P_5 (— 5, — 3, — 7) bestimmt werden.

f) Wie groß sind Projectionen und Fläche des Dreieckes, dessen Eckpunkte auf den Axen x, y, z in den Abständen 6, 3, 2 vom Nullpunkte liegen. Man gebe die Stellung der Dreiecksebene an.

9. Länge der Strecke und Richtung der Verbindungslinie von zwei Punkten. Zwei Punkte P_1 und P_2 (Fig. 97) bestimmen die unbegrenzte Gerade g — ihre Verbindungslinie — und in dieser die Strecke $P_1 P_2$. Wenn die Wahl der positiven Richtung von g freisteht, soll diese so angenommen werden, dass $P_1 P_2$ positiv erscheint. Die Länge $P_1 P_2 = r$ und die Richtungscoordinaten α, β, γ von g berechnet man mit Hilfe der orthogonalen Projectionen der Strecke auf die Axen. Da nämlich

$$A_1 A_2 = O A_2 - O A_1 = x_2 - x_1 = P_1 P_2 \cos xg = r\alpha,$$
$$B_1 B_2 = O B_2 - O B_1 = y_2 - y_1 = P_1 P_2 \cos yg = r\beta,$$
$$C_1 C_2 = O C_2 - O C_1 = z_2 - z_1 = P_1 P_2 \cos zg = r\gamma,$$

ergeben sich zunächst die Gleichungen:

$$x_2 - x_1 = r\alpha;\ y_2 - y_1 = r\beta;\ z_2 - z_1 = r\gamma.$$

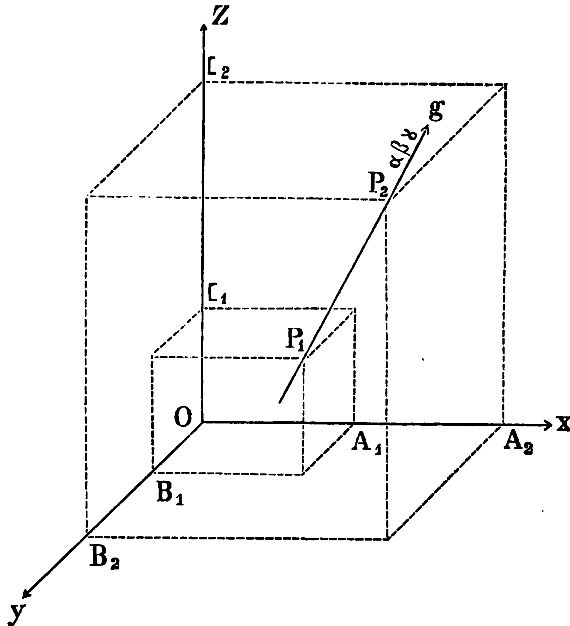
Aus diesen folgt, wenn man quadriert und addiert, weil $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = r^2; \quad \ldots \quad (7$$

ferner weil jetzt r bekannt

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{r};\ \beta = \dfrac{y_2 - y_1}{r};\ \gamma = \dfrac{z_2 - z_1}{r} \\ \alpha : \beta : \gamma = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8$$

Fig. 97.



Man kann die Coordinatendifferenzen $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ die Componenten der Strecke nennen. Dann lassen sich folgende Sätze aussprechen:

Das Quadrat einer Strecke ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Componenten.

Die Richtungscoordinaten der Verbindungslinie von zwei Punkten sind gleich den Componenten der von den letzteren bestimmten Strecke, dividiert durch die Strecke. Die Componenten der Strecke sind zugleich Richtungscomponenten der Verbindungslinie.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Strecke zwischen den Punkten $P_1\,(3, 4, 2)$ und $P_2\,(5, 7, 8)$ hat die Componenten $5 - 3 = 2$; $7 - 4 = 3$; $8 - 2 = 6$; daher ist

$$r = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7;\ \alpha = \frac{2}{7};\ \beta = \frac{3}{7};\ \gamma = \frac{6}{7};$$

$$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 6.$$

b) Die Strecke zwischen den Punkten $P_1\,(3, -2, -5)$ und $P_2\,(-3, 7, -7)$ hat die Componenten $-3 - 3 = -6$; $7 - (-2) = 9$; $-7 - (-5) = -2$; daher ist

$$r = \sqrt{36 + 81 + 4} = 11;\ \alpha = -\frac{6}{11};\ \beta = \frac{9}{11};\ \gamma = -\frac{2}{11};$$

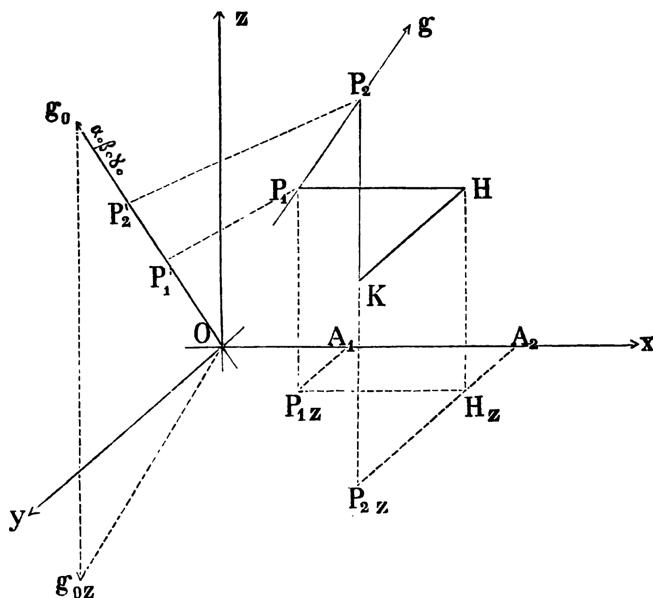
$$\alpha : \beta : \gamma = -6 : 9 : -2.$$

c) Durch die Punkte P_1 (1, 1, 1); P_2 (1, — 1, 1); P_3 (— 3, 1, — 2); P_4 (5, 3, — 8) ist ein Tetraeder bestimmt. Man gebe die Längen und Richtungen seiner Kanten an.

d) Es soll ein Punkt P gefunden werden, der von dem Punkte P_0 (3, 4, 1) den Abstand $r = 9$ hat. Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe? Man suche unter allen Punkten jenen heraus, bei welchem $y = 5$; $z = 9$ und jenen, welcher in der x y-Ebene liegt und $x = 7$ hat.

10. Projection einer Strecke auf eine Gerade. Die Componenten einer Strecke $P_1 P_2$ können (Fig. 98) derart aneinander gereiht

Fig. 98.



werden, dass sie einen in P_1 beginnenden, in P_2 endenden Streckenzug $P_1 H K P_2$ bilden, dessen Schlusslinie die Strecke $P_1 P_2$ ist, so dass $P_1 H = x_2 - x_1$; $HK = y_2 - y_1$; $KP_2 = z_2 - z_1$ wird. Um die orthogonale Projection $P'_1 P'_2$ der Strecke auf die Gerade g_0 mit den Richtungscoordinaten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ zu erhalten, projiciert man den Streckenzug auf dieselbe und erhält

$$P'_1 P'_2 = P_1 H \cos g_0 x + HK \cos g_0 y + KP_2 \cos g_0 z,$$

also, weil $\cos g_0 x = \cos x g_0$ u. s. w.,

$$P'_1 P'_2 = (x_2 - x_1)\,\alpha_0 + (y_2 - y_1)\,\beta_0 + (z_2 - z_1)\,\gamma_0.$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Projection der von den Punkten P_1 (3, 5, 2) und P_2 (7, 3, 1) begrenzten Strecke auf eine Gerade g_0 von der Richtung 1 : 7 : 2 ergibt sich mit Hilfe der Componenten $7 - 3 = 4$; $3 - 5 = -2$; $1 - 2 = -1$ der Strecke und der Richtungscoordinaten

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{54}};\ \beta_0 = \frac{7}{\sqrt{54}};\ \gamma_0 = \frac{2}{\sqrt{54}}$$

der Geraden

$$P'_1 P'_2 = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{54}} - 2\,\frac{7}{\sqrt{54}} - 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{54}} = \frac{-12}{\sqrt{54}} = -\frac{4}{\sqrt{6}}.$$

b) Man berechne die Projection des von den Punkten P_0 (— 6, — 7, — 3); P_1 (1, 1, — 3); P_2 (3, 5, — 7); P_3 (2, — 3, 5); P_4 (7, 3, 3) bestimmten Streckenzuges $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4$ und die seiner Schlusslinie $P_0 P_4$ auf die Geraden mit den Richtungen 8 : 4 : 1; 15 : 10 : 6; — 10 : 6 : 15; oder — 2 : 2 : 1.

11. Coordinaten der Punkte einer Geraden. Eine Gerade möge durch einen Punkt und die Richtung oder durch zwei Punkte gegeben sein. Ist die Lage eines anderen Punktes der Geraden in Bezug auf deren feste Elemente bekannt, so kann man auch die Coordinaten dieses Punktes berechnen.

I. Die Gerade gehe durch den Punkt $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ und habe die Richtungscoordinaten α, β, γ. Ein beliebiger Punkt $P\,(x, y, z)$ der Geraden habe von P_0 den Abstand $P_0 P = r$. Dann ist (Art. 9)

$$x - x_0 = r\alpha;\ y - y_0 = r\beta;\ z - z_0 = r\gamma,$$

also

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + r\alpha \\ y &= y_0 + r\beta \\ z &= z_0 + r\gamma \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (9$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden finden, indem man dem r den entsprechenden Wert ertheilt.

Fällt P_0 mit dem Nullpunkte zusammen, so wird

$$\left.\begin{aligned} x &= r\alpha \\ y &= r\beta \\ z &= r\gamma \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (9^{I}$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Coordinaten der Punkte P_1 und P_2 zu berechnen, welche auf der durch den Punkt P_0 (3, 5, 2) und die Richtung 3 : 6 : 2 gegebenen Geraden in den Abständen $r_1 = 21$ und $r_2 = -14$ liegen. Man findet allgemein

$$x = 3 + \frac{3}{7} r; \quad y = 5 + \frac{6}{7} r; \quad z = 2 + \frac{2}{7} r,$$

also speciell

$$x_1 = 3 + \frac{3}{7} . 21 = 12; \; x_2 = 3 - \frac{3}{7} . 14 = -3;$$

$$y_1 = 5 + \frac{6}{7} . 21 = 23; \; y_2 = 5 - \frac{6}{7} . 14 = -7;$$

$$z_1 = 2 + \frac{2}{7} . 21 = 8; \; z_2 = 2 - \frac{2}{7} . 14 = -2.$$

b) Eine Gerade sei durch den Punkt $P_0 (3, 2, 7)$ und die Richtung $6 : 2 : -9$ gegeben. Die Coordinaten der Punkte P_1 und P_2 zu berechnen, welche auf ihr liegen und von P_0 die Abstände $r_1 = 33$; $r_2 = -11$ haben. Welche Abstände von P_0 und welche Coordinaten haben die Schnittpunkte der Geraden mit den Coordinatenebenen, ferner die Punkte der Geraden, deren Abstände vom Nullpunkte 10 und 20 sind?

c) Welche Richtung muss eine durch den Punkt $P_0 (2, 6, 9)$ gelegte Gerade haben, wenn sie die x-Axe im Abstande $r = 11$ von P_0 treffen soll?

II. Die Gerade sei durch die Punkte $P_1 (x_1, y_1, z_1)$ und $P_2 (x_2, y_2, z_2)$ gegeben. Ein beliebiger Punkt $P (x, y, z)$ derselben habe das Theilverhältnis λ in Bezug auf P_1 und P_2 als Fundamentalpunkte. Aus den Beziehungen

$$\lambda = \frac{P_1 P}{P_2 P} = \frac{A_1 A}{A_2 A} = \frac{x - x_1}{x - x_2};$$

$$\lambda = \frac{P_1 P}{P_2 P} = \frac{B_1 B}{B_2 B} = \frac{y - y_1}{y - y_2};$$

$$\lambda = \frac{P_1 P}{P_2 P} = \frac{C_1 C}{C_2 C} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

findet man

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y &= \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \\ z &= \frac{z_1 - \lambda z_1}{1 - \lambda} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden $P_1 P_2$ berechnen, indem man dem λ den entsprechenden Wert ertheilt. Setzt man $\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, so wird

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \; y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \; z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Für den Mittelpunkt P_m der Strecke $P_1 P_2$ ist $\lambda = -1$, daher

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}; \; z_m = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (11$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Eine Gerade sei durch die Punkte $P_1 (5, 4, 1)$ und $P_2 (7, 8, 5)$ bestimmt. Es sollen die Coordinaten der Punkte P_3, P_4, P_5 mit den Theilverhältnissen

$$\lambda_3 = \frac{5}{4}; \; \lambda_4 = -\frac{3}{2}; \; \lambda_6 = \frac{1}{5},$$

ferner jene des Mittelpunktes P_m berechnet werden. Man findet allgemein:

$$x = \frac{5 - 7y}{1 - \lambda}; \; y = \frac{4 - 8\lambda}{1 - \lambda}; \; z = \frac{1 - 5y}{1 - \lambda},$$

folglich

$$x_3 = \frac{5 - 7 \cdot \frac{5}{4}}{1 - \frac{5}{4}} = 15; \; y_3 = \frac{4 - 8 \cdot \frac{5}{4}}{1 - \frac{5}{4}} = 24; \; z_3 = \frac{1 - 5 \cdot \frac{5}{4}}{1 - \frac{5}{4}} = 21;$$

$$x_4 = \frac{5 + 7 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{31}{5}; \; y_4 = \frac{4 + 8 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{32}{5}; \; z_4 = \frac{1 + 5 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{17}{5};$$

$$x_5 = \frac{5 - 7 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{9}{2}; \; y_5 = \frac{4 - 8 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 3; \; z_5 = \frac{1 - 5 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 0;$$

$$x_m = \frac{5 + 7}{2} = 6; \; y_m = \frac{4 + 8}{2} = 6; \; z_m = \frac{1 + 5}{2} = 3.$$

b) Eine Gerade sei durch die Punkte $P_1 (5, 3, 2)$ und $P_2 (-7, -2, -3)$ gegeben. Man berechne die Coordinaten des Mittelpunktes P_m der Strecke $P_1 P_2$, ferner jene der Punkte $P_3 (\lambda = 5)$; $P_4 \left(\lambda = -\frac{1}{5}\right)$; $P_5 \left(\lambda = \frac{3}{7}\right)$. Welche Theilverhältnisse und Coordinaten haben die Schnittpunkte der Geraden $P_1 P_2$ mit den Coordinatenebenen?

c) Gegeben sei der Punkt $P_1 (5, 3, 7)$; von dem Punkte P_2 sei $x_2 = 3$; es sollen y_2 und z_2 derart berechnet werden, dass die Gerade $P_1 P_2$ durch die x-Axe gehe und die Strecke $P_1 P_2$ in dem Schnittpunkte halbiert werde, oder dass der Schnittpunkt im ersten Drittel der Strecke $P_1 P_2$ liege.

12. Richtungen einer Stellung. Winkelhalbierungslinien. Wenn ein Punkt R auf der Verbindungslinie der Richtungspunkte

R_1 (a_1, b_1, c_1); R_2 (a_2, b_2, c_2) der Richtungen g_1 und g_2 liegt, ist die Richtung OR in der von den Richtungen g_1 und g_2 bestimmten Stellung enthalten. Hat R das Theilverhältnis λ in Bezug auf R_1 und R_2, also die Coordinaten

$$\frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda};\ \frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda};\ \frac{c_1 - \lambda c_2}{1 - \lambda},$$

so ist

$$(a_1 - \lambda a_2) : (b_1 - \lambda b_2) : (c_1 - \lambda c_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12$$

das Richtungsverhältnis des Strahles OR, welches eine beliebige Richtung der genannten Stellung angibt. Lässt man insbesondere die Richtungspunkte R_1 und R_2 mit den Einheitspunkten Π_1 und Π_2 zusammenfallen, so entsprechen dem Halbierungspunkte R_m ($\lambda_m = -1$) und dem unendlich fernen Punkte R_u ($\lambda_u = 1$) von $\Pi_1 \Pi_2$ die Halbierungslinien der Winkel der Geraden $g_1 g_2$ mit den Richtungsverhältnissen

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1 + \alpha_2) : (\beta_1 + \beta_2) : (\gamma_1 + \gamma_2) \\ (\alpha_1 - \alpha_2) : (\beta_1 - \beta_2) : (\gamma_1 - \gamma_2)\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13$$

Beispiele und Aufgaben.

a) In der von den Richtungen g_1 (1 : 2 : 2) und g_2 (6 : 3 : 2) bestimmten Stellung ist die Richtung

$$(1 - 6\lambda) : (2 - 3\lambda) : (2 - 2\lambda)$$

enthalten, wie immer auch λ beschaffen sei. Speciell für $\lambda = -1$ und $\lambda = 1$ ergeben sich die Verhältnisse 7 : 5 : 4 und −5 : −1 : 0, von welchen das erste die Richtung vom Nullpunkte nach dem Halbierungspunkte von $R_1 R_2$, das zweite die zu $R_2 R_1$ parallele Richtung darstellt. Die Winkelhalbierungslinien haben die Richtungsverhältnisse

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{6}{7}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{7}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7}\right) = \quad 25 : 23 : 20;$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{6}{7}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{7}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7}\right) = -11 : \ 5 : \ 8.$$

b) Man bestimme allgemein die Richtungen jener Stellung, welche durch die Richtungen g_1 (3 : 4 : 12); und g_2 (1 : 4 : 8) gegeben ist und speciell die Richtungen, die auch in den Coordinatenebenen enthalten sind; ferner jene der Winkelhalbierungslinien.

c) Die Richtung g_1 (1 : 1 : 1) sei gegeben. Es sollen allgemein die Richtungen dargestellt werden, welche in der von ihr und der x-Axe bestimmten Stellung enthalten sind. Welche von denselben gehört auch der y z-Ebene an?

13. Coordinaten der Punkte einer Ebene. Wenn eine Ebene durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben und die Lage eines beliebigen

Punktes P derselben in Bezug auf diese festen Elemente bekannt ist, so können die Coordinaten des Punktes P ermittelt werden.

Nimmt man auf der Verbindungslinie $P_1 P_2$ den Punkt P_e und auf $P_e P_3$ den Punkt P an, so liegt P in der Ebene. Der Punkt P_e habe in Bezug auf P_1 und P_2 das Theilverhältnis λ; seine Coordinaten sind:

$$\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}; \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}; \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}$$

(Art. 11, II). Ferner habe P das Theilverhältnis μ in Bezug auf P_e und P_3; dann sind

$$x = \frac{\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} - \mu x_3}{1 - \mu} = \frac{x_1 - \lambda x_2 - (1 - \lambda)\mu x_3}{(1 - \lambda)(1 - \mu)};$$

$$y = \frac{\frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} - \mu y_3}{1 - \mu} = \frac{y_1 - \lambda y_2 - (1 - \lambda)\mu y_3}{(1 - \lambda)(1 - \mu)}.$$

$$z = \frac{\frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda} - \mu z_3}{1 - \mu} = \frac{z_1 - \lambda z_2 - (1 - \lambda)\mu z_3}{(1 - \lambda)(1 - \mu)}$$

seine Coordinaten, die sich in symmetrischer Art darstellen lassen, wenn man an Stelle von λ und μ die drei Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ einführt, indem man

$$-\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad -(1 - \lambda)\mu = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

setzt. Dadurch wird

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{\Sigma \lambda x}{\Sigma \lambda}; \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{\Sigma \lambda y}{\Sigma \lambda}; \\ z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{\Sigma \lambda z}{\Sigma \lambda} \end{aligned} \right\} .(14$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Coordinaten aller Punkte der Ebene, welche durch die Punkte P_1 (3, 1, 6); P_2 (4, 5, 2); P_3 (2, 3, 4) geht, sind durch

$$x = \frac{3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}; \quad y = \frac{\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}; \quad z = \frac{6\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

dargestellt. Setzt man $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 1$, so ist damit der Punkt bestimmt, dessen Coordinaten

$$x = \frac{19}{6};\ y = \frac{16}{6};\ z = \frac{26}{6}$$

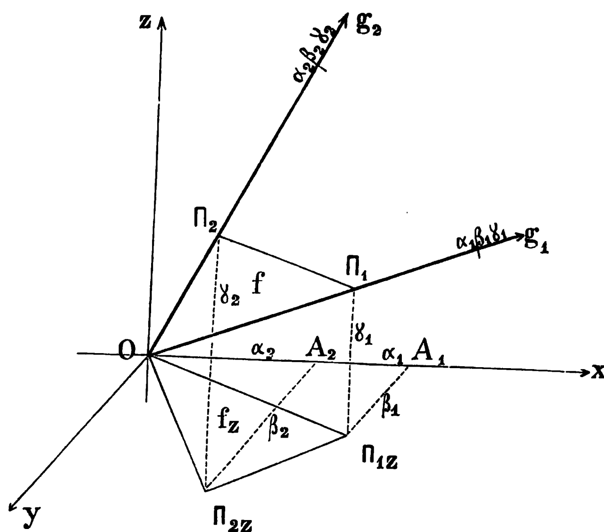
sind. Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ findet man $x = 3$; $y = 3$; $z = 4$.

b) Man stelle allgemein die Coordinaten der Punkte jener Ebene dar, welche von den Punkten $P_1(1, 2, 3)$; $P_2(3, -5, 2)$; $P_3(-2, -3, -7)$ bestimmt wird und berechne insbesondere die Coordinaten der Schnittpunkte dieser Ebene mit den Coordinatenaxen.

c) Eine Ebene schneidet von den Coordinatenaxen die Stücke a, b, c ab, es sollen allgemein die Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben dargestellt und speciell soll z berechnet werden, wenn $x = p$, $y = q$.

14. Bestimmung des Winkels zweier Richtungen. Es mögen die Richtungen g_1 und g_2 durch die Richtungscoordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gegeben sein, so dass die Einheitspunkte Π_1 und Π_2 (Fig. 99) die Coordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ haben. Projiciert

Fig. 99.



man den Streckenzug $O A_2 \Pi_{2z} \Pi_2$ und dessen Schlusslinie $O \Pi_2$ auf g_1, so erhält man

$$O\Pi_2 \cos g_1 g_2 = O A_2 \cos g_1 x + A_2 \Pi_{2z} \cos g_1 y + \Pi_{2z} \Pi_2 \cos g_1 z;$$
$$= \alpha_2 \cos x g_1 + \beta_2 \cos y g_1 + \gamma_2 \cos z g_1,$$

also

$$\cos g_1 g_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15$$

Die Fläche des Dreieckes $O \Pi_1 \Pi_2$ kann entweder aus den Seiten $O\Pi_1, O\Pi_2$ und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $g_1 g_2$

oder aus den Flächen der Projectionen des Dreieckes auf die Coordinatenebenen

$$2\,f_x = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix};\; 2\,f_y = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix};\; 2\,f_z = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

berechnet werden (Art. 8). Man findet einerseits

$$2\,f = O\,\Pi_1\,.\,O\,\Pi_2\,.\,\sin\, g_1 g_2 = \sin g_1 g_2,$$

anderseits

$$4\,f^2 = 4\,f_x^2 + 4\,f_y^2 + 4\,f_z^2,$$

demnach

$$\sin^2 g_1 g_2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16$$

Sind die Richtungen g_1 und g_2 durch die Verhältnisse $a_1 : b_1 : c_1$ und $a_2 : b_2 : c_2$ gegeben, so ist $\alpha_1 = \frac{a_1}{\rho_1}, \ldots$, also

$$\left.\begin{aligned} \cos\, g_1 g_2 &= \frac{1}{\rho_1 \rho_2}\,(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) \\ \sin^2 g_1 g_2 &= \frac{1}{\rho_1^2 \rho_2^2}\left\{ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17$$

Wenn die Richtungen senkrecht zu einander sind, ist

$$g_1 g_2 = \frac{\pi}{2} \text{ oder } g_1 g_2 = \frac{3\pi}{2};\; \cos g_1\, g_2 = 0,$$

daher

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Für die Richtungen $g_1\,(1 : 1 : 1)$ und $g_2\,(3 : 2 : 5)$ findet man

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\; \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\; \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\; \alpha_2 = \frac{3}{\sqrt{38}};\; \beta_2 = \frac{2}{\sqrt{38}};\; \gamma_2 = \frac{5}{\sqrt{38}},$$

also

$$\cos g_1 g_2 = \frac{1\,.\,3 + 1\,.\,2 + 1\,.\,5}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{38}} = \frac{10}{\sqrt{114}} = \sqrt{\frac{50}{57}};$$

$$\sin^2 g_1 g_2 = \frac{1}{3\,.\,38}\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2 \right\} = \frac{9 + 4 + 1}{114} = \frac{7}{57}$$

und

$$\sin g_1 g_2 = \sqrt{\frac{7}{57}}.$$

b) Wenn die Richtung 2 : 6 : 9 senkrecht sein soll zu der Richtung 9 : — 6 : c, ist

$$2 \,.\, 9 - 6 \,.\, 6 + 9\,c = 0$$

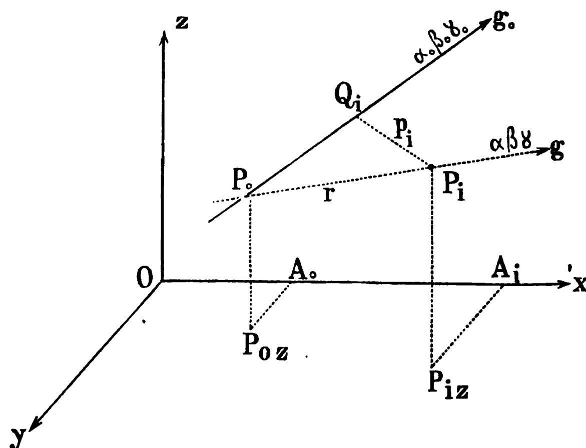
die Bedingung hiefür, aus welcher sich $c = 2$ ergibt.

c) Man berechne Cosinus und Sinus des Winkels der Richtungen g_1 (6 : 10 : 15) und g_2 (— 10 : — 14 : 35) und suche jene Senkrechten zu diesen Richtungen, deren Richtungscomponenten aus denselben Zahlen, aber in anderer Reihenfolge und mit zum Theil anderen Vorzeichen bestehen.

d) Man zeige, dass die Richtungen 4 : 5 : 20; 5 : — 20 : 4; 20 : 4 : — 5 miteinander rechte Winkel bilden.

15. Senkrechter Abstand eines Punktes von einer Geraden. Eine Gerade g_0 sei durch den Punkt P_0 und ihre Richtungscoordinaten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, ein Punkt P_i durch seine Coordinaten gegeben (Fig. 100).

Fig. 100.



Um den senkrechten Abstand $Q_i P_i = p_i$ des Punktes von der Geraden zu ermitteln, berechnet man zunächst aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $P_0 Q_i P_i$

$$p_i = P_0 P_i \sin g_0 g = r \sin g_0 g.$$

Sind α, β, γ die Richtungscoordinaten der die Punkte P_0 und P_i verbindenden Geraden g, so findet man

$$\sin^2 g_0 g = \begin{vmatrix} \beta_0 & \gamma_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2$$

und

$$r^2 \sin^2 g_0 g = \begin{vmatrix} \beta_0 & \gamma_0 \\ r\beta & r\gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ r\gamma & r\alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ r\alpha & r\beta \end{vmatrix}^2,$$

demnach (Art. 9)

$$p_i^2 = \begin{vmatrix} \beta_0 & \gamma_0 \\ y_i - y_0 & z_i - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ z_i - z_0 & x_i - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ x_i - x_0 & y_i - y_0 \end{vmatrix}^2 . \quad (19$$

Anmerkung. Da $P_0 Q_i$ die Projection von $P_0 P_i$ auf g_0 ist, ergibt sich (Art. 10)

$$P_0 Q_i = (x_i - x_0)\,\alpha_0 + (y_i - y_0)\,\beta_0 + (z_i - z_0)\,\gamma_0 . \quad . \quad . \quad (20$$

Damit können die Coordinaten des Fußpunktes Q_i leicht berechnet werden. Wenn die Gerade g_0 durch den Nullpunkt geht und P_0 mit diesem zusammenfällt, wird

$$p_i^2 = \begin{vmatrix} \beta_0 & \gamma_0 \\ y_i & z_i \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ z_i & x_i \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ x_i & y_i \end{vmatrix}^2 ;$$

$$P_0 Q = \alpha_0 x_i + \beta_0 y_i + \gamma_0 z_i .$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Eine Gerade gehe durch den Punkt $P_0(2, 3, 5)$ und habe die Richtung $8 : -4 : 1$. Ein Punkt P_i habe die Coordinaten $14, 6, 2$; sein Abstand von der Geraden ist, da

$$p_i^2 = \begin{vmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} \\ 6-3 & 2-5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ 2-5 & 14-2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} \\ 14-2 & 6-3 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \frac{9^2 + 36^2 + 72^2}{81} ,$$

$$p_i = 9.$$

Ferner findet man

$$P_0 Q_i = (14-2) . \frac{8}{9} + (6-3) . \frac{-4}{9} + (2-5) . \frac{1}{9} = \frac{96 - 12 - 3}{9} = 9.$$

b) Man berechne den Abstand des Punktes $P_i(6, -2, 9)$ von der durch den Punkt $P_0(1, 1, 1)$ und die Richtung $2 : 3 : 6$ bestimmten Geraden. Wie groß ist $P_0 Q_i$? Welche Coordinaten hat Q_i?

c) Welchen Abstand hat der Punkt $P_i(8, 13, 3)$ von der durch den Nullpunkt mit der Richtung $2 : 6 : 9$ gelegten Geraden? Man berechne $O Q_i$ und die Coordinaten von Q_i.

d) Durch den Punkt $P_0(2, 3, 0)$ gehe die Gerade mit der Richtung $2 : 2 : 1$. Es soll ein Punkt P ermittelt werden, welcher von der Geraden den Abstand $p = 3$ hat. Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Wie viele Punkte der geforderten Beschaffenheit liegen in der xy-Ebene und wie sind dieselben angeordnet? Man ermittle die Punkte, für welche $x = 1$, $y = 1$.

e) Unter den Annahmen der Aufgabe *d*) soll der Punkt P so ermittelt werden, dass $P_0 Q : Q P = 1 : 1$. Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Gibt es Punkte der x-Axe, welche ihr entsprechen? Wie groß sind deren Abstände vom Nullpunkte?

16. Senkrechte zu zwei Richtungen. Die Ermittlung der Senkrechten $g\ (\alpha, \beta, \gamma)$ zu zwei gegebenen Richtungen $g_1\ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$,

$g_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ kann mit Hilfe des vom Nullpunkte und den Einheitspunkten bestimmten Dreieckes $O \Pi_1 \Pi_2$ geschehen, dessen Ebene ja die Normalenrichtung g besitzt. Da nämlich

$$2 f = \sin g_1 g_2; \; 2 f_x = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}; \; 2 f_y = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}; \; 2 f_z = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

(vgl. Art. 14), so findet man (Art. 8, Gl. 6)

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{\sin g_1 g_2}; \; \beta = \frac{\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1}{\sin g_1 g_2}; \; \gamma = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\sin g_1 g_2} \\ \alpha : \beta : \gamma = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (21$$

Zu demselben Ergebnisse gelangt man mittelst der Beziehungen

$$\alpha_1 \alpha + \beta_1 \beta + \gamma_1 \gamma = 0;$$
$$\alpha_2 \alpha + \beta_2 \beta + \gamma_2 \gamma = 0$$

(Art. 14), welche ausdrücken, dass g zu g_1 und g_2 senkrecht ist, indem man daraus das Verhältnis $\alpha : \beta : \gamma$ berechnet. Sind die Richtungen g_1 und g_2 durch die Verhältnisse $a_1 : b_1 : c_1$ und $a_2 : b_2 : c_2$ gegeben, so ergibt sich das Verhältnis $a : b : c$ der Richtung g aus den Gleichungen

$$a_1 a + b_1 b + c_1 c = 0;$$
$$a_2 a + b_2 b + c_2 c = 0$$

auf demselben Wege. Man findet

$$a : b : c = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (22$$

Wenn die Richtungen g_1 und g_2 selbst zu einander senkrecht sind, also $\sin g_1 g_2 = 1$ ist, folgt aus den Gleichungen 21

$$\alpha = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1; \quad \beta = \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1; \quad \gamma = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1. \quad . \; (23$$

Anmerkung. Die ermittelte Richtung g zeigt die positive Seite der Ebene des Winkels $g_1 g_2$ an, so dass derselbe einem auf dieser Seite gedachten Beobachter positiv erscheint. (Vgl. Art. 8).

Beispiele und Aufgaben.

a) Zu den Richtungen

$$g_1 \; . \; . \; . \; 5 : 3 : 1;$$
$$g_2 \; . \; . \; . \; 1 : 3 : 5$$

ist die Richtung

$$a : b : c = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 : -24 : 12 = 1 : -2 : 1$$

senkrecht, deren Coordinaten

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}};\ \beta = \frac{-2}{\sqrt{6}};\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

sind.

b) Die Richtungen g_1 (1 : 2 : 2); g_2 (2 : 1 : — 2) sind zu einander senkrecht. Da

$$\alpha_1 = \frac{1}{3};\ \beta_1 = \frac{2}{3};\ \gamma_1 = \frac{2}{3};\ \alpha_2 = \frac{2}{3};\ \beta_2 = \frac{1}{3};\ \gamma_2 = -\frac{2}{3}$$

findet man für die zu beiden senkrechte Richtung

$$\alpha = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3};\ \beta = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{-3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3};\ \gamma = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3};$$

$$\alpha : \beta : \gamma = -2 : 2 : -1.$$

c) Man bestimme die zu den Richtungen g_1 (1 : 1 : 1) und g_2 (1 : — 1 : 1) senkrechte Richtung und deren Coordinaten.

d) Man zeige, dass

$$g\left[\frac{n(n+k)}{k} : n : -(n+k)\right]$$

senkrecht ist zu

$$g_1\left[n : (n+k) : \frac{n(n+k)}{k}\right]$$

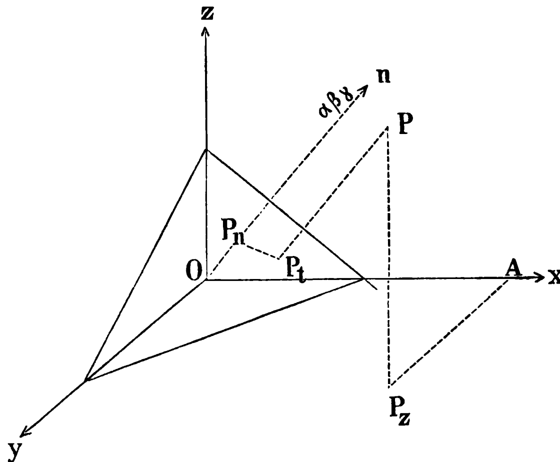
und

$$g_2\left[(n+k) : -\frac{n(n+k)}{k} : n\right]$$

durch Bestimmung der Senkrechten zu g_1 und g_2 und mittelst der Orthogonalitätsbedingung (Art. 14). Welchen Winkel bilden g_1 und g_2?

17. Bestimmung des senkrechten Abstandes eines Punktes von einer Ebene. Der senkrechte Abstand t eines Punktes P von einer Ebene (Fig. 101) wird von der Ebene zum Punkte gezählt. Wird also die Ebene von der darauf Senkrechten aus P in dem Punkte P_t getroffen, so ist

Fig. 101.



$$t = P_t P.$$

Wenn zwei Punkte auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen, haben ihre Abstände entgegengesetzte Vorzeichen, daher ist es nöthig — etwa in der durch den Nullpunkt gelegten Normalen n — die positive Richtung und damit die positive Seite der Ebene festzustellen.

Dieses geschieht durch das Richtungsverhältnis a : b : c oder die daraus berechneten Richtungscoordinaten α, β, γ der Normalen.

Die Ebene ist bestimmt durch die Normale n und den Punkt P_n, in dem sie von dieser getroffen wird. Ist also $P_n O = l$ gegeben, so erscheint durch die Stücke α, β, γ, l die Ebene festgelegt. Projiciert man nun die Streckenzüge $O P_n P_t P$ und $O A P_z P$, welche die Schlusslinie OP gemein haben, auf die Normale n und bedenkt, dass die Projectionen der Strecken $O P_n$ und $P_t P$ gleich den Strecken selbst sind, während $P_n P_t$ die Projection Null hat, so erhält man:

$$O P_n + O + P_t P = O A \cos n x + A P_z \cos n y + P_z P \cos n z$$

oder

$$-l + t = x \cos x n + y \cos y n + z \cos z n,$$

mithin

$$t = \alpha x + \beta y + \gamma z + l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24$$

Diese Gleichung liefert den gesuchten Abstand der Größe und dem Vorzeichen nach, und zwar erscheint derselbe bei jenen Punkten positiv, welche auf der positiven Seite der Ebene liegen.

Beispiele und Aufgaben.

a) Eine Ebene sei durch n (6 : 3 : 2) und $l = -5$ gegeben; für dieselbe soll die Distanzformel aufgestellt und zur Berechnung der Abstände der Punkte P_1 (3, 7, 9); P_2 (5, — 2, 3); P_3 (2, 3, 7) benützt werden. Durch das Richtungsverhältnis 6 : 3 : 2 ist die positive Richtung der Normalen, also auch die positive Seite der Ebene bestimmt. Da $l = P_n O = -5$, ist $O P_n = 5$, daher von O aus in der positiven Richtung auf der Normalen aufzutragen. Wegen

$$\alpha = \frac{6}{7};\ \beta = \frac{3}{7};\ \gamma = \frac{2}{7}$$

findet man

$$t = \frac{6}{7} x + \frac{3}{7} y + \frac{2}{7} z - 5 = \frac{6x + 3y + 2z - 35}{7}.$$

und

$$t_1 = \frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9 - 35}{7} = \frac{22}{7} = 3 \cdot 14 \ldots$$

Ebenso $t_2 = -\frac{5}{7}$; $t_3 = 0$, d. h. der Punkt P_3 liegt in der Ebene selbst.

Dieselbe Ebene ist offenbar auch durch $n'(-6 : -3 : -2)$ und $l = 5$ bestimmt, nur dass die positive Normalenrichtung der früheren direct entgegengesetzt angenommen wurde. Die Distanzformel

$$t' = \frac{-6x - 3y - 2z + 35}{7}$$

liefert jetzt für die Punkte P_1, P_2 dieselben Abstände, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen. Der Abstand von P_3 ergibt sich wieder gleich Null.

b) Für die durch $n(-3 : 4 : 12)$ und $l = 13$ bestimmte Ebene sind n und P_n zu construieren, die Distanzformel aufzustellen und die Abstände der Punkte $P_1(5, 7, -3)$; $P_2(0, 3, 5)$; $P_3(5, 0, 0)$; $P_4(-2, -3, -4)$; $P_5(-3, 4, 12)$ anzugeben.

c) Die Coordinaten des Punktes P_n sind $-l\alpha$, $-l\beta$, $-l\gamma$; jene des Punktes P_t sind $x - \alpha t$, $y - \beta t$, $z - \gamma t$; warum?

d) Den Punkt P zu ermitteln, welcher von der durch $n(2 : 1 : 2)$ und $l = 6$ gegebenen Ebene den Abstand $t = 10$ hat. Wie viele Lösungen sind möglich? Wie groß ist z, wenn $x = 1$; $y = 1$? Welche Coordinaten haben P_n und P_t in diesem Falle?

18. Das Volum eines Tetraeders. Ein Tetraeder ist durch die Coordinaten seiner Eckpunkte vollkommen bestimmt, daher muss sich sein Volum durch dieselben ausdrücken lassen.

I. Es liege ein Eckpunkt des Tetraeders im Nullpunkte, die anderen seien die Punkte P_1, P_2, P_3. Bezeichnet man mit f die Fläche des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$, mit f_x, f_y, f_z die Flächen seiner Projectionen auf die Coordinatenebenen, mit α, β, γ die Stellungscoordinaten der Dreiecksebene, mit $l (= P_n O)$ den Abstand des Nullpunktes von derselben, so ist bekanntlich

$$V = \frac{1}{3} f l;$$

die Distanzformel der Ebene $P_1 P_2 P_3$ lautet (Art. 17)

$$t = \alpha x + \beta y + \gamma z + l;$$

für einen beliebigen Punkt P_0 der Ebene ist daher

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + l = 0,$$

also

$$-l = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0,$$

oder wenn man beiderseits mit f multipliciert,

$$-f l = f\alpha . x_0 + f\beta . y_0 + f\gamma . z_0.$$

Da

$$f l = 3V; \; f\alpha = f_x; \; f\beta = f_y; \; f\gamma = f_z,$$

folgt daraus

$$-3\,V = f_x \,.\, x_0 + f_y \,.\, y_0 + f_z \,.\, z_0,$$

also, wenn man beiderseits mit 2 multipliciert und die Werte für $2\,f_x$, $2\,f_y$, $2\,f_z$ einführt:

$$-6\,V = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x_0 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} y_0 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z_0.$$

Nun erkennt man leicht, dass

$$-6\,V = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

und da P_0 ein beliebiger Punkt der Ebene $P_1 P_2 P_3$ ist, darf man (Art. 13), wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ beliebige Größen bedeuten,

$$x_0 = \frac{\Sigma \lambda x}{\Sigma \lambda} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}; \quad y_0 = \frac{\Sigma \lambda y}{\Sigma \lambda} = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3};$$

$$z_0 = \frac{\Sigma \lambda z}{\Sigma \lambda} = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}; \quad 1 = \frac{\Sigma \lambda}{\Sigma \lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

setzen, wodurch die erste Determinante rechts in

$$\frac{1}{\Sigma \lambda} \begin{vmatrix} \Sigma \lambda x & \Sigma \lambda y & \Sigma \lambda z & \Sigma \lambda \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

übergeht. Transformiert man die Elemente der ersten Zeile, indem man die mit $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$ der zweiten, dritten, vierten Zeile hinzuaddiert, so verschwinden dieselben und mit ihnen die Determinante. so dass

$$6\,V = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

wird. Aus dieser Formel ergibt sich für V ein positiver Wert, wenn f und l beide positiv oder beide negativ, d. h. wenn vom Nullpunkte aus gesehen die Punkte $P_1 P_2 P_3$ im positiven Drehungssinne geordnet erscheinen. Um das negative Vorzeichen vor der Determinante zu vermeiden, kann man

$$6\,V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25$$

setzen und erhält nun einen positiven Wert, wenn ein gegen die äußere Seite des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ gewendeter Beobachter die Eckpunkte desselben im positiven Drehungssinne aufeinander folgen sieht.

Beispiele und Aufgaben.

a) Das Tetraeder, dessen Eckpunkte der Nullpunkt und die Punkte $P_1\,(7, 2, 3)$; $P_2\,(1, 5, 2)$; $P_3\,(3, 4, 9)$ sind, hat das Volum

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \frac{220}{6} = 36{\cdot}66 \ldots$$

Auf der äußeren Fläche $P_1\,P_2\,P_3$ zeigen die Eckpunkte positiven Drehungssinn.

b) Man berechne das Volum des vom Nullpunkte und den Punkten $P_1\,(1, 1, 1)$; $P_2\,(3, -2, 5)$; $P_3\,(-2, 5, -7)$ bestimmten Tetraeders. Welchen Drehungssinn zeigen die Punkte P_1, P_2, P_3 auf der äußeren Fläche des von ihnen gebildeten Dreieckes?

c) Gegeben sind die Punkte $P_1\,(5, 3, 8)$; $P_2\,(3, -2, 9)$; es soll ein Punkt P derart ermittelt werden, dass das Tetraeder $O\,P_1\,P_2\,P$ das Volumen 100 erhalte. Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Wie groß ist z, wenn $x = 1$; $y = 1$? Kann P auf der x-Axe liegen und wo?

d) Man zeige, dass das Volum des vom Nullpunkte und den Punkten $P_1\,(2, 3, 5)$; $P_2\,(3, -5, 2)$; $P_3\,(5, -2, 7)$ bestimmten Tetraeders verschwindet und gebe den Grund hiefür an.

II. Wenn das Volum des Tetraeders berechnet werden soll, dessen Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 sind, kann man das Dreieck $P_1\,P_2\,P_3$ als Basis, den Punkt P_4 als Spitze einer dreiseitigen Pyramide ansehen. Sind dann α, β, γ die Stellungscoordinaten der Basisebene, l der Abstand des Nullpunktes von derselben, demnach

$$t_4 = \alpha\,x_4 + \beta\,y_4 + \gamma\,z_4 + l$$

die Höhe der Pyramide, so folgt durch beiderseitige Multiplication mit dem Inhalt f der Basis

$$f\,t_4 = f\,\alpha\,.\,x_4 + f\,\beta\,.\,y_4 + f\,\gamma\,.\,z_4 + f\,l$$

oder, weil

$$f\,t_4 = 3\,V;\; f\,\alpha = f_x;\; f\,\beta = f_y;\; f\,\gamma = f_z$$

und f l das dreifache Volum des Tetraeders $O\,P_1\,P_2\,P_3$ darstellt:

$$6\,V = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x_4 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} y_4 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z_4 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

demnach

$$6\,V = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aus dieser Formel ergibt sich ein positiver Wert für das Volum, wenn die Punkte P_1, P_2, P_3, von P_4 aus betrachtet, die Aufeinanderfolge im positiven Drehungssinne zeigen. Um das negative Vorzeichen vor der Determinante zu vermeiden, kann man

$$6\,V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26$$

setzen und erhält nun positive Werte, wenn auf der Außenseite der Fläche des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ dessen Eckpunkte die Anordnung entsprechend dem positiven Drehungssinne aufweisen.

Transformiert man die erste, zweite und dritte Zeile der Determinante, indem man von den Elementen einer jeden die correspondierenden Elemente der vierten Zeile abzieht und entwickelt dann nach der vierten Colonne, so wird

$$6\,V = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (26^1$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Das Volum des Tetraeders der Punkte $P_1\,(5, 1, 2)$; $P_2\,(7, 2, 3)$; $P_3\,(1, 5, 3)$; $P_4\,(3, 5, 7)$ ist

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5-3 & 1-5 & 2-7 \\ 7-3 & 2-5 & 3-7 \\ 1-3 & 5-5 & 3-7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 4 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{42}{6} = -7.$$

Die Eckpunkte des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ weisen auf der äußeren Fläche desselben die Aufeinanderfolge im negativen Sinne auf.

b) Man berechne das Volum des Tetraeders mit den Eckpunkten $P_1\,(3, 2, 5)$ $P_2\,(-5, 3, 7)$; $P_3\,(-2, -1, -3)$; $P_4\,(5, 3, -1)$ und gebe an, in welchem Drehungssinne die Punkte P_1, P_2, P_3; P_2, P_3, P_4; P_4, P_1, P_2; P_1, P_3, P_4 auf den äußeren Flächen der betreffenden Dreiecke angeordnet sind.

c) Gegeben sind die Punkte $P_1(0, 0, -1)$; $P_2(1, 1, 1)$; $P_3(1, -1, 1)$; es soll ein Punkt P derart ermittelt werden, dass das Volum des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P$ gleich 10 werde. Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Wie groß ist x, wenn $y = 2$, $z = 5$? Kann P in der z-Axe liegen und wo?

d) Welcher Punkt liegt in der Ebene der Punkte $P_1(3, 2, 1)$; $P_2(1, -2, 3)$; $P_3 = (-2, -5, -7)$ und hat $x = 10$; $y = 10$?

19. Beziehungen zwischen den Coordinaten von drei zu einander senkrechten Richtungen. Wenn die Richtungen $g_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $g_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $g_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ zu einander senkrecht sind, bestehen zwischen ihren Coordinaten die Beziehungen (Art. 6, 14, 16):

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1; \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0;$$
$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1; \quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0;$$
$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1; \quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0;$$
$$\alpha_i = \beta_k\gamma_l - \beta_l\gamma_k; \quad \beta_i = \gamma_k\alpha_l - \gamma_l\alpha_k; \quad \gamma_i = \alpha_k\beta_l - \alpha_l\beta_k$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3;\ k = 2,\ 3,\ 1;\ l = 3,\ 1,\ 2).$$

In der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

deren Unterdeterminanten mit A_i, B_i, C_i bezeichnet werden mögen, ist z. B.

$$A_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = \alpha_1; \; C_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \gamma_3 \text{ u. s. w.},$$

d. h. jedes Element ist seiner Unterdeterminante gleich. Da

$$\triangle^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

ist

$$\triangle = \pm 1.$$

Man kann die positiven Richtungen immer derart annehmen, dass $\triangle = 1$ wird, indem man, wenn nöthig, statt der einen von ihnen die direct entgegengesetzte wählt. Deshalb sei bei den gegebenen Richtungen $\triangle = 1$ vorausgesetzt. Dann ist

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1;$$
$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$

u. s. w., so dass sich für die drei Richtungen auch noch die Beziehungen

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1; \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0;$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1; \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0;$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^3 = 1; \quad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0$$

ergeben, die aber nicht unabhängig von den Beziehungen der ersten Gruppe, sondern eine Folge derselben sind und dieselbe Bedeutung haben wie jene, sobald man g_1, g_2, g_3 als Axen, x, y, z als gegebene, zu einander senkrechte Richtungen ansieht; dann sind nämlich α_1, α_2, α_3 die Richtungscoordinaten von x; β_1, β_2, β_3 und γ_1, γ_2, γ_3 jene von y und z u. s. w.

20. Bedingung für drei Richtungen einer Stellung. Die Richtungen $g_1(a_1 : b_1 : c_1)$; $g_2(a_2 : b_2 : c_2)$; $g_3(a_3 : b_3 : c_3)$ werden durch die Verbindungslinien des Nullpunktes mit den Richtungspunkten $R_1(a_1, b_1, c_1)$; $R_2(a_2, b_2, c_2)$; $R_3(a_3, b_3, c_3)$ repräsentiert (Art. 6). Die Punkte O, R_1, R_2, R_3 bestimmen ein Tetraeder mit dem Volum

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Gehören die drei Richtungen derselben Stellung an, so liegen die Richtungspunkte in einer Ebene und das Tetraeder hat das Volum Null. Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27$$

die Bedingung dafür, dass drei Richtungen in einer Stellung enthalten sind.

Wird eine Richtung a : b : c gesucht, welche der von den Richtungen $a_1 : b_1 : c_1$; $a_2 : b_2 : c_2$ bestimmten Richtung angehört, so müssen ihre Componenten der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

genügen, so dass die Aufgabe unendlich viele Lösungen hat.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Richtungen $g_1(1 : 1 : 1)$; $g_2(1 : -1 : 1)$; $g_3(1 : 0 : 1)$ sind in derselben Stellung enthalten, denn es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Man bestimme c derart, dass die Richtung g (2 : 3 : c) in der Stellung der Richtungen g_1 (3 : 5 : 0); g_2 (0 : 5 : 3) enthalten sei.

c) Eine Stellung sei durch die Richtungen g_1 (1 : 4 : 8); g_2 (6 : 2 : 9) gegeben. Die Richtungen anzugeben, welche sie mit den Coordinatenebenen gemein hat.

21. Geometrische Bedeutung der Gleichungen.

I. Die Aufgabe, einen Punkt P zu ermitteln, dessen Coordinaten x, y, z einer gegebenen Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

genügen, ist eine unbestimmte. Da nämlich eine Gleichung mit drei Unbekannten unendlich viele Lösungen hat, existieren unendlich viele Punkte von der verlangten Eigenschaft, deren Vertheilung im Raume durch die Gleichung geregelt ist. Je nach ihrer Beschaffenheit kann die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ für irgend ein Wertepaar x, y einen Wert, aber auch zwei und mehr Werte von z ergeben.

Setzt man den ersten Fall voraus, so werden den Wertepaaren x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; . . . die Werte z_1, z_2, z_3, . . . entsprechen und dadurch Punkte P_1, P_2, P_3, . . . des Raumes festgelegt. Durch die Annahme der Wertepaare x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; . . . sind die orthogonalen Projectionen P_{1z}, P_{2z}, P_{3z}, . . . der Punkte P_1, P_2, P_3, . . . auf die xy-Ebene in willkürlicher Vertheilung bestimmt. Bei den in Betracht kommenden Gleichungen sind im allgemeinen zwei berechnete Werte z_i und z_k umsoweniger von einander verschieden, je geringer der Unterschied der angenommenen Werte x_i und x_k, y_i und y_k ist, zu welchen sie gehören, also je näher die Projectionen P_{iz} und P_{kz} der Punkte P_i und P_k aneinander liegen. Daher werden die Differenzen $x_k - x_i$, $y_k - y_i$, $z_k - z_i$ — absolut genommen — gleichzeitig immer kleiner und verschwinden gleichzeitig. Mit ihnen nimmt der Abstand der Punkte

$$P_i P_k = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}$$

ab, bis er Null wird und die Punkte zusammenfallen. Denkt man also die Wertsysteme x_1, y_1; x_2, y_2; . . . derart angenommen, dass die von ihnen bestimmten Punkte P_{1z}, P_{2z}, . . . die xy-Ebene dicht bedecken, dann sind auch die Punkte P_1, P_2, . . . im Raume dicht geschart, so dass einer stetigen Verbreitung der Projectionen die stetige Verbreitung der Punkte im Raume entspricht, die also in einer Fläche liegen müssen.

Folgen aus der gegebenen Gleichung für ein Wertepaar x, y zwei oder mehrere Werte von z, so ergeben sich zwei oder mehrere Theile einer Fläche. Zwischen dieser und der Gleichung besteht ein Zusammenhang, der sich darin äußert, dass jeder Punkt, dessen Coordinaten der Gleichung genügen, auf der Fläche liegt und umgekehrt die Coordinaten eines jeden Punktes der Fläche die Gleichung identisch erfüllen. Dieser Zusammenhang wird dadurch gekennzeichnet, dass man sagt, die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

stellt eine Fläche vor.

Es kann vorkommen, dass eine Gleichung zwischen bloß zwei Coordinaten, wie z. B.

$$\varphi(x, y) = 0$$

gegeben ist. Diese stellt bekanntlich in der x y-Ebene eine Linie vor: wenn ihr die Coordinaten eines Punktes P im Raume genügen sollen, so geschieht dies bei beliebigem z bloß durch x und y, und zwar wird dadurch der orthogonalen Projection P_z des Punktes P die Bedingung auferlegt, in der Linie $\varphi(x, y) = 0$ der x y-Ebene zu liegen. Danach muss P der Cylinderfläche angehören, deren Leitlinie in der x y-Ebene durch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ repräsentiert wird, während ihre Erzeugenden parallel sind zu der z-Axe.

Im Raume stellen also Gleichungen von der Form

$$\varphi(x, y) = 0; \quad \varphi(y, z) = 0; \quad \varphi(z, x) = 0$$

Cylinderflächen vor, deren Erzeugende parallel sind zu der z-, x- oder y-Axe und deren Leitlinien durch dieselben Gleichungen in der x y-, y z-, z x-Ebene dargestellt sind.

Wenn sich das Polynom der Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

in mehrere Factoren $f_1(x, y, z)$; $f_2(x, y, z)$ . . . zerlegen lässt, die Gleichung also in der Form

$$f_1(x, y, z) \cdot f_2(x, y, z) \quad . \quad . \quad . \quad = 0$$

darstellbar ist, stellt sie die Gesammtheit der Flächen vor, welche die Gleichungen

$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = 0,$$
$$\vdots$$

repräsentieren, die nämlich erhalten werden, wenn man die einzelnen Factoren gleich Null setzt. Denn durch Einsetzung der Coordinaten eines Punktes, welcher auf irgend einer dieser Flächen liegt, verschwindet der betreffende Factor, also auch das ganze Product. Mithin genügen die Coordinaten eines jeden solchen Punktes der Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

und diese charakterisiert wirklich eine Gruppe von Flächen.

Um eine Vorstellung von der Gestalt der durch ihre Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

gegebenen Fläche zu erhalten, untersucht man am besten eine genügende Anzahl von Linien, die auf ihr liegen. Setzt man z. B. $z = z_0$, so ergeben sich aus der Gleichung

$$f(x, y, z_0) = 0$$

die Coordinaten x und y derjenigen Punkte der Fläche, welche im Abstande z_0 von der x y-Ebene liegen, also der Linie angehören, nach welcher die Fläche von einer im Abstande z_0 zur x y-Ebene parallelen Ebene geschnitten wird. Da die Gleichung

$$f(x, y, z_0) = 0$$

eine Cylinderfläche vorstellt, deren Erzeugenden der z-Axe parallel sind, und welche jene Punkte enthält, also die Schnittlinie auf die x y-Ebene projiciert, erscheint die der Schnittlinie congruente Projection ebenfalls durch

$$f(x, y, z_0) = 0$$

dargestellt. Indem man $z = z_1, z_2, z_3, \ldots$ setzt, verschafft man sich eine beliebige Anzahl solcher Schnittlinien (Schichtenlinien), aus deren Gestalt auf jene der Fläche geschlossen werden kann. Insbesondere für $z = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$f(x, y, 0) = 0$$

der Schnittlinie mit der x y-Ebene. Ebenso gelangt man zu Schnittlinien mit Ebenen, welche den anderen Coordinatenebenen parallel sind, wenn man $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$ oder $y = y_0, y_1, y_2, \ldots$ setzt u. s. w.

Ist das Gesetz für die Lage eines Punktes in Worten ausgesprochen und es lässt sich durch eine einzige Gleichung ausdrücken, so ist der Ort des Punktes eine Fläche, deren Gestalt und Eigenschaften aus der Gleichung ergründet werden können, insoweit sie nicht schon aus dem Gesetz erkennbar sind.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Fläche

$$x^2 + y^2 - (z - c)^2 = 0$$

wird durch eine im Abstande $z = z_0$ der xy-Ebene parallele Ebene nach einer Linie geschnitten, deren orthogonale Projection auf die xy-Ebene die Gleichung

$$x^2 + y^2 - (z_0 - c)^2 = 0$$

hat, also ein Kreis ist mit dem Mittelpunkte im Nullpunkte und dem Radius $r = z_0 - c$. Man schließt daraus, dass alle Schnittlinien dieser Art Kreise sind, deren Mittelpunkte in der z-Axe liegen. Für $z_0 = c$ wird $r = 0$ und der betreffende Schnittkreis zieht sich zu einem Punkt zusammen. Von der yz-Ebene wird die Fläche nach einer Linie geschnitten, deren Gleichung durch die Substitution $x = 0$ erhalten wird. Sie lautet

$$y^2 - (z - c)^2 = 0$$

oder

$$(y + z - c)(y - z + c) = 0,$$

folglich zerfällt die Schnittlinie in ein Paar von Geraden, welche sich auf der z-Axe im Abstande c vom Nullpunkte schneiden. Die Fläche ist also eine Rotationskegelfläche, deren Axe mit der z-Axe zusammenfällt.

b) Es soll ein Punkt P gefunden werden, dessen Abstand z von der xy-Ebene gleich ist seinem Abstande von dem Punkte $P_0\,(0, 0, p)$ der z-Axe. Da

$$\overline{P_0 P}^2 = x^2 + y^2 + (z - p)^2,$$

muss also

$$z^2 = x^2 + y^2 + (z - p)^2$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2pz + p^2 = 0$$

sein, wodurch das ausgesprochene Gesetz mittelst einer Gleichung dargestellt erscheint. Daher ist der Ort des Punktes eine Fläche. Man überzeugt sich leicht, dass diese von Ebenen parallel der xy-Ebene nach Kreisen mit dem Mittelpunkte in der z-Axe, von der yz-Ebene aber nach einer Parabel geschnitten wird, mithin ein Rotationsparaboloid ist.

c) Die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0;\; y^2 + z^2 - r^2 = 0;\; z^2 + x^2 - r^2 = 0$$

repräsentieren Rotationscylinderflächen, deren Axen mit der z-, x- oder y-Axe zusammenfallen und welche den Radius r haben.

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

stellt eine hyperbolische Cylinderfläche vor, deren Leitlinie in der xy-Ebene die Hyperbel mit den Axen a und b ist u. s. w.

Durch die Gleichungen

$$ax + by + d = 0;\; by + cz + d = 0;\; ax + cz + d = 0$$

werden Ebenen parallel den Axen z, x, y; durch

$$z = c; \quad x = a; \quad y = b$$

Ebenen parallel den Coordinatenebenen x y, y z, z x dargestellt u. s. w.

d) Die Gleichung

$$x^2 y + y^3 - x^2 z - y^2 z - 9y + 9z = 0$$

lässt sich in der Form

$$(x^2 + y^2 - 9)(y - z) = 0$$

darstellen, repräsentiert daher eine Cylinderfläche und eine durch die x-Axe gehende Ebene.

e) Einen Punkt P zu finden, welcher vom Nullpunkte oder von dem Punkte P_0 (2, 1, 3) den Abstand $r = 5$ hat.

f) Was für eine Fläche wird durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

repräsentiert?

g) In der x y-Ebene wird eine Gerade im Abstande 3 parallel der y-Axe, ferner eine Ebene im Abstande -3 parallel der y z-Ebene gelegt. Es soll ein Punkt gefunden werden, dessen Abstände von der Geraden und von der Ebene gleich sind.

h) Welche Flächen werden durch die Gleichungen

$$(x - a)(y - b)(z - c) = 0; \; xyz = 0; \; x^2 - y^2 = 0; \; (x + y)^2 - z^2 = 0;$$
$$x y^2 - 2 p x^2 = 0; \; (x^2 + y^2)^2 - 5(x^2 + y^2) + 4 = 0$$

dargestellt?

II. Ein Punkt P, dessen Coordinaten den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}$$

genügen sollen, muss auf jeder von den Flächen liegen, welche durch die Gleichungen repräsentiert werden, ist also ein Punkt der Schnittlinie beider Flächen. Daher wird durch ein System von zwei Gleichungen eine Linie im Raume ausgedrückt. Insbesondere stellen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x, y) = 0 \\ \psi(x, z) = 0 \end{array}\right\}$$

die Schnittlinie von zwei Cylinderflächen und in den Coordinatenebenen x y, x z die Projectionen derselben vor.

Wird aus den Gleichungen des Systems

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}$$

durch Elimination von z die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

abgeleitet, so wird diese von den gemeinsamen Auflösungen der beiden ersten befriedigt; sie stellt daher eine Cylinderfläche vor, welche die Schnittlinie der durch jene repräsentierten Flächen enthält, und in der xy-Ebene die Projection der Schnittlinie. Auf dieselbe Art gelangt man zu den projicierenden Cylinderflächen und zu den Projectionen in Bezug auf die beiden anderen Projectionsebenen.

Ist das Gesetz für die Lage eines Punktes in Worten ausgesprochen und es sind zwei Gleichungen erforderlich, um dasselbe auszudrücken, so ist der Ort des Punktes eine Linie.

Beispiele und Aufgaben.

a) Das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$$

drückt den Schnitt einer Kugel mit einer durch die z-Axe gehenden, den Winkel $\hat{x}y$ halbierenden Ebene, also einen Kreis im Raume aus, dessen Ebene zu der xy-Ebene senkrecht und der mit dem Radius a um den Nullpunkt beschrieben ist. Durch Elimination von x oder y erhält man die Gleichungen

$$2y^2 + z^2 - a^2 = 0;$$
$$2x^2 + z^2 - a^2 = 0$$

der ihn auf die yz- und xz-Ebene projicierenden Cylinderflächen und zugleich seiner orthogonalen Projectionen auf diese Coordinatenebenen.

b) Einen Punkt P zu finden, welcher gleiche Abstände von den drei Coordinatenebenen hat. Da z, x, y die Abstände von der xy-, yz-, zx-Ebene sind, müssen die Gleichungen

$$z = x \text{ und } z = y$$

oder

$$x - z = 0; \quad y - z = 0$$

bestehen, der Ort des Punktes ist daher eine Gerade, nämlich die Schnittlinie von zwei Ebenen, von welchen die erste durch die y-, die zweite durch die x-Axe geht.

c) Was für eine Linie wird durch die Gleichungen

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - r_1{}^2 = 0;$$
$$(y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - r_2{}^2 = 0$$

sgedrückt. Man leite die Gleichungen ihrer Projectionen auf die xy- und xz-Ebene und untersuche die speciellen Fälle, wenn $b_2 = b_1$; $c_2 = c_1$ oder $b_2 = b_1$; $c_2 = c_1$; werde r_1.

d) Man bestimme die Projection der Linie

$$\left.\begin{array}{r}(y-2)^2+(z-3)^2-1=0\\ x+z-5=0\end{array}\right\}$$

auf die x y-Ebene.

e) Einen Punkt P zu finden, welcher von den drei Ebenen $E_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, l_1)$; $E_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, l_2)$; $E_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, l_3)$ oder von den drei Punkten $P_1(x_1, y_1, z_1)$; $P_2(x_2, y_2, z_2)$; $P_3(x_3, y_3, z_3)$ gleiche Abstände hat.

III. Wenn die Coordinaten eines Punktes P den drei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}f(x, y, z)=0\\ \varphi(x, y, z)=0\\ \psi(x, y, z)=0\end{array}\right|$$

genügen, so liegt der Punkt auf jeder von den drei Flächen, welche durch die Gleichungen repräsentiert sind, ist somit ein Schnittpunkt dieser Flächen. Daher stellt ein System von drei Gleichungen eine Gruppe von Punkten beschränkter Anzahl, nämlich sämmtliche Schnittpunkte der durch die Gleichungen charakterisierten Flächen vor. Die Coordinaten der Schnittpunkte werden durch Auflösung der Gleichungen erhalten.

Ist das Gesetz für die Lage eines Punktes in Worten ausgesprochen, und es sind drei Gleichungen erforderlich, um dasselbe auszudrücken, so existiert nur eine beschränkte Anzahl von Lösungen der Aufgabe.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y-z-8=0\\ x+y+2z-15=0\\ 5x-3y+z-6=0\end{array}\right|$$

bestimmen einen einzigen Punkt $P_0(2, 3, 5)$, weil sie nur eine Auflösung haben.

b) Die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}x^2+y^2-25=0\\ 4y-z=0\\ 3x-z=0\end{array}\right\}$$

repräsentieren die Punkte $P_1(4, 3, 12)$ und $P_2(-4, -3, -12)$.

c) Es soll ein Punkt P gefunden werden, welcher von den Coordinatenebenen und von einem Punkte P_0 gleiche Abstände hat. In diesem Falle werden durch die Beziehung

$$x = y = z = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

drei von einander unabhängige Gleichungen vertreten, welchen zufolge z. B.

$$z^2 = (z - x_0)^2 + (z - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

u. s. w.

d) Die Coordinaten der durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 49 &= 0 \\ x - 3y &= 0 \\ 3y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

repräsentierten Punkte zu berechnen, ferner jener Punkte, welche die Flächen

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 3 &= 0 \\ xy - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

gemein haben.

e) Man bestimme einen Punkt P, welcher von vier Ebenen $E_i\,(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, l_i)$ $i = 1, 2, 3, 4$ oder von vier Punkten $P_i\,(x_i, y_i, z_i)$ gleiche Abstände hat.

IV. Wenn aus zwei Gleichungen

$$f_1\,(x, y, z) = 0;$$
$$f_2\,(x, y, z) = 0$$

durch Multiplication mit den willkürlichen Factoren λ_1, λ_2 und darauffolgende Addition die neue Gleichung

$$\lambda_1 f_1\,(x, y, z) + \lambda_2 f_2\,(x, y, z) = 0$$

combiniert wird, so stellt diese eine Fläche vor, welche durch die Schnittlinie der von den gegebenen Gleichungen repräsentierten Flächen geht. Ist nämlich P_0 ein beliebiger Punkt der Schnittlinie, so hat man

$$f_1\,(x_0, y_0, z_0) = 0;\; f_2\,(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

daher auch

$$\lambda_1 f_1\,(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 f_2\,(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Dividiert man in der combinierten Gleichung durch λ_1 und setzt $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\lambda$, so nimmt sie die Form

$$f_1\,(x, y, z) - \lambda f_2\,(x, y, z) = 0$$

an. Soll die ihr entsprechende Fläche noch durch einen beliebigen Punkt $P_i\,(x_i, y_i, z_i)$ gehen, muss

$$f_1\,(x_i, y_i, z_i) - \lambda f_2\,(x_i, y_i, z_i) = 0$$

sein, woraus

$$\lambda = \frac{f_1(x_1, y_1, z_1)}{f_2(x_1, y_1, z_1)}$$

und durch Einsetzung dieses Wertes

$$f_1(x, y, z) - \frac{f_1(x_1, y_1, z_1)}{f_2(x_1, y_1, z_1)} f_2(x, y, z) = 0$$

oder

$$\frac{f_1(x, y, z)}{f_1(x_1, y_1, z_1)} - \frac{f_2(x, y, z)}{f_2(x_1, y_1, z_1)} = 0$$

als Gleichung einer Fläche folgt, welche durch die Schnittlinie von zwei Flächen und durch einen gegebenen Punkt geht.

Lassen sich für drei Gleichungen

$$f_1(x, y, z) = 0; f_2(x, y, z) = 0; f_3(x, y, z) = 0$$

die Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ derart ermitteln, dass

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) + \lambda_2 f_2(x, y, z) + \lambda_3 f_3(x, y, z) \equiv 0,$$

d. h. dass für jedes Wertsystem x, y, z der Ausdruck links verschwindet (identisch Null wird), so stellen die Gleichungen drei Flächen vor, von welchen jede durch die Schnittlinie der beiden anderen geht; denn es ist in diesem Falle

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) \equiv -\left[\lambda_2 f_2(x, y, z) + \lambda_3 f_3(x, y, z)\right],$$

daher sind die Gleichungen

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) = 0 \text{ und } -\left[\lambda_2 f_2(x, y, z) + \lambda_3 f_3(x, y, z)\right] = 0$$

identisch, also die Gleichung $f_1(x, y, z) = 0$ aus den Gleichungen $f_2(x, y, z) = 0$ und $f_3(x, y, z) = 0$ durch lineare Combination entstanden.

Beispiele und Aufgaben.

a) Wenn man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2x + 21y - 11z - 12 &= 0 \\ 10x - 7y + z - 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

einmal mit Hilfe der Factoren $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, ein anderesmal mittelst der Factoren $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$ linear combiniert, erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2x - 7y + 3z + 2 &= 0 \\ 2x + 133y - 67z - 68 &= 0 \end{aligned}\right\};$$

die von diesen repräsentierten Flächen gehen durch die Schnittlinie der beiden ersten, wovon man sich durch die Substitution der Coordinaten von Punkten, welche auf der Schnittlinie liegen, z. B. $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 3, 5)$ u. s. w. überzeugen kann.

b) Durch die Schnittlinie der Flächen

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0;$$
$$4x^2 + y^2 - 1 = 0$$

geht jede Fläche, deren Gleichung die Form

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 - \lambda(4x^2 + y^2 - 1) = 0$$

hat. Soll aber dieselbe durch den Nullpunkt O (0, 0, 0) gehen, muss

$$-36 + \lambda = 0,$$

also

$$\lambda = 36$$

sein, so dass sich die ganz bestimmte Gleichung

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 - 36(4x^2 + y^2 - 1) = 0$$

ergibt, welche nach Reduction die Form

$$108x^2 + 27y^2 - 4z^2 = 0$$

annimmt.

c) Die Flächen, welche die Gleichungen

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0;$$
$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12 = 0;$$
$$4x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 12 = 0$$

vorstellen, gehen durch dieselbe Linie, denn es ist

$$3(2x^2 + y^2 + z^2 - 4) - 2(x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12) -$$
$$-(4x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 12) = 0.$$

d) Man lege durch die Schnittlinie der Flächen

$$x^2 + y^2 - 2z = 0$$
$$y^2 - z^2 - 4x = 0$$

eine Fläche, die auch durch den Punkt P_1 (1, 1, 1) geht.

e) Man weise nach, dass die Flächen

$$x + y + z + 1 = 0;$$
$$3x + 2y + 5z - 3 = 0;$$
$$4x + 5y + 2z + 10 = 0$$

durch dieselbe Linie gehen und bestimme jene Punkte der letzteren, für welche $x = 0, 1, 2, 3$ ist.

V. Flächen und Linien können in algebraische und transcendente unterschieden werden, je nachdem sie durch algebraische oder transcendente Gleichungen dargestellt sind.

Die Gleichung einer Fläche kann in der unentwickelten Form

$$f(x, y, z) = 0$$

oder in der entwickelten:

$$z = \varphi(x, y); \quad x = \psi(y, z); \quad y = \mu(z, x)$$

gegeben sein, die sich aus der ersten durch Auflösung nach einer der Coordinaten ergibt. Eine algebraische Gleichung heißt geordnet, wenn ein geordneter, ganzer, rationaler Ausdruck der Coordinaten gleich Null gesetzt ist. Kommt darin mindestens ein Glied vor, in welchem die Summe der Exponenten der Coordinaten gleich ist der ganzen positiven Zahl n und kein Glied mit einer größeren Exponentensumme, so ist die Gleichung vom n^{ten} Grade. Sie ist homogen vom Grade n, wenn in jedem Gliede die Summe der Exponenten n beträgt.

Eine algebraische Fläche ist von der n^{ten} Ordnung, wenn ihre Gleichung vom n^{ten} Grade ist.

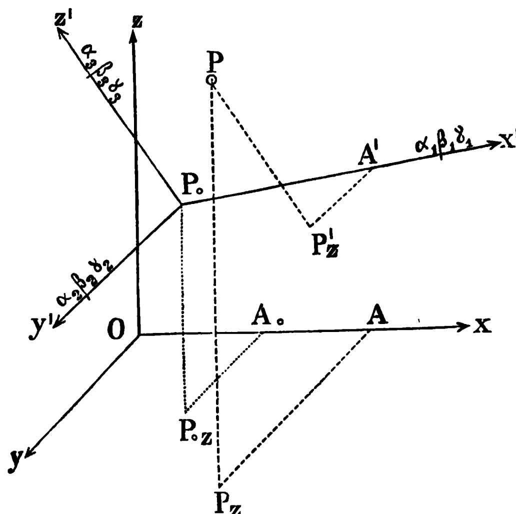
Eine algebraische Linie ist von der n^{ten} Ordnung, wenn sich in ihr zwei Flächen der p^{ten} und q^{ten} Ordnung schneiden, so dass $p \,.\, q = n$ oder, wenn die Flächen außerdem m Geraden gemein haben. $p \,.\, q - m = n$.

22. Transformation der Coordinaten. Eine Fläche oder Linie des Raumes kann auf mehrere Coordinatensysteme bezogen, also durch verschiedene Gleichungen oder Gleichungssysteme dargestellt werden. Je mehr ein Coordinatensystem der Gestalt einer Fläche oder Linie angepasst ist, desto deutlicher müssen deren Eigenschaften in der Gleichung oder dem Gleichungssystem zum Ausdruck gelangen; daher kann der Übergang von einem Coordinatensystem auf ein anderes das Mittel sein, die Eigenschaften einer Fläche oder Linie zu erforschen. Aus der Gleichung einer Fläche in Bezug auf irgend ein Coordinatensystem kann jene in Bezug auf ein anderes, neues, dadurch abgeleitet werden, dass man die alten Coordinaten eines Punktes durch seine neuen ausdrückt und in die Gleichung einsetzt, wodurch sich eine Beziehung zwischen den neuen Coordinaten ergibt. Hiezu muss die Lage des neuen Coordinatensystems zum alten durch entsprechende Bestimmungsstücke präcisiert sein. Der Vorgang führt den Namen »Transformation der Coordinaten«. Im folgenden wird nur der Uebergang von einem rechtwinkeligen auf ein zweites rechtwinkeliges Coordinatensystem behandelt.

In dem Coordinatensystem (x, y, z) (Fig. 102) sei der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ als Nullpunkt eines neuen Coordinatensystems (x', y', z') gegeben, dessen Axen x', y', z' die Richtungscoordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$;

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ haben mögen. Zwischen den letzteren, als den Coordinaten von drei zu einander senkrechten Richtungen, bestehen (Art. 19) die Gleichungen:

Fig. 102.



$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1; \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0;$$
$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1; \quad \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0;$$
$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1; \quad \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = 0;$$

und

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1; \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0;$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1; \quad \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0;$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1; \quad \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 = 0.$$

Ein Punkt P habe die alten Coordinaten x, y, z, die neuen x', y', z'. Die Beziehungen zwischen beiden werden mittelst der Streckenzüge $O A P_z P$ und $O A_0 P_{0z} P_0 A' P'_z P$ gefunden, welche dieselbe Schlusslinie $O P$, also gleiche Projectionen auf irgend eine Gerade haben. Projiciert man dieselben nach und nach auf die x-, y-, z-Axe, so erhält man:

$$OA + 0 + 0 = OA_0 + 0 + 0 + P_0 A' \cos x x' + A' P'_z \cos x y' + \\ + P'_z P \cos x z';$$

$$0 + AP_z + 0 = 0 + A_0 P_{0z} + 0 + P_0 A' \cos y x' + A' P'_z \cos y y' + \\ + P'_z P \cos y z';$$

$$0 + 0 + P_z P = 0 + 0 + P_{0z} P_0 + P_0 A' \cos z x' + A' P'_z \cos z y' + \\ + P'_z P \cos z z'$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= y_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= z_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (28$$

Diese Gleichungen drücken die alten Coordinaten des Punktes P durch die neuen aus. Löst man sie nach x', y', z' auf, indem man x_0, y_0, z_0 auf die linke Seite schafft, mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2 \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ multipliciert und jedesmal addiert, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 (x - x_0) + \beta_1 (y - y_0) + \gamma_1 (z - z_0) \\ y' &= \alpha_2 (x - x_0) + \beta_2 (y - y_0) + \gamma_2 (z - z_0) \\ z' &= \alpha_3 (x - x_0) + \beta_3 (y - y_0) + \gamma_3 (z - z_0) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (28^{I}$$

für den Übergang von dem neuen Coordinatensystem auf das alte.

Specielle Fälle treten ein, wenn die neuen Axen der alten parallel sind oder wenn der neue Nullpunkt in den alten fällt.

Im ersten Falle ist zu unterscheiden, ob die Axen gleichsinnig, zum Theil gleichsinnig oder insgesammt entgegengesetzt parallel sind. Je nachdem $x x' = 0$ oder $x x' = \pi$; $y y' = 0$ oder $y y' = \pi$; $z z' = 0$ oder $z z' = \pi$, ist $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \pm 1$; $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ und die allgemeinen Transformationsgleichungen gehen in

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \pm x' \\ y &= y_0 \pm y' \\ z &= z_0 \pm z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \pm x \mp x_0 \\ y' &= \pm y \mp y_0 \\ z' &= \pm z \mp z_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29^{I}$$

über. Für gleichsinnig parallele Axen gelten die oberen, für insgesammt entgegengesetzt parallele die unteren Vorzeichen. In den übrigen Fällen sind zum Theil die oberen, zum Theil die unteren Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die betreffenden Axen gleichsinnig oder entgegengesetzt parallel sind.

Im zweiten Falle ist $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ und man erhält die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}\right\}; \quad \ldots \ldots \quad (30$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (30^{I}$$

die man auch benützen kann, um die Beziehungen zwischen den Richtungscoordinaten α, β, γ und α', β', γ' einer Richtung in den zwei Coordinatensystemen zu ermitteln. Da hier der neue Nullpunkt nicht in Betracht kommt, sondern bloß die Richtungen der neuen Axen maßgebend sind, ergeben sich diese Beziehungen, wenn man den Punkt P mit dem Einheitspunkte II der Richtung zusammenfallen lässt. Dadurch gehen die Gleichungen 30 und 30^{I} über in

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \alpha' + \alpha_2 \beta' + \alpha_3 \gamma' \\ \beta &= \beta_1 \alpha' + \beta_2 \beta' + \beta_3 \gamma' \\ \gamma &= \gamma_1 \alpha' + \gamma_2 \beta' + \gamma_3 \gamma' \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (31$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_1 \alpha + \beta_1 \beta + \gamma_1 \gamma \\ \beta' &= \alpha_2 \alpha + \beta_2 \beta + \gamma_2 \gamma \\ \gamma' &= \alpha_3 \alpha + \beta_3 \beta + \gamma_3 \gamma \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots \quad (31^{I}$$

Wie man sieht, sind immer die Coordinaten des einen Systems durch die des anderen in linearer Weise ausgedrückt. Der Grad einer algebraischen Gleichung kann daher durch eine Transformation nicht zunehmen. Aber er kann auch nicht abnehmen, indem sich etwa die Glieder mit der höchsten Exponentensumme gegenseitig tilgen. Denn würde man in diesem Falle zurücktransformieren, so müsste der Grad der Gleichung dadurch wieder erhöht werden, was nicht möglich ist.

Wendet man die allgemeinen Transformationsformeln auf die Endpunkte der Strecke $P_1 P_2$ an, so ergibt sich durch Subtraction

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \alpha_1 (x'_2 - x'_1) + \alpha_2 (y'_2 - y'_1) + \alpha_3 (z'_2 - z'_1); \\ y_2 - y_1 &= \beta_1 (x'_2 - x'_1) + \beta_2 (y'_2 - y'_1) + \beta_3 (z'_2 - z'_1); \\ z_2 - z_1 &= \gamma_1 (x'_2 - x'_1) + \gamma_2 (y'_2 - y'_1) + \gamma_3 (z'_2 - z'_1), \end{aligned}$$

demnach

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + \\ + (z'_2 - z'_1)^2,$$

d. h. man erhält immer dieselbe Streckenlänge, ob man dieselbe aus den alten oder aus den neuen Coordinaten berechnet. Damit ist erwiesen, dass die Gestalt einer Fläche oder Linie durch die Transformation ihrer Gleichung nicht geändert wird, weil alle ihre Ausmaßen ungeändert bleiben.

Nach vollführter Transformation einer Gleichung kann man die Strichweiser auch weglassen und sich bloß merken, auf welches System sie nun bezogen ist.

Beispiele und Aufgaben.

a) Der Übergang von dem Coordinatensystem (x, y, z) auf ein neues, dessen Nullpunkt $P_0(5, 2, 3)$ ist und dessen Axen x', y', z' die Richtungen $2 : 3 : 6$; $3 : -6 : 2$; $6 : 2 : -3$ haben, wird mittelst der Transformationsformeln

$$x = 5 + \frac{2}{7} x' + \frac{3}{7} y' + \frac{6}{7} z';$$

$$y = 2 + \frac{3}{7} x' - \frac{6}{7} y' + \frac{2}{7} z';$$

$$z = 3 + \frac{6}{7} x' + \frac{2}{7} y' - \frac{3}{7} z'$$

bewirkt. Die Gleichung

$$13 x^2 + 45 y^2 + 40 z^2 - 24 x y + 36 x z + 12 y z - 190 x + \\ + 96 y - 444 z + 1188 = 0$$

geht nach Einsetzung (Weglassung der Strichweiser) und Reduction über in

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

und zeigt, dass die Fläche ein Kreiscylinder vom Radius $r = 1$ ist, dessen Axe durch $P_0(5, 2, 3)$ geht und die Richtung $6 : 2 : -3$ hat.

Wäre aber die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 - 1 = 0$$

bezogen auf (x', y', z') gegeben, so wird dieselbe auf (x, y, z) transformiert mittelst der Gleichungen

$$x' = \frac{2}{7}(x - 5) + \frac{3}{7}(y - 2) + \frac{6}{7}(z - 3);$$

$$y' = \frac{3}{7}(x - 5) - \frac{6}{7}(y - 2) + \frac{2}{7}(z - 3);$$

$$z' = \frac{6}{7}(x - 5) + \frac{2}{7}(y - 2) - \frac{3}{7}(z - 3).$$

Für eine durch die Richtungscoordinaten $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}$ gegebene Richtung findet man die neuen Richtungscoordinaten

$$\alpha' = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{21};$$

$$\beta' = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} - \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-5}{21};$$

$$\gamma' = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{21};$$

welche der Grundgleichung $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$ genügen.

b) Man transformiere die Gleichung

$$xy - z = 0$$

auf ein Coordinatensystem, welches sich durch die Drehung des alten um die z-Axe ergibt für den Drehungswinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ferner gebe man α, β, γ an, wenn $\alpha' : \beta' : \gamma' = 9 : 6 : 2$.

c) Die Transformationsformeln für den Übergang zu dem Coordinatensystem $P_0(1, 1, 1)$; $x'(4 : 1 : 8)$; $y'(-4 : 8 : 1)$; $z'(-7 : -4 : 4)$ aufzustellen und damit die Gleichung

$$x^2 - y - z + 3 = 0$$

zu transformieren, ferner α', β', γ' anzugeben, wenn $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 4 : 8$.

d) Man transformiere die Gleichung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{44} = 0$$

zu gleichsinnig oder zu entgegengesetzt parallelen Coordinaten mit dem Nullpunkte in P_0.

e) Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

soll auf das Coordinatensystem $O(0, 0, 0)$; $x'(1 : 2 : 2)$; $y'(2 : -2 : 1)$; $z'(2 : 1 : -2)$ transformiert werden.

f) Die Gleichung der Linie anzugeben, nach welcher die Fläche

$$x^2 - y^2 - 2z = 0$$

von der Ebene geschnitten wird, welche durch den Punkt $P_0(0, 0, 1)$ und die Richtungen $x'(2 : 6 : 9)$; $y'(9 : -6 : 2)$ bestimmt ist, und zwar bezogen auf das ebene Coordinatensystem $(x'y')$.

---

2. Abschnitt.

Ebene, Gerade und Punkt.

23. Flächen erster Ordnung. Die Gleichung 1. Grades

$$ax + by + cz + d = 0$$

stellt eine Fläche erster Ordnung vor, deren Beschaffenheit durch

folgende Betrachtung ergründet werden kann. Es sei P_0 ein fester Punkt der Fläche, also

$$a x_0 + b y_0 + c z_0 + d = 0;$$

durch Subtraction ergibt sich

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

und man erkennt, dass die Richtung

$$(x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0)$$

der Verbindungslinie des Punktes P_0 mit einem beliebigen Punkte P der Fläche senkrecht ist zu einer bestimmten, durch das Coëfficientenverhältnis

$$a : b : c$$

gegebenen Richtung; daher liegt P und folglich jeder Punkt der betrachteten Fläche in der mit der Stellung $a : b : c$ durch P_0 gelegten Ebene.

Demnach ist die Fläche erster Ordnung, welche durch die Gleichung

$$a x + b y + c z + d = 0$$

repräsentiert wird, mit einer Ebene identisch, deren Normale die Richtung $a : b : c$ oder die Richtungscoordinaten

$$\alpha = \frac{a}{\rho}; \ \beta = \frac{b}{\rho}; \ \gamma = \frac{c}{\rho}$$

$$(\rho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$$

besitzt.

Ferner ist

$$d = -(a x_0 + b y_0 + c z_0) = -\rho(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0),$$

also, weil $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$ die Projection $O P_n$ des Streckenzuges $O A_0 P_{0z} P_0$ oder seiner Schlusslinie $O P_0$ auf die in den Nullpunkt verlegte Normale vorstellt (vgl. Art. 17)

$$d = -\rho \, . \, O P_n = \rho \, . \, P_n O = \rho \, l$$

und

$$l = \frac{d}{\rho}.$$

Man verschafft sich demnach die Bestimmungsstücke α, β, γ, l einer Ebene, indem man die Coëfficienten a, b, c, d ihrer Gleichung durch $\rho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dividiert; die Gleichung

$$t = \alpha x + \beta y + \gamma z + l$$

für den Abstand eines Punktes von einer Ebene geht über in

$$t = \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{E}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32$$

Die Richtung $a : b : c$ der Normalen gibt auch die positive Seite der Ebene an.

Sind mehrere Ebenen voneinander zu unterscheiden, sollen dieselben mit $E_1, E_2, \ldots E_i, \ldots$ bezeichnet werden, wenn sie durch die Gleichungen $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \ldots a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0, \ldots$ dargestellt erscheinen und für diese sollen auch die Abkürzungen $E_1 = 0$, $E_2 = 0, \ldots E_i = 0, \ldots$ in Anwendung kommen. Die Substitution der Coordinaten des Punktes P_k in das Polynom E_i möge symbolisch durch E_{ik} ausgedrückt werden. Je nachdem $E_{ik} = 0$ oder $E_{ik} \gtrless 0$, liegt der Punkt P_k auf der Ebene E_i oder er liegt nicht darauf.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$3x + 2y + 6z - 35 = 0$$

stellt eine Ebene der Stellung $3 : 2 : 6$ vor. Man findet $l = P_n O = -\frac{35}{7} = -5$, $O P_n = -l = 5$, kann daher den Punkt P_n der Ebene bestimmen, indem man ihre Normale mit dem Richtungsverhältnis $3 : 2 : 6$ legt, und darauf von O aus 5 aufträgt.

Die Distanzformel ist

$$t = \frac{3x + 2y + 6z - 35}{7}.$$

Die Punkte $P_1 (1, 1, 1)$; $P_2 (3, 2, 6)$; $P_3 (-1, 2, -5)$ haben die Abstände

$$t_1 = \frac{3 + 2 + 6 - 35}{7} = \frac{-24}{7}; \quad t_2 = \frac{9 + 4 + 36 - 35}{7} = 2;$$

$$t_3 = \frac{-3 + 4 - 30 - 35}{7} = -\frac{64}{7},$$

also liegt nur P_2 auf der positiven Seite der Ebene.

Multipliciert man mit -1, so ändert die Gleichung dadurch nur die Form und wird

$$-3x - 2y - 6z + 35 = 0,$$

stellt aber dieselbe Ebene vor. Jedoch ist nun $-3 : -2 : -6$ die positive Normalenrichtung, $l' = \frac{35}{7} = -l$ erhält das entgegengesetzte Vorzeichen und als Distanzformel ergibt sich

$$t' = \frac{-3x - 2y - 6z + 35}{7} = -\frac{3x + 2y + 6z - 35}{7} = -t.$$

b) Man construiere die Normalen und Punkte P_n der Ebenen

$$\pm 12x \pm 3y \pm 4z \pm 52 = 0$$

unter Annahme aller möglichen Vorzeichencombinationen, gebe ihre Distanzformeln an und berechne die Abstände der Punkte P_1 (2, 3, 5); P_2 (0, 0, 3); P_3 (3, 5, 0); P_4 (— 2, — 5, — 1), ferner die Coordinaten der Fußpunkte P_n, P_{it}.

c) Man construiere die Punkte P_n der Ebenen

$$3x + 2y - 6z = 0;\quad 2x - 3y + 5 = 0;\quad 2x - 7z = 0;$$
$$5x - 3 = 0;\quad z - 5 = 0$$

u. s. w. wie sub Aufg. *b*).

24. Verschiedene Formen der Gleichungen von Ebenen. Wenn die Coëfficienten der allgemeinen Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

specielle Werte annehmen oder theilweise Null werden, ferner wenn Ebenen durch besondere Bedingungen gegeben sind, treten besondere Gleichungsformen auf, deren Kenntnis bei den Untersuchungen der analytischen Geometrie vortheilhaft verwertet werden kann.

I. Dividiert man in der Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

durch $\rho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ und bedenkt, dass $\frac{a}{\rho} = \alpha$; $\frac{b}{\rho} = \beta$; $\frac{c}{\rho} = \gamma$; $\frac{d}{\rho} = l$ (Art. 23), so nimmt sie die Form

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + l = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (33$$

an, welche die Normalform genannt wird und eine wichtige Rolle spielt. Sie spricht aus, dass jeder Punkt, welcher auf der Ebene liegt, von dieser den Abstand Null hat. Liegt aber ein Punkt nicht auf der Ebene, so ergibt sich durch Substitution seiner Coordinaten in das Gleichungspolynom eine von Null verschiedene Zahl, welche den senkrechten Abstand des Punktes von der Ebene darstellt.

Die Gleichungen der Ebenen E_1, E_2, . . . E_i, . . . in der Normalform mögen künftig abgekürzt durch $N_1 = 0$; $N_2 = 0$; . . . $N_i = 0$; . . . dargestellt werden, so dass $N_i = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + l_i = \frac{E_i}{\rho_i}$; $N_{ik} = \frac{E_{ik}}{\rho_i}$.

II. Wenn Coëfficienten der allgemeinen Gleichung verschwinden, ergeben sich specielle Formen, die keiner näheren Erläuterung bedürfen.

$a x + b y + c z = 0$; Ebene durch den Nullpunkt;

$$\left.\begin{matrix} a x + b y + d = 0 \\ b y + c z + d = 0 \\ a x + c z + d = 0 \end{matrix}\right\};\ \text{Ebene parallel der Axe} \left\{\begin{matrix} z. \\ x, \\ y; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} a x + b y = 0 \\ b y + c z = 0 \\ a x + c z = 0 \end{matrix}\right\};\ \text{Ebene durch die Axe} \left\{\begin{matrix} z. \\ x, \\ y; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} a x + d = 0 \\ b y + d = 0 \\ c z + d = 0 \end{matrix}\right\};\ \text{Ebene parallel der Ebene} \left\{\begin{matrix} y z, \\ z x, \\ x y; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\};\ \text{die Coordinatenebene} \left\{\begin{matrix} y z, \\ z x, \\ x y; \end{matrix}\right.$$

Anmerkung. Ist $a = b = c = 0$; $d \gtrless 0$, so ist $\rho = 0$ und $l = \frac{d}{\rho} = \frac{d}{0} = \infty$, mithin die Ebene in das Unendliche gerückt. Die unendlich ferne Ebene des Raumes wird also durch die paradox scheinende Gleichungsform

$$d = 0 \text{ (Constante} = 0)$$

dargestellt, die man aber zu

$$0 . x + 0 . y + 0 . z + d = 0$$

vervollständigt denken kann, um zu erkennen, dass ihr nur unendlich große Coordinatenwerte genügen können. Als Übergang kann man sich zuerst a, b, c gegen d sehr klein vorstellen.

III. Die Gleichung einer durch den Punkt P_0 und die Richtungen $g_1 (a_1 : b_1 : c_1)$; $g_2 (a_2 : b_2 : c_2)$ gegebenen Ebene wird mit Hilfe des Satzes erhalten, dass die Determinante aus den Richtungscomponenten von drei Richtungen einer Stellung verschwindet (Art. 20). Ist nämlich P ein beliebiger Punkt der Ebene und $g [(x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0)]$ die Richtung der Verbindungslinie $P_0 P$, so gehören die Richtungen g, g_1, g_2 einer Stellung an, daher ist

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (34$$

die Gleichung, welche dieses, mithin auch ausspricht, dass P in der auf die angegebene Art bestimmten Ebene liegt. Sie stellt demnach diese Ebene vor.

IV. Wenn eine Ebene durch die Punkte P_1, P_2 und die Richtung $g_0 (a_0 : b_0 : c_0)$ bestimmt ist, sind die Richtungen $(x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1)$ der Verbindungslinie von P_1 mit einem beliebigen Punkte P der Ebene, $(x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$ der Geraden $P_1 P_2$ und die Richtung g_0 in einer und derselben Stellung enthalten, mithin wird die Ebene durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35$$

ausgedrückt.

V. Nimmt man in der Verbindungsebene der drei Punkte P_1, P_2, P_3 einen beliebigen Punkt P an, so gehören die Richtungen

$$(x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1); \quad (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1);$$
$$(x_3 - x_1) : (y_3 - y_1) : (z_3 - z_1)$$

einer Stellung an, demnach ist die Gleichung der Ebene:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36$$

Sie drückt aus (Art. 18, II), dass das Volum des Tetraeders $P P_1 P_2 P_3$ verschwindet und kann demzufolge auch in der Form

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36^{I}$$

dargestellt werden.

VI. Schneidet eine Ebene auf den Coordinatenaxen die Stücke a, b, c ab, so geht sie durch die Punkte P_1 (a, 0, 0); P_2 (0, b, 0); P_3 (0, 0, c). Mithin ist ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man in der Determinante die erste Colonne durch a, die zweite durch b, die dritte durch c dividiert,

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & \frac{z}{c} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile erhält man

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37$$

VII. Eine Ebene sei gegeben durch den Punkt P_0 und die Richtung $(a : b : c)$ ihrer Normalen. Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene, so sind die Richtungen $(x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0)$ und $a : b : c$ senkrecht zu einander und die Gleichung

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (38$$

welche dieses ausspricht, stellt die Ebene vor.

VIII. Die Gleichung einer Ebene in der entwickelten Form

$$z = mx + ny + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39$$

kann in den Formen

$$mx + ny - z + c = 0;$$

$$\frac{x}{\left(-\frac{c}{m}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{c}{n}\right)} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

dargestellt werden, von welchen die erste zeigt, dass $m : n : -1$ die Normalenrichtung der Ebene; die zweite, dass c ihr Abschnitt auf der z-Axe ist. Das letztere sieht man auch direct durch die Substitution $x = y = 0$ ein.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Normalformen der Gleichungen

$$x + y + z - 3 = 0;$$
$$2x + 5y - 10z = 0$$

sind

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z - \sqrt{3} = 0;$$
$$\frac{2}{\sqrt{129}}x + \frac{5}{\sqrt{129}}y - \frac{10}{\sqrt{129}}z = 0.$$

b) Die Ebene

$$3x - y - 5z = 0$$

geht durch den Nullpunkt und hat die Stellung $3 : -1 : -5$.

Die Ebenen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0; \ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0; \ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} - 1 = 0$$

sind den Axen z, x, y parallel; die erste schneidet auf den Axen x, y die Stücke a, b; die zweite auf den Axen y, z die Stücke b, c; die dritte auf den Axen z, x die Stücke c, a ab.

Die Ebenen

$$x = 3;\ y = -5;\ z = 1$$

sind den Coordinatenebenen y z, z x, x y in den Abständen 3, — 5, 1 parallel.

c) Die Ebene, welche den Punkt P_0 (2, 3, 5) und die Richtungen g_1 (1 : 1 : 2); g_2 (3 : 1 : 4) enthält, hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

welche durch Entwicklung und Reduction die Form

$$x + y - z = 0$$

annimmt.

d) Die durch die Punkte P_1 (1, 1, 1); P_2 (3, 5, 7) und die Richtung g_0 (2 : 2 : 3) bestimmte Ebene hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt und reduciert:

$$3y - 2z - 1 = 0.$$

e) Die Ebene der drei Punkte P_1 (— 1, 2, — 3); P_2 (3, — 5, 1); P_3 (4, 1, — 2) wird durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 4 & -7 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ausgedrückt, welche durch Entwicklung und Reduction die Form

$$3x - 16y - 31z - 58 = 0$$

erhält.

f) Die Ebene, welche auf den Coordinatenaxen die Stücke a = 1; b = — 1; c = — 1 abschneidet, hat die Gleichung

$$x - y - z - 1 = 0.$$

g) Die durch den Punkt P_0 (5, 1, 1) und die Stellung 1 : 1 : 5 bestimmte Ebene hat die Gleichung

$$(x-5) + (y-1) + 5(z-1) = 0$$

oder

$$x + y + 5z - 11 = 0.$$

h) Wenn eine Ebene auf der z-Axe das Stück — 3 abschneiden und die Stellung 5 : 3 : 7 oder $-\frac{5}{7} : -\frac{3}{7} : -1$ haben soll, lautet ihre Gleichung in entwickelter Form

$$z = -\frac{5}{7}x - \frac{3}{7}y - 3.$$

i) Man stelle die Gleichung der Ebene auf, welche

α) durch den Nullpunkt geht und die Richtungen $1:1:1$; $1:-1:1$ oder die Punkte $P_1(3, 1, 4)$; $P_2(4, 1, 3)$ enthält;

β) durch den Punkt $P_1(5, -3, -2)$ geht und die Richtungen $2:3:6$; $1:2:2$ oder noch den Punkt $P_2(1, 1, 1)$ und die Richtung $2:1:3$ enthält;

γ) die drei Punkte $P_1(3, 2, 5)$; $P_2(3, -3, 4)$; $P_3(-5, 1, 2)$ verbindet;

δ) auf den Axen die Stücke $3, -5, -8$ abschneidet;

ε) durch den Punkt $P_0(1, 3, 2)$ geht und die Stellung $1:1:1$ hat oder auf der x- und z-Axe die Stücke $a = 5$, $b = 8$ abschneidet.

25. Winkel von zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Ebenen. Der Winkel, welchen die positiven Richtungen der Normalen n_1 und n_2 zweier Ebenen bilden, ist gleich dem Winkel der Ebenen selbst. Sind daher

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0;$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen, also $a_1 : b_1 : c_1$; $a_2 : b_2 : c_2$ die Richtungsverhältnisse ihrer Normalen, so findet man (Art. 14)

$$\cos n_1 n_2 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\rho_1 \rho_2};$$

$$\sin^2 n_1 n_2 = \frac{1}{\rho_1{}^2 \rho_2{}^2} \left\{ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \right\}$$

$$(\rho_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2},\ i = 1,\ 2).$$

Specielle Fälle treten ein, wenn die Ebenen zu einander senkrecht oder parallel sind.

Im ersten Falle ist $\cos n_1 n_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, also

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$

im zweiten $\sin n_1 n_2 = \sin 0 = 0$, demnach

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2};$$

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2,$$

was auch direct eingesehen werden kann.

Setzt man

$$a_2 = m\,a_1;\quad b_2 = m\,b_1;\quad c_2 = m\,c_1,$$

so geht die Gleichung

$$a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0$$

nach Division mit m über in

$$a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + \frac{d_2}{m} = 0,$$

d. h. Gleichungen paralleler Ebenen können auf die Form gebracht werden, dass sie sich nur durch die constanten Glieder ihrer Polynome unterscheiden.

Beispiele und Aufgaben.

a) Bei den Ebenen

$$3x + 5y + 2z + 5 = 0,$$
$$2x - 3y - z - 3 = 0$$

ist

$$\cos n_1 n_2 = \frac{6 - 15 - 2}{\sqrt{38 \,.\, 14}} = -\frac{11}{2\sqrt{19 \,.\, 7}};$$

$$\sin^2 n_1 n_2 = \frac{1}{38 \,.\, 14}\left[\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}^2\right] =$$

$$= \frac{411}{4 \,.\, 19 \,.\, 7};\quad \sin n_1 n_2 = \frac{\sqrt{411}}{2\sqrt{19 \,.\, 7}}.$$

b) Wenn die Ebenen

$$8x + 4y + z - 5 = 0;$$
$$ax + 4y + 8z - 3 = 0$$

zu einander senkrecht sein sollen; muss

$$8a + 16 + 8 = 0, \text{ also } a = -3$$

sein.

c) Man berechne Cosinus und Sinus des Winkels der Ebenen

$$3x + 5y \qquad - 7 = 0;$$
$$7y - 3z - 2 = 0.$$

d) Durch den Punkt P_0 soll eine Ebene parallel der Ebene

$$ax + by + cz + d = 0$$

gelegt werden.

e) Zu der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0$$

soll eine parallele Ebene derart gelegt werden, dass der Punkt P_0 den Abstand t_0 von ihr habe.

f) Eine Ebene schneide auf den Coordinatenaxen die Stücke $a = \frac{9}{2}$; $b = \frac{9}{5}$; $c = \frac{9}{7}$ ab; man lege durch die Punkte $P_1(-1, 3, -5)$; $P_2(1, -3, 5)$ dazu parallele Ebenen und ermittle deren Abstand von einander.

g) In welcher Beziehung stehen die Ebenen

$$a x + b y + c z + d \pm k = 0$$

zu der Ebene

$$a x + b y + c z + d = 0?$$

h) Man stelle die Gleichung der Mittelebene von zwei parallelen Ebenen auf.

26. Die Gerade. Eine Gerade kann als Schnittlinie von zwei Ebenen angesehen werden und bedarf demnach für ihre analytische Darstellung eines Systems von zwei Gleichungen. Je nach den Bedingungen, welche die Gerade bestimmen, ergeben sich verschiedene Formen des Systems.

I. Die Gerade als Schnittlinie der Ebenen

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40$$

ist senkrecht zu den Normalenrichtungen $a_1 : b_1 : c_1$; $a_2 : b_2 : c_2$ derselben. hat also die Richtung (Art. 16)

$$a : b : c = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41$$

Sind die Ebenen parallel zu zwei Coordinatenaxen, so projicieren sie die Gerade auf zwei Coordinatenebenen und ihre Gleichungen stellen in diesen die Projectionen der Geraden vor. So sind z. B. die Ebenen

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y \qquad\quad + d_1 = 0 \\ a_2 x \qquad\quad + c_2 z + d_2 = 0 \end{array}\right\}$$

parallel der z- und y-Axe und die Gleichungen stellen zugleich die Projectionen ihrer Schnittlinie auf die xy- und xz-Ebene vor; die Gerade hat die Richtung

$$a : b : c = b_1 c_2 : -a_1 c_2 : -a_2 b_1.$$

Manchmal werden die Projectionen einer Geraden auch durch Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{array}{l} y = \mu x + m \\ z = \nu x + n \end{array}\right\};$$

dargestellt. Dann ist

$$a : b : c = 1 : \mu : \nu.$$

II. Wenn eine Gerade durch den Punkt P_0 geht und die Richtung a : b : c hat, sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes P derselben, der von P_0 den Abstand r hat (Art. 11),

$$x = x_0 + r\frac{a}{\rho}; \quad y = y_0 + r\frac{b}{\rho}; \quad z = z_0 + r\frac{c}{\rho}.$$

Indem man aus je zwei von diesen Gleichungen $\frac{r}{\rho}$ eliminiert, erhält man das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x_0}{a} - \frac{y-y_0}{b} = 0 \\ \frac{x-x_0}{a} - \frac{z-z_0}{c} = 0 \end{aligned}\right\}$$

der Geraden, welches aber gewöhnlich in der gefälligeren Form

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad \ldots \ldots \text{(42}$$

dargestellt wird. Fällt P_0 in den Nullpunkt, so wird

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \ldots \ldots \text{(42}^{\text{I}}$$

das Gleichungssystem der Geraden.

III. Die Verbindungslinie der Punkte P_1 und P_2 hat das Richtungsverhältnis $(x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$; folglich wird die Parallele derselben durch P_0 durch das Gleichungssystem (II)

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_0}{y_2-y_1} = \frac{z-z_0}{z_2-z_1} \quad \ldots \ldots \text{(43}$$

repräsentiert. Lässt man P_0 mit P_1 zusammenfallen, so wird die Parallele identisch mit der Verbindungslinie $P_1 P_2$, daher

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \ldots \ldots \text{(44}$$

das Gleichungssystem der letzteren. Eine Parallele durch O zu der Geraden $P_1 P_2$ ist durch das System

$$\frac{x}{x_2-x_1} = \frac{y}{y_2-y_1} = \frac{z}{z_2-z_1}$$

dargestellt.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gerade

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z - 3 = 0 \\ x + 5y + 3z - 7 = 0 \end{aligned}\right\}$$

hat die Richtung

$$a:b:c = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 : -5 : 7.$$

b) Die Gerade, welche durch den Punkt $P_0(2, 5, 3)$ geht und die Richtung $4:2:3$ hat, wird durch das Gleichungssystem

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{3}$$

repräsentiert. Die Gleichungen

$$2x - 4y + 16 = 0;$$
$$3x - 4z + 6 = 0;$$
$$3y - 2z - 9 = 0$$

stellen ihre Projectionen auf die Coordinatenebenen vor.

c) Man gebe die Richtungen der Geraden

$$\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ y+z=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y+z=0 \\ z+x=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} z+x=0 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix} y = \frac{3}{5}x + 3 \\ z = \frac{4}{5}x - 2 \end{matrix}\right\}$$

und ihre Projectionen auf die Coordinatenebenen an.

d) Durch den Punkt $P_0(3, 7, 2)$ sollen Geraden gelegt werden, welche den Normalen und der Schnittlinie der Ebenen

$$x + y + z = 0;$$
$$2x + y + 3z - 5 = 0$$

parallel sind.

27. Senkrechter Abstand zweier Geraden von einander. Die Strecke zwischen den Punkten, in welchen zwei einander nicht schneidende Geraden von einer zu beiden Senkrechten getroffen werden, gibt deren senkrechten Abstand an. Die Normalenrichtung der durch eine Gerade gehenden, zu der zweiten parallelen Ebene ist zu beiden Geraden senkrecht. Jene Normale, welche den Schnittpunkt der ersten Geraden mit der orthogonalen Projection der zweiten auf diese Ebene enthält, schneidet beide Geraden, daher ist auf ihr deren senkrechter Abstand zu messen; er ist offenbar gleich dem Abstande eines beliebigen Punktes der zweiten Geraden von der Ebene.

Wenn die Geraden g_1, g_2 durch die Punkte P_1, P_2 und die Richtungscoordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gegeben sind und man legt

durch P_1 die zu g_2 Parallele g'_2, so bestimmen g_1 und g'_2 eine zu g_2 parallele Ebene, deren Gleichung (Art. 24, III) in der Form

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt werden kann; dabei ist

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 = \sin^2 g_1 g_2,$$

also die Distanzformel

$$t = \frac{1}{\sin g_1 g_2} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man die Coordinaten des Punktes P_2 ein und bezeichnet mit p den gesuchten senkrechten Abstand, so wird

$$p = \frac{1}{\sin g_1 g_2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}; \quad . \quad . \quad . \quad (45$$

diese Formel wird unbrauchbar, wenn die Geraden parallel sind; in diesem Falle ist ihr Abstand gleich jenem eines beliebigen Punktes der einen Geraden von der zweiten. (Art. 15).

Beispiele und Aufgaben.

a) Es seien zwei Geraden g_1 und g_2 gegeben, welche durch die Punkte P_1 (9, 10, — 3); P_2 (2, 6, 10) gehen und die Richtungen 4 : 7 : — 4; 4 : 1 : — 1 haben.

Die zu g_2 parallele Ebene durch g_1 hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x - 9 & y - 10 & z + 3 \\ 4 & 7 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$x + 4y + 8z - 25 = 0,$$

mit der Distanzformel

$$t = \frac{x + 4y + 8z - 25}{9};$$

demnach ist

$$p = \frac{2 + 4 \cdot 6 + 8 \cdot 10 - 25}{9} = \frac{81}{9} = 9.$$

b) Man berechne den Abstand der Geraden, welche durch die Punkte P_1 (4, 5, 1); P_2 (13, 5, 12) und die Richtungen 2 : 3 : 6; 4 : 3 : 3 bestimmt sind.

c) Man bestimme den senkrechten Abstand der durch den Punkt P_0 (1, 7, — 5) und die Richtung 3 : — 4 : 12 gegebenen Geraden g_0 von der z-Axe direct oder mit Hilfe der Projection von g_0 auf die x y-Ebene.

d) Durch die Geraden der Aufgaben *a*), *b*), *c*), lege man jene Ebenen, auf deren Schnittlinie der senkrechte Abstand gemessen wird.

28. Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen. Die Aufgabe, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen, soll auf die beiden Fälle beschränkt werden, dass die Gerade durch einen Punkt und die Richtung oder durch zwei Punkte, die Ebene durch ihre Gleichung gegeben ist.

I. Die Gerade g_i gehe durch den Punkt P_i und habe die Richtungscoordinaten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Die Gleichung der Ebene E_k sei

$$a_k x + b_k y + c_k z + d_k = 0.$$

Ist r der Abstand des Treffpunktes P_s von P_i, so hat dieser als Punkt der Geraden die Coordinaten $x_s = x_i + r\alpha_i$; $y_s = y_i + r\beta_i$; $z_s = z_i + r\gamma_i$. Als Punkt der Ebene aber muss er durch seine Coordinaten deren Gleichung befriedigen; dadurch erhält man die Gleichung

$$a_k(x_i + r\alpha_i) + b_k(y_i + r\beta_i) + c_k(z_i + r\gamma_i) + d_k = 0,$$

aus welcher man

$$r = -\frac{a_k x_i + b_k y_i + c_k z_i + d_k}{a_k \alpha_i + b_k \beta_i + c_k \gamma_i} = -\frac{E_{ik}}{\varepsilon_{ik}} \quad . \quad . \quad . \quad (46$$

findet, wenn man zur Abkürzung Zähler und Nenner durch die leicht verständlichen Symbole E_{ik} und ε_{ik} darstellt. Mit Benützung dieses Wertes ergibt sich nun

$$x_s = y_i - \frac{E_{ik}}{\varepsilon_{ik}} \alpha_i; \quad y_s = y_i - \frac{E_{ik}}{\varepsilon_{ik}} \beta_i; \quad z_s = z_i - \frac{E_{ik}}{\varepsilon_{ik}} \gamma_i.$$

II. Um den Schnittpunkt P_s der Geraden $P_1 P_2$ mit der durch ihre Gleichung gegebenen Ebene E_0 zu ermitteln, nimmt man an, derselbe habe in Bezug auf P_1 und P_2 das Theilverhältnis λ. Dann sind seine Coordinaten

$$x_s = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}; \quad y_s = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}; \quad z_s = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}.$$

Weil aber P_s auch auf der Ebene liegt, müssen die Coordinaten x_s, y_s, z_s der Gleichung $E_0 = 0$ genügen; man erhält also

$$a_0 \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + b_0 \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} + c_0 \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda} + d_0 = 0$$

und daraus

$$\lambda = \frac{a_0 x_1 + b_0 y_1 + c_0 z_1 + d_0}{a_0 x_2 + b_0 y_2 + c_0 z_2 + d_0} = \frac{E_{01}}{E_{02}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47$$

demnach durch Einsetzung dieses Wertes und Wegschaffung der Theilbrüche:

$$x_s = \frac{E_{02} x_1 - E_{01} x_2}{E_{02} - E_{01}}; \quad y_s = \frac{E_{02} y_1 - E_{01} y_2}{E_{02} - E_{01}}; \quad z_s = \frac{E_{02} z_1 - E_{01} z_2}{E_{02} - E_{01}}.$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gerade g_i sei durch den Punkt $P_i(2, 1, 1)$ und die Richtung $10 : 23 : -10$, die Ebene E_k durch ihre Gleichung $x + 2y + 2z - 8 = 0$ gegeben. Wenn der Schnittpunkt P_s von P_i den Abstand r hat, ist

$$x_s = 2 + \frac{10}{27} r; \quad y_s = 1 + \frac{23}{27} r; \quad z_s = 1 - \frac{10}{27} r.$$

Durch Einsetzung folgt

$$\left(2 + \frac{10}{27} r\right) + 2\left(1 + \frac{23}{27} r\right) + 2\left(1 - \frac{10}{27} r\right) - 8 = 0,$$

$$r = -\frac{9}{2},$$

also

$$x_s = 2 - \frac{10}{27} \cdot \frac{9}{2} = \frac{1}{3}; \quad y_s = 1 - \frac{23}{27} \cdot \frac{9}{2} = -\frac{17}{6};$$

$$z_s = 1 + \frac{10}{27} \cdot \frac{9}{2} = \frac{8}{3}.$$

b) Die Verbindungslinie der Punkte $P_1(-2, -3, -1)$ und $P_2(1, 3, 2)$ schneidet die Ebene $x + y + z = 0$ in dem Punkte P_s, der in Bezug auf P_1 und P_2 das Theilverhältnis λ habe und dessen Coordinaten

$$x_s = \frac{-2 - \lambda}{1 - \lambda}; \quad y_s = \frac{-3 - 3\lambda}{1 - \lambda}; \quad z_s = \frac{-1 - 2\lambda}{1 - \lambda}$$

sind. Durch Einsetzung findet man nach Weglassung des Factors $\frac{1}{1 - \lambda}$

$$-2 - \lambda - 3 - 3\lambda - 1 - 2\lambda = 0;$$

$$\lambda = -1,$$

d. h. die Strecke $P_1 P_2$ wird von der Ebene halbiert.

c) Die Coordinaten der Punkte zu berechnen, in welchen die Ebene

$$6x + 3y + 2z - 12 = 0$$

von der zu ihr senkrechten Geraden aus dem Nullpunkte oder aus dem Punkte P_0 (1, 1, 1), ferner von der aus P_0 mit der Richtung 25 : 10 : 2 ausgehenden Geraden, endlich von der Verbindungslinie der Punkte P_1 (3, 5, 4) und P_2 (— 3, — 1, 5) getroffen wird.

d) Man gebe die Coordinaten der Punkte an, in welchen die Ebene

$$a x + b y + c z + d = 0$$

von den Coordinatenaxen geschnitten wird.

29. Schnittpunkt von drei Ebenen. Die Coordinaten des Schnittpunktes P_s von drei Ebenen, welche durch ihre Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0; \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_4 \quad\;\; b_4 \quad\;\; c_4 \quad\;\; d_4 \end{array}$$

gegeben sind, müssen diesen genügen, sind also deren gemeinsame Auflösungen. Mittelst der darunter gesetzten Hilfscoëfficienten a_4, b_4, c_4, d_4 findet man

$$x_s = \frac{A_4}{D_4}; \quad y_s = \frac{B_4}{D_4}; \quad z_s = \frac{C_4}{D_4} \quad \ldots\ldots \quad (48$$

Der Strahl OP_s aus dem Nullpunkte nach dem Schnittpunkte hat das Richtungsverhältnis

$$x_s : y_s : z_s = A_4 : B_4 : C_4.$$

Hier sind folgende Fälle zu beachten:

1. $D_4 \gtrless 0$. Die Coordinaten des Schnittpunktes haben endliche Werte, P_s liegt im endlichen Bereiche; die Schnittlinien der Ebenen bilden ein Dreikant mit der Spitze (Mittelpunkt) in P_s.

2. $D_4 = 0$, A_4, B_4, C_4 nicht oder nicht alle zugleich Null. Dann sind alle Coordinaten oder wenigstens eine von ihnen unendlich groß: der Schnittpunkt liegt im Unendlichen, und zwar nach der Richtung $A_4 : B_4 : C_4$. Die Schnittlinien der Ebenen sind parallel (schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte). In der That findet, wenn man die Unterdeterminanten von D_4 mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \ldots$ bezeichnet, wegen $D_4 = 0$ die Beziehung $\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{b}_1 : \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}_2 : \mathfrak{b}_2 : \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{a}_3 : \mathfrak{b}_3 : \mathfrak{c}_3$ statt, womit ausgesprochen ist, dass die Schnittlinien dieselbe Richtung haben (vgl. Art, 26, I und I. Th. Art. 16, *g*).

3. $D_4 = 0$ und zugleich $A_4 = B_4 = C_4 = 0$. Dann nehmen die Coordinatenwerte die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, der Schnittpunkt wird unbestimmt. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die drei Ebenen

durch eine Gerade gehen oder wenn alle drei zusammenfallen. Gehen sie durch eine Gerade, so kann jeder Punkt dieser Geraden als gemeinsamer Punkt angesehen werden; dabei können auch die drei Ebenen parallel sein oder es fallen zwei zusammen, während die dritte zu ihnen parallel ist (die gemeinsame Schnittlinie ist dann eine unendlich ferne Gerade). Sind die drei Ebenen in einer Ebene vereinigt, so kann jeder Punkt der letzteren als Schnittpunkt betrachtet werden.

Beispiele und Aufgaben.

a) Für den Schnittpunkt der Ebene

$$\begin{array}{l} x + y + z - 6 = 0; \\ 5x - 2y - z + 2 = 0; \\ 3x - y + 2z - 7 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_4 \quad b_4 \quad c_4 \quad d_4 \end{array}$$

findet man

$$A_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -17; \quad B_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -34;$$

$$C_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -51; \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -17,$$

daher

$$x_s = 1; \; y_s = 2; \; z_s = 3.$$

b) Damit die Ebenen

$$\begin{array}{l} 2x + y + 3z - 2 = 0; \\ x + y + 2z - 4 = 0; \\ 3x + 5y + tz - 2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_4 \quad b_4 \quad c_4 \quad d_4 \end{array}$$

einen unendlich fernen Schnittpunkt, also parallele Schnittlinien haben, muss

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & t \end{vmatrix} = t - 8 = 0$$

und

$$t = 8$$

sein.

c) Man bestimme den Schnittpunkt der Ebenen, welche durch die Punkte P_1 (1, 3, 2); P_2 (— 1, 3, 2); P_3 (1, 3, — 2) gehen und die Stellungen 1 : 2 : 2; 2 : 2 : 1; 2 : 1 : 2 haben.

d) Unter welcher Bedingung haben die Ebenen

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 5 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-5 \\ 4 & 1 & 3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

parallele Schnittlinien?

e) Man bestimme t und ω derart, dass die Ebenen

$$\begin{aligned} 2x + y + z - 3 &= 0; \\ x + 3y + 5z - 2 &= 0; \\ tx + 2y + 3z + \omega &= 0 \end{aligned}$$

durch eine Gerade gehen.

30. Vier Ebenen eines Punktes. Wenn die vier Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 \quad \ldots \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= 0; \\ E_2 \quad \ldots \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= 0; \\ E_3 \quad \ldots \quad a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 &= 0; \\ E_4 \quad \ldots \quad a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 &= 0 \end{aligned}$$

durch einen und denselben Punkt gehen sollen, können deren Gleichungen nicht von einander unabhängig sein, sondern es muss zwischen den Coëfficienten derselben eine Beziehung bestehen; zu dieser gelangt man durch die Erwägung, dass die Coordinaten des Schnittpunktes von drei Ebenen der Gleichung der vierten genügen müssen. Der Schnittpunkt der Ebenen E_1, E_2, E_3 z. B. hat, wenn man die Coëfficienten der vierten Gleichung zu Hilfe nimmt, die Coordinaten

$$x_s = \frac{A_4}{D_4}; \quad y_s = \frac{B_4}{D_4}; \quad z_s = \frac{C_4}{D_4}.$$

Setzt man dieselben in die vierte Gleichung ein, so folgt

$$a_4 \frac{A_4}{D_4} + b_4 \frac{B_4}{D_4} + c_4 \frac{C_4}{D_4} + d_4 \frac{D_4}{D_4} = 0,$$

oder

$$a_4 A_4 + b_4 B_4 + c_4 C_4 + d_4 D_4 = 0$$

und, weil der Ausdruck links die Entwicklung der Determinante aus den Coëfficienten aller vier Gleichungen nach der vierten Zeile darstellt.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49$$

als Bedingung dafür, dass die vier Ebenen durch einen und denselben Punkt gehen.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Ebenen

$$\begin{aligned} x + y + z + 1 &= 0; \\ 2x + y + z + 1 &= 0; \\ x + 3y + z + 1 &= 0; \\ 2x - y + z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

gehen durch einen Punkt, weil

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Man zeige, dass die Ebenen

$$\begin{aligned} x + y \qquad + 1 &= 0; \\ y + z - 5 &= 0; \\ 2x \qquad + 3z - 1 &= 0; \\ x + 8y - 3z - 8 &= 0 \end{aligned}$$

durch einen Punkt gehen.

c) Wie groß muss t sein, damit die vier Ebenen

$$2x + y + t = 0;\; y - 3z = 0;\; 4x + z + 3 = 0;\; x + y + z = 0$$

oder

$$x - y = 0;\; tx + y + 2z - 1 = 0;\; x - 2ty - 2z = 0;$$
$$x + y + 3z + 1 = 0$$

durch einen Punkt gehen?

d) Man bestimme m derart, dass die Ebene der Punkte O; $P_1(1, 1, 1)$; $P_2(2, 0, m)$ den Schnittpunkt der Ebenen

$$x - z = 0;\; x + y - 5 = 0;\; x - y - 3 = 0$$

enthalte.

31. Eckpunkte, Volum, Seitenflächen und Oberfläche des von vier Ebenen bestimmten Tetraëders. Die Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 \ldots a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= 0; \\ E_2 \ldots a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= 0; \\ E_3 \ldots a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 &= 0; \\ E_4 \ldots a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmen ein Tetraeder, dessen Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 den gegenüberliegenden Seitenflächen entsprechend bezeichnet seien, so dass der Eckpunkt P_i der Ebene E_i gegenüber liegt. Die Coordinaten der

Eckpunkte ergeben sich durch Auflösung von je drei Gleichungen, wobei die Coëfficienten der übrigbleibenden für die symbolische Darstellung benützt werden können. Man findet auf diese Art

$$x_1 = \frac{A_1}{D_1};\quad x_2 = \frac{A_2}{D_2};\quad x_3 = \frac{A_3}{D_3};\quad x_4 = \frac{A_4}{D_4};$$
$$y_1 = \frac{B_1}{D_1};\quad y_2 = \frac{B_2}{D_2};\quad y_3 = \frac{B_3}{D_3};\quad y_4 = \frac{B_4}{D_4};$$
$$z_1 = \frac{C_1}{D_1};\quad z_2 = \frac{C_2}{D_2};\quad z_3 = \frac{C_3}{D_3};\quad z_4 = \frac{C_4}{D_4},$$

wenn unter A_i, B_i, C_i, D_i die Unterdeterminanten der Elemente a_i, b_i, c_i, d_i in der aus den Gleichungscoëfficienten gebildeten Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

verstanden sind.

Irgend eine Höhe h_i des Tetraeders ist der senkrechte Abstand des Punktes P_i von der Ebene E_i, daher

$$h_i = \frac{E_{ii}}{\rho_i} = \frac{a_i \frac{A_i}{D_i} + b_i \frac{B_i}{D_i} + c_i \frac{C_i}{D_i} + d_i \frac{D_i}{D_i}}{\rho_i} = \frac{a_i A_i + b_i B_i + c_i C_i + d_i D_i}{\rho_i D_i};$$

$$h_i = \frac{\triangle}{\rho_i D_i}.$$

Für das Volum V findet man

$$6\,V = \begin{vmatrix} \frac{A_1}{D_1} & \frac{B_1}{D_1} & \frac{C_1}{D_1} & \frac{D_1}{D_1} \\ \frac{A_2}{D_2} & \frac{B_2}{D_2} & \frac{C_2}{D_2} & \frac{D_2}{D_2} \\ \frac{A_3}{D_3} & \frac{B_3}{D_3} & \frac{C_3}{D_3} & \frac{D_3}{D_3} \\ \frac{A_4}{D_4} & \frac{B_4}{D_4} & \frac{C_4}{D_4} & \frac{D_4}{D_4} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}}{D_1 D_2 D_3 D_4},$$

also

$$6\,V = \frac{\triangle^3}{D_1 D_2 D_3 D_4}.$$

Ist f_i der Inhalt der Seitenfläche in der Ebene E_i, so erhält man, weil $6\,V = 2\,f_i\,h_i$

$$2\,f_i = \frac{6\,V}{h_i} = \frac{\triangle^3}{D_1\,D_2\,D_3\,D_4} \cdot \frac{\rho_i\,D_i}{\triangle} = \frac{\rho_i\,D_i\,\triangle^2}{D_1\,D_2\,D_3\,D_4},$$

demnach die doppelte Oberfläche des Tetraeders

$$2\,F = \frac{(\rho_1\,D_1 + \rho_2\,D_2 + \rho_3\,D_3 + \rho_4\,D_4)\triangle^2}{D_1\,D_2\,D_3\,D_4}.$$

Aufgabe.

Man berechne die Coordinaten der Eckpunkte, die Höhen, das Volum, die Seitenflächen und die Oberfläche des von den Ebenen

$$\begin{aligned} 2\,x + y + 2z - 5 &= 0; \\ 6\,x - 2y + 3z - 7 &= 0; \\ x + 4y - 8z + 3 &= 0; \\ 6\,x - 2y - 9z - 8 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmten Tetraeders.

32. Ebene durch die Schnittlinie von zwei Ebenen. Die aus den Gleichungen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ durch lineare Combination mit Hilfe der Factoren λ_1 und λ_2 abgeleitete Gleichung

$$\lambda_1\,E_1 + \lambda_2\,E_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50$$

stellt eine Ebene E_3 vor, welche durch die Schnittlinie der Ebenen E_1 und E_2 geht. Denn sie ist vom ersten Grade und wird von den Coordinaten eines beliebigen Punktes P_s der Schnittlinie befriedigt, indem durch Einsetzung E_{1s} und E_{2s} einzeln verschwinden. Dividiert man durch λ_1 und setzt $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\lambda$, so nimmt die combinierte Gleichung die Form

$$E_1 - \lambda\,E_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51$$

an. So lange es freisteht, den Factoren λ_1, λ_2 oder λ beliebige Werte zu ertheilen, kann jede der beiden Gleichungsformen eine ganz beliebige, durch die Schnittlinie gehende Ebene vorstellen. Wenn aber diese eine bestimmte Lage haben soll, dann müssen die Factoren bestimmte Wertverhältnisse oder Werte annehmen.

Soll z. B. die Ebene E_3 durch einen gegebenen Punkt P_0 gehen, muss

$$E_{10} - \lambda\,E_{20} = 0,$$

also

$$\lambda = \frac{E_{10}}{E_{20}} \text{ oder } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{E_{10}}{E_{20}}$$

sein. Die Ebene E_3 wird daher durch

$$E_1 - \frac{E_{10}}{E_{20}} E_2 = 0$$

oder in mehr symmetrischer Form durch

$$\frac{E_1}{E_{10}} - \frac{E_2}{E_{20}} = 0$$

dargestellt.

Wenn aber E_3 die gegebene Richtung $a : b : c$ enthalten soll. dann muss ihre Normale zu dieser Richtung senkrecht sein.

Ordnet man das Polynom der Gleichung $E_1 - \lambda E_2 = 0$, so erhält sie die Form

$$(a_1 - \lambda a_2) x + (b_1 - \lambda b_2) y + (c_1 - \lambda c_2) z + (d_1 - \lambda d_2) = 0,$$

also hat E_3 die Normalenrichtung

$$(a_1 - \lambda a_2) : (b_1 - \lambda b_2) : (c_1 - \lambda c_2);$$

demnach muss in diesem Falle

$$a (a_1 - \lambda a_2) + b (b_1 - \lambda b_2) + c (c_1 - \lambda c_2) = 0$$

und

$$\lambda = \frac{a_1 a + b_1 b + c_1 c}{a_2 a + b_2 b + c_2 c} = \frac{e_1}{e_2}$$

sein, wenn e_1 und e_2 leicht verständliche Abkürzungen bedeuten. Die Gleichung der Ebene E_3 ist jetzt

$$\frac{E_1}{e_1} - \frac{E_2}{e_2} = 0.$$

Sind die Gleichungen der Ebenen E_1 und E_2 in der Normalform $N_1 = 0$ und $N_2 = 0$ gegeben, so tritt die geometrische Bedeutung des Factors λ in der combinierten Gleichung

$$N_1 - \lambda N_2 = 0$$

deutlich hervor. Liegt nämlich der beliebige Punkt P_0 auf E_3, so ist

$$N_{10} - \lambda N_{20} = 0;$$

$$\lambda = \frac{N_{10}}{N_{20}}$$

oder, weil N_{10} und N_{20} die senkrechten Abstände des Punktes P_0 von E_1 und E_2 darstellen,

$$\lambda = \frac{t_{10}}{t_{20}} = \frac{\sin E_1 E_3}{\sin E_2 E_3} = (E_1 E_2 E_3),$$

d. h. λ ist gleich dem Sinustheilverhältnis der Ebene E_3 in Bezug auf die Ebenen E_1, E_2. Danach erkennt man leicht die Bedeutung von λ in der Gleichung

$$E_1 - \lambda E_2 = 0.$$

Da nämlich $\frac{E_1}{\rho_1} = N_1$; $\frac{E_2}{\rho_2} = N_2$, also $E_1 = \rho_1 N_1$; $E_2 = \rho_2 N_2$ gesetzt und dieser Gleichung die Form

$$\rho_1 N_1 - \lambda \rho_2 N_2 = 0$$

oder

$$N_1 - \lambda \frac{\rho_2}{\rho_1} N_2 = 0$$

gegeben werden kann, ist nun

$$\lambda \frac{\rho_2}{\rho_1} = (E_1 E_2 E_3),$$

also

$$\lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2} (E_1 E_2 E_3),$$

d. h. λ ist zwar nicht mehr dem Sinustheilverhältnisse gleich, aber doch proportional. Daher sind die Ebenen E_3 und E_4 mit den Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} E_1 - \lambda E_2 \\ E_1 + \lambda E_2 \end{matrix}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{matrix} \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0 \\ \lambda_1 E_1 - \lambda_2 E_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

harmonisch in Bezug auf die Ebenen E_1 und E_2, denn man hat

$$(E_1 E_2 E_3) = \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda = - \frac{\rho_2}{\rho_1} . \frac{\lambda_2}{\lambda_1};$$

$$(E_1 E_2 E_4) = - \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda = \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} . \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

mithin

$$(E_1 E_2 E_3) = - (E_1 E_2 E_4).$$

Dasselbe gilt auch von den Ebenenpaaren

$$\left.\begin{matrix} N_1 - \lambda N_2 = 0 \\ N_1 + \lambda N_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{matrix} \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0 \\ \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Sind insbesondere E_3 und E_4 die Halbierungsebenen der Winkel, welche die Ebenen E_1 und E_2 bestimmen und liegt E_3 in dem Theile des Raumes, dessen Punkte gleich bezeichnete Abstände von E_1 und E_2 haben, E_4 dazu senkrecht, so ist $(E_1 E_2 E_3) = 1$; $(E_1 E_2 E_4) = -1$, so dass durch die Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} N_1 - N_2 = 0 \\ N_1 + N_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{matrix} \frac{E_1}{\rho_1} - \frac{E_2}{\rho_2} = 0 \\ \frac{E_1}{\rho_1} + \frac{E_2}{\rho_2} = 0 \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (52$$

die Winkelhalbierungsebenen dargestellt erscheinen.

Drei Ebenen E_1, E_2, E_3 gehen durch eine Gerade, wenn sich drei Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ finden lassen, so dass

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 \equiv 0.$$

(Vgl. Art. 21, IV). Denn es ist dann z. B.

$$\lambda_1 E_1 \equiv -(\lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3),$$

d. h. die Gleichung $E_1 = 0$ linear combiniert aus den Gleichungen $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ u. s. w.

Anmerkung. Wenn

$$E_i - \lambda' E_k = 0; \; E_i - \lambda'' E_k = 0$$

die Gleichungen der Ebenen E', E'' sind, welche durch die Schnittlinie der Ebenen E_i und E_k gehen, so ist

$$(E_i E_k E' E'') = \frac{\lambda'}{\lambda''},$$

daher repräsentieren die Gleichungen

$$E_1 - \lambda E_2 = 0; \; E_3 - \lambda E_4 = 0$$

zwei projectivische Ebenenbüschel, sobald λ als willkürlicher Parameter angesehen wird.

Beispiele und Aufgaben.

a) Eine Ebene, welche durch die Schnittlinie der Ebenen

$$2x + 2y + z - 4 = 0;$$
$$6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

geht, hat die Gleichung

$$(2x + 2y + z - 4) - \lambda(6x + 3y + 2z - 6) = 0,$$

oder

$$(2 - 6\lambda)x + (2 - 3\lambda)y + (1 - 2\lambda)z - (4 - 6\lambda) = 0.$$

Geht sie noch durch den Punkt $P_0(5, 3, 2)$, ist

$$(10 + 6 + 2 - 4) - \lambda(30 + 9 + 4 - 6) = 0;$$

$$\lambda = \frac{14}{37},$$

also

$$-10x + 32y + 9z - 64 = 0$$

ihre Gleichung.

Enthält sie die Richtung 1 : 1 : 1, ist

$$2 - 6\lambda + 2 - 3\lambda + 1 - 2\lambda = 0;$$

$$\lambda = \frac{5}{11},$$

daher ihre Gleichung

$$-8x + 7y + z - 14 = 0.$$

Sie ist in diesem Falle senkrecht zu jeder Ebene der Stellung 1 : 1 : 1.

Endlich sind die Gleichungen der Winkelhalbierungsebenen

$$\frac{2x + 2y + z - 4}{3} \mp \frac{6x + 3y + 2z - 6}{7} = 0,$$

oder einzeln

$$-4x + 5y + z - 10 = 0; \quad 32x + 23y + 13z - 46 = 0.$$

b) Die Ebenen

$$2x + 3y + 4z - 12 = 0;$$
$$x + 2y + 3z - 6 = 0;$$
$$4x + 5y + 6z - 24 = 0$$

gehen durch eine Gerade, denn es ist

$$3(2x + 3y + 4z - 12) - 2(x + 2y + 3z - 6) -$$
$$-(4x + 5y + 6z - 24) \equiv 0$$

und z. B.

$$4x + 5y + 6z - 24 = 3(2x + 3y + 4z - 12) -$$
$$-2(x + 2y + 3z - 6).$$

c) Man lege durch die Schnittlinie der Ebenen

$$8x + 4y + z - 8 = 0;$$
$$2x + 6y + 9z - 18 = 0$$

eine Ebene, welche durch den Punkt $P_0(-2, 3, 1)$ geht, ferner die zu dieser senkrechte Ebene. Überdies stelle man die Gleichungen der Winkelhalbierungsebenen auf.

33. Ebene durch den Schnittpunkt von drei Ebenen. Die aus den Gleichungen $E_1 = 0$; $E_2 = 0$; $E_3 = 0$ durch lineare Combination mit Hilfe der Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ abgeleitete Gleichung

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53$$

stellt eine Ebene E_4 vor, welche durch den Schnittpunkt der Ebenen E_1, E_2, E_3 geht. Denn sie ist vom ersten Grade und wird von den Coordinaten des Schnittpunktes P_s befriedigt, indem durch Einsetzung E_{1s}, E_{2s}, E_{3s} einzeln verschwinden.

Die nach x, y, z geordnete Gleichung lautet

$$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3)x + (b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3)y +$$
$$+ (c_1\lambda_1' + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3)z + (d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 + d_3\lambda_3) = 0.$$

So lange die Wahl der Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ freisteht, kann die Gleichung jede durch P_s gehende Ebene repräsentieren. Wenn aber diese eine bestimmte Lage haben soll, müssen die Factoren bestimmte Wertverhältnisse aufweisen.

Soll z. B. die Ebene E_4 durch die Punkte P_i und P_k gehen, muss

$$\lambda_1 E_{1i} + \lambda_2 E_{2i} + \lambda_3 E_{3i} = 0;$$
$$\lambda_1 E_{1k} + \lambda_2 E_{2k} + \lambda_3 E_{3k} = 0,$$

also

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \begin{vmatrix} E_{2i} & E_{3i} \\ E_{2k} & E_{3k} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} E_{3i} & E_{1i} \\ E_{3k} & E_{1k} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} E_{1i} & E_{2i} \\ E_{1k} & E_{2k} \end{vmatrix}$$

sein und die Gleichung derselben wird

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ E_{1i} & E_{2i} & E_{3i} \\ E_{1k} & E_{2k} & E_{3k} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn in der Ebene E_4 die Richtungen $a_i : b_i : c_i$ und $a_k : b_k : c_k$ enthalten sein sollen, ist die Normale der Ebene zu diesen senkrecht, so dass die Gleichungen

$$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3) a_i + (b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3) b_i + (c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3) c_i = 0;$$
$$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3) a_k + (b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3) b_k + (c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3) c_k = 0$$

oder wenn man zur Abkürzung $a_1 a_i + b_1 b_i + c_1 c_i = e_{1i}$ u. s. w. setzt, die Gleichungen

$$\lambda_1 e_{1i} + \lambda_2 e_{2i} + \lambda_3 e_{3i} = 0;$$
$$\lambda_1 e_{1k} + \lambda_2 e_{2k} + \lambda_3 e_{3k} = 0$$

bestehen. Analog wie oben erhält man nun

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ e_{1i} & e_{2i} & e_{3i} \\ e_{1k} & e_{2k} & e_{3k} \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung der Ebene E_4.

Soll endlich E_4 die Stellung $a : b : c$ haben, so muss die Richtung ihrer Normalen mit der Richtung $a : b : c$ übereinstimmen. Daher sind λ_1, λ_2, λ_3 so zu bestimmen, dass

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 = \lambda a;$$
$$b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + b_3 \lambda_3 = \lambda b;$$
$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 = \lambda c$$

wird, wo λ einen beliebigen Factor bedeutet. Durch Elimination der Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda$ aus diesen Gleichungen und aus

$$E_1 \lambda_1 + E_2 \lambda_2 + E_3 \lambda_3 = 0$$

erhält man die Gleichung der Ebene in der Form

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Ebene, welche den Schnittpunkt der Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &\ldots x + y + z - 1 = 0; \\ E_2 &\ldots 2x + y + 3z - 6 = 0; \\ E_3 &\ldots 5x + 2y + z - 10 = 0 \end{aligned}$$

mit den Punkten P_i (1, 3, 2); P_k (5, 1, 2) verbindet, hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 7 & 11 & 19 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$62 E_1 - 74 E_2 + 20 E_3 = 0,$$

demnach reduciert und geordnet

$$x + 2y - 10z + 13 = 0.$$

b) Die Ebene, welche durch denselben Schnittpunkt wie in Aufg. *a*) geht und die Richtungen 1 : 3 : 2; 5 : 1 : 2 enthält, wird durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 6 & 11 & 13 \\ 8 & 17 & 29 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$98 E_1 - 70 E_2 + 14 E_3 = 0$$

und geordnet

$$2x + 4y - 7z + 13 = 0$$

repräsentiert.

c) Die Ebene, welche den Schnittpunkt der Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &\ldots x - y = 0; \\ E_2 &\ldots x + y - 1 = 0; \\ E_3 &\ldots z - 1 = 0 \end{aligned}$$

enthält und die Stellung 2 : 2 : 1 hat, wird durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ausgedrückt, welche entwickelt

$$4 E_2 + 2 E_3 = 0$$

und reduciert

$$2x + 2y + z - 3 = 0$$

lautet.

d) **Man lege durch den Schnittpunkt der Ebenen**

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 9 &= 0; \\ 2x - y - z - 2 &= 0; \\ 3x - 2y + z - 17 &= 0 \end{aligned}$$

eine Ebene, welche ihn mit dem Nullpunkte und dem Punkte $P_0(2, 5, 3)$ verbindet, eine Ebene, welche die Richtungen $2:0:3$ und $-2:3:-5$ enthält, endlich eine Ebene der Stellung $1:1:1$.

34. Gerade durch den Schnittpunkt von drei Ebenen. Wenn eine Gerade durch den Schnittpunkt P_s von drei Ebenen $E_1 = 0$; $E_2 = 0$; $E_3 = 0$ gehen soll, ist sie durch ein Gleichungssystem von der Form

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 &= 0 \\ \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

bestimmt, denn dieses wird offenbar von den Coordinaten des Punktes P_s befriedigt; seine Gleichungen repräsentieren zwei Ebenen, welche durch zwei von den Schnittlinien der Ebenen E_1, E_2, E_3 gehen und sich in der Geraden schneiden. Die Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ergeben sich aus den Bedingungen, welchen die Gerade außerdem zu entsprechen hat.

Soll dieselbe z. B. noch durch den Punkt P_0 gehen, so findet man durch Einsetzung

$$\begin{aligned} \lambda_1 E_{10} + \lambda_2 E_{20} &= 0; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{E_{20}}{E_{10}}; \\ \lambda_2 E_{20} + \lambda_3 E_{30} &= 0; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = -\frac{E_{30}}{E_{20}} \end{aligned}$$

und damit das Gleichungssystem der Geraden $P_s P_0$, welches in der Form

$$\frac{E_1}{E_{10}} = \frac{E_2}{E_{20}} = \frac{E_3}{E_{30}}$$

dargestellt werden kann.

Wenn die durch P_s gehende Gerade die gegebene Richtung $a:b:c$ haben soll, kann sie als Schnitt der Ebenen (Art. 32)

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{e_1} - \frac{E_2}{e_2} &= 0; \\ \frac{E_2}{e_2} - \frac{E_3}{e_3} &= 0 \end{aligned}$$

angesehen werden, welche diese Richtung enthalten und durch P_s gehen; sie hat also das Gleichungssystem

$$\frac{E_1}{e_1} = \frac{E_2}{e_2} = \frac{E_3}{e_3}.$$

Hievon kann man Gebrauch machen, um die Höhenlothe eines Tetraeders durch ihre Gleichungsysteme darzustellen. Sind nämlich die Gleichungen der Seitenflächen in der Normalform gegeben, so geht das dem Eckpunkte P_4 entsprechende Höhenloth durch den Schnittpunkt der Ebenen $N_1 = 0$; $N_2 = 0$; $N_3 = 0$ und hat die Richtungscoordinaten $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$. Daher ist $e_{14} = \alpha_1 \alpha_4 + \beta_1 \beta_4 + \gamma_1 \gamma_4 = \cos n_1 n_4$ u. s. w.; dem Höhenloth entspricht das Gleichungssystem

$$\frac{N_1}{\cos n_1 n_4} = \frac{N_2}{\cos n_2 n_4} = \frac{N_3}{\cos n_3 n_4}.$$

u. s. w.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gerade, welche den Schnittpunkt der Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 \;\ldots\; & x + 2y + 3z - 12 = 0; \\ E_2 \;\ldots\; & 3x + 2y + z - 12 = 0; \\ E_3 \;\ldots\; & 2x + 3y + 3z - 18 = 0 \end{aligned}$$

mit dem Punkte $P_0(2, 5, 1)$ verbindet, hat das Gleichungssystem

$$\frac{E_1}{3} = \frac{E_2}{5} = \frac{E_3}{4},$$

d. h. es schneiden sich in ihr die Ebenen

$$5E_1 - 3E_2 = 0; \quad 4E_1 - 3E_3 = 0; \quad 4E_2 - 5E_3 = 0,$$

deren geordnete und reducierte Gleichungen

$$x - y - 3z + 6 = 0; \quad 2x + y - 3z - 6 = 0;$$
$$2x - 7y - 11z + 42 = 0$$

lauten.

Wenn die durch den Schnittpunkt der gegebenen Ebenen gehende Gerade die Richtung $1:1:1$ haben soll, ist

$$\frac{E_1}{6} = \frac{E_2}{6} = \frac{E_3}{8}$$

ihr Gleichungssystem und es gehen durch sie die Ebenen

$$E_1 - E_2 = 0; \quad 4E_1 - 3E_3 = 0; \quad 4E_2 - 3E_3 = 0,$$

oder

$$x - z = 0; \quad 2x + y - 3z - 6 = 0; \quad 6x - y - 5z + 6 = 0.$$

b) Die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Ebenen E_1, E_2, E_3 mit dem Nullpunkte hat das Gleichungssystem

$$\frac{E_1}{d_1} = \frac{E_2}{d_2} = \frac{E_3}{d_3}.$$

c) Man verbinde den Schnittpunkt der Ebenen

$$3x - 2y - z + 6 = 0;$$
$$x - y - 2z - 4 = 0;$$
$$5x + 3y - 3z - 45 = 0$$

mit dem Nullpunkte und dem Punkte $P_0(5, 2, 7)$; ferner lege man durch denselben die Lothe zu den Ebenen

$$x + y - 3 = 0; \quad x + y - z = 0; \quad y - z = 0.$$

35. Winkelhalbierungsebenen des Tetraeders. Ein Tetraeder sei durch die Gleichungen

$$N_1 = 0; \quad N_2 = 0; \quad N_3 = 0; \quad N_4 = 0$$

seiner Seitenflächen gegeben und es möge — was immer erreicht werden kann — ein Punkt im Inneren des Tetraeders gleich bezeichnete Abstände von allen Seitenflächen haben. Dann sind

$$N_1 - N_2 = 0; \quad N_1 - N_3 = 0; \quad N_1 - N_4 = 0;$$
$$N_2 - N_3 = 0; \quad N_2 - N_4 = 0; \quad N_3 - N_4 = 0$$

die Gleichungen der inneren,

$$N_1 + N_2 = 0; \quad N_1 + N_3 = 0; \quad N_1 + N_4 = 0;$$
$$N_2 + N_3 = 0; \quad N_2 + N_4 = 0; \quad N_3 + N_4 = 0$$

die Gleichungen der äußeren Winkelhalbierungsebenen.

Die ersten sechs Ebenen gehen durch einen Punkt, welchen irgend drei von ihnen bestimmen, die einander nicht in derselben Geraden schneiden, z. B. die Ebenen

$$N_1 - N_2 = 0;$$
$$N_1 - N_3 = 0;$$
$$N_1 - N_4 = 0;$$

denn es ist

$$(N_1 - N_3) - (N_1 - N_2) \equiv N_2 - N_3; \quad (N_1 - N_4) - (N_1 - N_3) \equiv N_3 - N_4;$$
$$(N_1 - N_4) - (N_1 - N_2) \equiv N_2 - N_4,$$

also gehen die Ebenen

$$N_2 - N_3 = 0; \quad N_3 - N_4 = 0; \quad N_2 - N_4 = 0$$

durch die Schnittlinien jener drei Ebenen, somit auch durch deren gemeinsamen Punkt.

Ebenso gehen je drei äußere und drei innere Winkelhalbierungsebenen durch einen Punkt, z. B.

$$N_1 + N_2 = 0; \quad N_1 + N_3 = 0; \quad N_1 + N_4 = 0$$
$$N_2 - N_3 = 0; \quad N_2 - N_4 = 0; \quad N_3 - N_4 = 0,$$

was auf dieselbe Art bewiesen wird.

Die äußeren Winkelhalbierungsebenen gegenüberliegender Kanten des Tetraeders schneiden einander in den drei Geraden

$$\left.\begin{matrix} N_1 + N_2 = 0 \\ N_3 + N_4 = 0 \end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix} N_1 + N_3 = 0 \\ N_2 + N_4 = 0 \end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix} N_1 + N_4 = 0 \\ N_2 + N_3 = 0 \end{matrix}\right\},$$

welche insgesammt in der Ebene

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 0$$

liegen, weil deren Gleichung aus jenen einer jeden von den drei Geraden durch Addition hervorgeht.

36. Ebenencoordinaten. Nach dem Gesetz der Reciprocität sind Punkt und Ebene im Raume reciproke Elemente. Es liegt daher nahe, die Untersuchungen der analytischen Geometrie dadurch zu vervollständigen, dass man die Ebene — ebenso wie bisher den Punkt — durch Coordinaten bestimmt und diese der Lösung geometrischer Aufgaben zugrunde legt.

I. Unter den verschiedenen Bestimmungsstücken einer Ebene hat man der Zweckmässigkeit wegen die negativen, reciproken Werte der Axenabschnitte a, b, c als Coordinaten gewählt. Bezeichnet man sie mit ξ, η, ζ, so ist durch

$$\xi = -\frac{1}{a}; \; \eta = -\frac{1}{b}; \; \zeta = -\frac{1}{c}$$

die Ebene festgelegt, denn man hat $a = -\frac{1}{\xi}$; $b = -\frac{1}{\eta}$; $c = -\frac{1}{\zeta}$ und kann damit dieselbe construieren. Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

der Ebene ein, so geht daraus die Gleichung

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$$

hervor. Für einen Punkt P_0 der Ebene ist

$$\xi x_0 + \eta y_0 + \zeta z_0 + 1 = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung ξ, η, ζ als unbestimmte Größen, so drückt dieselbe aus, dass jede Ebene, deren Coordinaten ihr genügen,

durch P_0 geht. Denn sobald ein Wertsystem ξ_i, η_i, ζ_i aus der Gleichung berechnet wurde, ist

$$\xi_i x_0 + \eta_i y_0 + \zeta_i z_0 + 1 = 0,$$

d. h. die Coordinaten von P_0 genügen der Gleichung

$$\xi_i x + \eta_i y + \zeta_i z + 1 = 0$$

der von den Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i bestimmten Ebene E_i. Da also durch die Gleichung

$$x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54$$

die Gesammtheit der Ebenen charakterisiert ist, welche durch P_0 gehen, wird sie die Gleichung des Punktes P_0 genannt, und zwar liegt hier die sogenannte Normalform vor. Die allgemeine Gleichung ersten Grades in Ebenencoordinaten

$$a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55$$

lässt sich mittelst Division durch d auf die Normalform

$$\frac{a}{d}\xi + \frac{b}{d}\eta + \frac{c}{d}\zeta + 1 = 0$$

überführen, stellt daher den Punkt vor, dessen Coordinaten $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$ sind. Die Richtung von dem Nullpunkte nach diesem Punkte ist durch das Verhältnis $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} : \frac{c}{d} = a : b : c$ gegeben. Die speciellen Formen, welche aus der allgemeinen Gleichung hervorgehen, wenn Coëfficienten Null werden, bedürfen keiner näheren Erklärung:

$a\xi + b\eta + d = 0$; Punkt $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, 0\right)$ der xy-Ebene;

$b\eta + c\zeta + d = 0$; Punkt $\left(0, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$ der yz-Ebene;

$a\xi + c\zeta + d = 0$; Punkt $\left(\frac{a}{d}, 0, \frac{c}{d}\right)$ der zx-Ebene;

$a\xi + d = 0$; Punkt $\left(\frac{a}{d}, 0, 0\right)$ der x-Axe;

$b\eta + d = 0$; Punkt $\left(0, \frac{b}{d}, 0\right)$ der y-Axe;

$c\zeta + d = 0$; Punkt $\left(0, 0, \frac{c}{d}\right)$ der z-Axe;

$a\xi + b\eta + c\zeta = 0;$	unendl. ferner Punkt in der Richt. $a:b:c;$
$a\xi + b\eta = 0;$	» » » » » » $a:b:0;$
$b\eta + c\zeta = 0;$	» » » » » » $0:b:c;$
$a\xi + c\zeta = 0;$	» » » » » » $a:0:c;$
$\xi = 0;\ \eta = 0;\ \zeta = 0;$	die unendl. fernen Punkte der x-, y-, z-Axe.

Symbolisch möge künftig die Gleichung des Punktes P_i in der allgemeinen Form durch $P_i = 0$, in der Normalform durch $N_i = 0$ dargestellt werden.

Anmerkung. Aus den beiden Gleichungsformen für eine Ebene

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0;$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0;$$

folgert man

$$\xi : \eta : \zeta : 1 = \alpha : \beta : \gamma : 1;$$
$$\xi = \frac{\alpha}{1};\ \eta = \frac{\beta}{1};\ \zeta = \frac{\gamma}{1};\ 1 = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

wovon mitunter vortheilhafter Gebrauch gemacht werden kann.

II. Die Ebenen, deren Coordinaten einer beliebigen Gleichung

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

genügen, bilden eine gesetzmäßig angeordnete stetige Folge, umhüllen daher eine Fläche, deren Tangentenebenen sie sind. Diese Fläche ist als das geometrische Äquivalent der Gleichung anzusehen. Damit steht die Bedeutung der Gleichung ersten Grades nicht in Widerspruch, wenn man den Punkt als eine geschlossene Fläche von unendlich kleinen Dimensionen betrachtet. Aber es kann auch irgend eine Linie — mit Ausnahme der Geraden — durch eine Gleichung in Ebenencoordinaten dargestellt werden, wie die Betrachtung einer Gleichung zwischen zwei Ebenencoordinaten, z. B.

$$f(\xi, \eta) = 0$$

zeigt. Da ξ und η in der xy-Ebene die Coordinaten einer Geraden sind, welche auf den Axen die Stücke $a = -\frac{1}{\xi}$; $b = -\frac{1}{\eta}$ abschneidet, stellt die Gleichung in der xy-Ebene eine Linie vor. Wenn ihr die Coordinaten einer Ebene genügen sollen, so geschieht dies bei beliebigem ζ bloß durch ξ und η, und zwar wird dadurch der Ebene die Bedingung auferlegt, auf der x- und y-Axe dieselben Stücke abzuschneiden wie eine Tangente der Linie. Also geht die Ebene durch die Tangente und ist eine Tangentenebene der Linie. Daraus folgt, dass

durch jene Gleichung die Gesammtheit der Ebenen ausgedrückt ist, welche eine Linie der x y-Ebene berühren (umhüllen) u. s. w. Ebenso stellen die Gleichungen $\varphi(\eta, \zeta) = 0$; $\psi(\xi, \zeta) = 0$ Linien der y z- oder z x-Ebene vor. Daraus schließt man, dass auch eine Gleichung zwischen den drei Coordinaten ξ, η, ζ eine Linie vorstellen kann.

Lässt sich das Polynom einer Gleiehung

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

in Factoren zerlegen, so repräsentiert sie die Gesammtheit der Flächen (Linien, Punkte) deren Gleichungen man erhält, wenn man die einzelnen Factoren gleich Null setzt.

Durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades in Ebenencoordinaten wird eine Fläche n^{ter} Classe dargestellt.

Wenn die Coordinaten einer Ebene zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0 \\ f_2(\xi, \eta, \zeta) = 0 \end{array}\right\}$$

genügen, so berührt dieselbe die Flächen, welche durch die beiden Gleichungen repräsentiert sind; daher stellt das System der zwei Gleichungen die Gesammtheit der Tangentenebenen von zwei Flächen, und weil durch diese eine neue, abwickelbare Fläche umhüllt wird, die »Developpable« vor, von welcher beide Flächen berührt werden. Eine solche Fläche kann nicht durch eine einzige Gleichung in Ebenencoordinaten dargestellt werden; sie steht der Schnittlinie von zwei Flächen reciprok gegenüber, die in Punktcoordinaten ebenfalls durch zwei Gleichungen repräsentiert wird. (Berührende Kegel- oder Cylinderflächen bei zwei Kugeln u. s. w.)

Insbesondere werden die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} f(\xi, \eta, \zeta) = 0 \\ P_i = 0 \end{array}\right\}$$

von den Coordinaten jener Ebenen befriedigt, welche durch den Punkt P_i gehen und die Fläche $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ berühren, also den aus P_i an die Fläche gelegten berührenden Kegel umhüllen. Das Gleichungssystem stellt somit diesen Kegel vor, der in einen Cylinder übergeht, wenn P_i unendlich fern ist. Durch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} f(\xi, \eta, \zeta) = 0 \\ \zeta = 0 \end{array}\right\}$$

wird demnach eine Cylinderfläche repräsentiert, deren Tangentenebenen der z-Axe parallel sind, welche also den Umriss der Projection der Fläche auf die x y-Ebene bestimmt; die Gleichung des Umrisses ergibt sich daher, wenn man in der Gleichung der Fläche $\zeta = 0$ setzt:

$$f(\xi, \eta, 0) = 0.$$

Stellt insbesondere die Gleichung $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ eine Linie vor, so drückt $f(\xi, \eta, 0) = 0$ deren Projection auf die x y-Ebene aus u. s. w.

Drei Gleichungen

$$f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0;$$
$$f_2(\xi, \eta, \zeta) = 0;$$
$$f_3(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

repräsentieren die gemeinsamen Tangentenebenen der drei Flächen, welche durch die Gleichungen dargestellt sind, also eine Gruppe von Ebenen in beschränkter Anzahl.

Beispiele und Aufgaben.

a) Alle Ebenen, we che von einem Punkte P_0 den gegebenen senkrechten Abstand r haben, sind Tangentenebenen einer Kugel mit dem Mittelpunkte in P_0 und dem Radius r. Die Ebene $E(\xi, \eta, \zeta)$ hat die Gleichung

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$$

und die Distanzformel

$$t = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

demnach drückt die Gleichung

$$r = \frac{\xi x_0 + \eta y_0 + \xi z_0 + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

oder

$$(x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta + 1)^2 - r^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0$$

aus, dass die Ebene E von P_0 den Abstand r hat; sie stellt also die Kugel in Ebenencoordinaten vor.

Für $r = 0$ reduciert sich die Gleichung auf

$$x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta + 1 = 0$$

und repräsentiert nun den Punkt P_0, der als Kugel von unendlich kleinem Radius angesehen werden kann.

b) Ein Kreis vom Radius r habe den Mittelpunkt in P_0 und seine Ebene habe die Stellungscoordinaten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Wenn eine Ebene E (Fig. 103) den Kreis berührt, hat der Mittelpunkt P_0 von ihr den Abstand

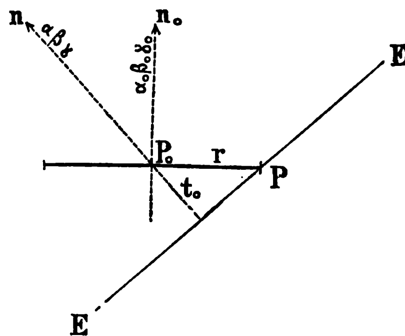
$$t_0 = r \,.\, \sin n_0 n.$$

Nun ist

$$t_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + 1$$

$$\sin^2 n_0 n = \begin{vmatrix} \beta_0 & \gamma_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2,$$

Fig. 103.



demnach

$$(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + 1)^2 = r^2 \left[\begin{vmatrix} \beta_0 & \gamma_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2\right].$$

Setzt man jetzt, um die Coordinaten ξ, η, ζ der Ebene einzuführen $\alpha = l\xi$; $\beta = l\eta$; $\gamma = l\zeta$ und unterdrückt den Factor l^2, so erhält man die Gleichung

$$(x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta + 1)^2 -$$
$$- r^2 \left[(\beta_0 \zeta - \gamma_0 \eta)^2 + (\gamma_0 \xi - \alpha_0 \zeta)^2 + (\alpha_0 \eta - \beta_0 \xi)^2\right] = 0$$

des Kreises in Ebenencoordinaten.

c) Man construiere die Ebenen

$$E_1\left(-\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{7}\right); \quad E_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0\right); \quad E_3\left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{1}{2}\right);$$
$$E_4\left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

und stelle ihre Gleichungen auf.

d) Man construiere die Punkte

$$5\xi + 3\eta + 2\zeta + 1 = 0;$$
$$2\xi - 2\eta + \zeta + 2 = 0;$$
$$3\xi + 3\eta + 3\zeta - 5 = 0$$

und gebe die Gleichungen der Punkte

$$P_1\left(1,1,1\right);\ P_2\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{3}{5}\right);\ P_3\left(0,\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right);\ P_4\left(3,0,0\right)$$

an.

37. Verwendung der Ebenencoordinaten bei Aufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen. Um das Verständnis des Gebrauches der Ebenencoordinaten zu fördern, sei eine Reihe von Fundamentalaufgaben angeführt.

I. Der Abstand des durch seine Gleichung

$$a_0\,\xi + b_0\,\eta + c_0\,\zeta + d_0 = 0$$

gegebenen Punktes P_0 von der Ebene $E_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ wird mit Hilfe der Coordinaten $\frac{a_0}{d_0}, \frac{b_0}{d_0}, \frac{c_0}{d_0}$ desselben und der Gleichung $\xi_i x + \eta_i y + \zeta_i z + 1 = 0$ der Ebene gefunden:

$$t_{0i} = \frac{a_0\,\xi_i + b_0\,\eta_i + c_0\,\zeta_i + d_0}{d_0\,\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2}}.$$

II. Die Schnittlinie der Ebenen E_1 (ξ_1, η_1, ζ_1); E_2 (ξ_2, η_2, ζ_2) ist senkrecht zu deren Normalenrichtungen $\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1$ und $\xi_2 : \eta_2 : \zeta_2$, hat daher das Richtungsverhältnis

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}.$$

III. Um die Gleichung des Schnittpunktes der Ebenen E_1 (ξ_1, η_1, ζ_1); E_2 (ξ_2, η_2, ζ_2); E_3 (ξ_3, η_3, ζ_3) aufzustellen, hat man auszudrücken, dass eine Ebene E (ξ, η, ζ) durch diesen Punkt geht. Mit Hilfe der Gleichungen der Ebenen findet man

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IV. Durch lineare Combination der Gleichungen der Punkte P_1, P_2

$$x_1\,\xi + y_1\,\eta + z_1\,\zeta + 1 = 0 \text{ oder } N_1 = 0;$$
$$x_2\,\xi + y_2\,\eta + z_2\,\zeta + 1 = 0 \quad \text{»} \quad N_2 = 0$$

erhält man die Gleichung

$$(x_1\,\xi + y_1\,\eta + z_1\,\zeta + 1) - \lambda\,(x_2\,\xi + y_2\,\eta + z_2\,\zeta + 1) = 0$$

oder

$$N_1 - \lambda\,N_2 = 0$$

eines Punktes P_3, aus deren Normalform

$$\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}\xi + \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}\eta + \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}\zeta + 1 = 0$$

man sieht, dass P_3 auf der Verbindungslinie $P_1 P_2$ liegt und das Theilverhältnis λ in Bezug auf P_1 und P_2 besitzt. Der Factor λ hat also eine geometrische Bedeutung: $\lambda = (P_1 P_2 P_3)$.

Aus den Gleichungen in allgemeiner Form

$$P_1 = 0;$$
$$P_2 = 0$$

erhält man auf demselben Wege die Gleichung

$$P_1 - \lambda P_2 = 0,$$

oder weil $N_1 = \frac{P_1}{d_1}$; $N_2 = \frac{P_2}{d_2}$,

$$N_1 - \lambda \frac{d_2}{d_1} N_2 = 0,$$

so dass in diesem Falle $\lambda \frac{d_2}{d_1} = (P_1 P_2 P_3)$ und $\lambda = \frac{d_1}{d_2}(P_1 P_2 P_3)$, also der Factor λ dem Theilverhältnisse des Punktes P_3 bloß proportional ist. Aus dem Gesagten folgt, dass die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} P_3 \ldots N_1 - \lambda N_2 = 0 \\ P_4 \ldots N_1 + \lambda N_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0 \\ \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = 0 \end{array}\right\}$$

harmonisch sind zu den Punkten P_1 und P_2; ebenso die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} P_1 - \lambda P_2 = 0 \\ P_1 + \lambda P_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0 \\ \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Der Halbierungspunkt der Strecke $P_1 P_2$ und der unendlich ferne Punkt der Verbindungslinie $P_1 P_2$ haben die Theilverhältnisse -1 und 1, daher sind ihre Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} N_1 + N_2 = 0 \\ N_1 - N_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} \frac{P_1}{d_1} + \frac{P_2}{d_2} = 0 \\ \frac{P_1}{d_1} - \frac{P_2}{d_2} = 0 \end{array}\right\}.$$

V. Das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \end{array}\right\}$$

repräsentiert die Verbindungslinie $P_1 P_2$, weil es nur von den Coordinaten jener Ebenen befriedigt wird, welche durch sie gehen (specieller Fall einer Developpablen).

VI. Die Gleichung eines beliebigen Punktes der Geraden $P_1 P_2$ ist

$$P_1 - \lambda P_2 \doteq 0.$$

Soll der Punkt auch in der Ebene E_0 (ξ_0, η_0, ζ_0) liegen, muss

$$P_{10} - \lambda P_{20} = 0; \quad \lambda = \frac{P_{10}}{P_{20}}$$

sein und die Gleichung des Punktes ist nun

$$\frac{P_1}{P_{10}} - \frac{P_2}{P_{20}} = 0.$$

VII. Das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \\ P_3 = 0 \end{array}\right\}$$

repräsentiert die Verbindungsebene E_v der Punkte P_1, P_2, P_3, weil es nur von deren Coordinaten befriedigt wird. Diese werden durch Auflösung der Gleichungen erhalten.

Die Gleichung eines beliebigen Punktes der Verbindungsebene E_v ist.

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0,$$

denn sie wird von deren Coordinaten ξ_v, η_v, ζ_v befriedigt, indem P_{1v}, P_{2v}, P_{3v} einzeln verschwinden.

VIII. In dem Dreieck der Punkte

$$N_1 = 0; \quad N_2 = 0; \quad N_3 = 0$$

sind die Halbierungspunkte der Seiten:

$$N_1 + N_2 = 0; \quad N_2 + N_3 = 0; \quad N_3 + N_1 = 0;$$

die unendlich fernen Punkte der Seiten:

$$N_1 - N_2 = 0; \quad N_2 - N_3 = 0; \quad N_3 - N_1 = 0.$$

Da $(N_2 + N_3) - (N_3 + N_1) \equiv N_2 - N_1$ u. s. w., liegt immer der unendlich ferne Punkt einer Seite auf der Verbindungslinie der Halbierungspunkte der beiden anderen, also sind diese beiden Geraden parallel.

Die drei Schwerlinien des Dreieckes sind durch die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{r}N_1+N_2=0\\N_3=0\end{array}\right\};\quad\left.\begin{array}{r}N_2+N_3=0\\N_1=0\end{array}\right\};\quad\left.\begin{array}{r}N_3+N_1=0\\N_2=0\end{array}\right\}$$

dargestellt. Durch Addition erhält man in jedem System die Gleichung

$$N_1+N_2+N_3=0$$

eines und desselben Punktes, durch welchen also die drei Schwerlinien gehen (Schwerpunkt).

IX. In dem Tetraeder der Punkte

$$N_1=0;\quad N_2=0;\quad N_3=0;\quad N_4=0$$

sind die Schwerlinien (Verbindungslinien der Eckpunkte mit den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Seitenflächen) durch die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{r}N_1+N_2+N_3=0\\N_4=0\end{array}\right\};\quad\left.\begin{array}{r}N_1+N_2+N_4=0\\N_3=0\end{array}\right\};\quad\left.\begin{array}{r}N_1+N_3+N_4=0\\N_2=0\end{array}\right\};$$
$$\left.\begin{array}{r}N_2+N_3+N_4=0\\N_1=0\end{array}\right\}$$

ausgedrückt. Durch Addition erhält man in jedem System dieselbe Gleichung

$$N_1+N_2+N_3+N_4=0$$

eines Punktes, durch welchen also die vier Schwerlinien gehen (Schwerpunkt). Durch denselben Punkt gehen auch die Verbindungslinien

$$\left.\begin{array}{r}N_1+N_2=0\\N_3+N_4=0\end{array}\right\};\quad\left.\begin{array}{r}N_1+N_3=0\\N_2+N_4=0\end{array}\right\};\quad\left.\begin{array}{r}N_1+N_4=0\\N_2+N_3=0\end{array}\right\}$$

der Halbierungspunkte gegenüberliegender Kanten des Tetraeders.

---

3. Abschnitt.

Flächen zweiter Ordnung.

38. Eintheilung. Man unterscheidet folgende Flächen zweiter Ordnung:

I. Das Ellipsoid mit der Gleichung

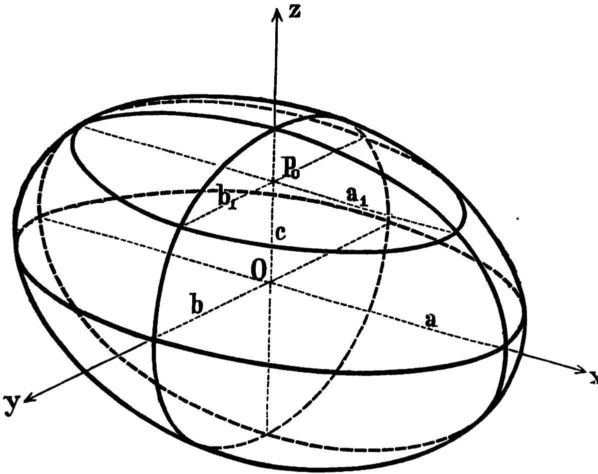
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Da x nur Werte zwischen — a und a, y zwischen — b und b, z zwischen — c und c annehmen kann, wenn imaginäre Punkte ausgeschlossen sind, ist das Ellipsoid eine allseitig begrenzte Fläche, welche der Form ihrer Gleichung wegen von jeder Coordinatenebene in zwei symmetrische Hälften getheilt wird, also den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat. Die Coordinatenebenen sind die Hauptebenen, die Coordinatenaxen die Hauptdurchmesser des Ellipsoides. Von seinen Hauptebenen wird das Ellipsoid nach den Ellipsen (Fig. 104)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

geschnitten, welche die Hauptschnitte heißen.

Fig. 104.



Auf den Hauptdurchmessern schneidet es drei Paar Scheitelpunkte in den Abständen — a und a, — b und b, — c und c vom Nullpunkte aus; a, b, c sind die Hauptradien (Halbaxen) des Ellipsoides. Die Schnittlinie mit einer der xy im Abstande z_0 parallelen Ebene hat die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{{z_0}^2}{c^2} - 1 = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{{z_0}^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{{z_0}^2}{c^2}\right)} - 1 = 0$$

zur Projection, ist also selbst eine dazu congruente Ellipse mit dem Mittelpunkte in dem Punkte $P_0(0, 0, z_0)$ der z-Axe und den Halbaxen $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}$; $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}$. Wegen des constanten Verhältnisses $a_1 : b_1 = a : b$ sind sämmtliche der xy-Ebene parallelen Schnittellipsen ähnlich. Für $z = \pm c$ wird $a_1 = b_1 = 0$ und die betreffende Ellipse zieht sich zu einem Punkt zusammen. Wird (absolut genommen) $z > c$, dann sind Halbaxen und Schnittellipse imaginär. Die den beiden anderen Hauptebenen parallelen Schnittlinien sind ebenfalls Ellipsen.

Sind zwei Halbaxen des Ellipsoides gleich, z. B. $a = b$, so geht es in ein Rotationsellipsoid über mit der z-Axe als Drehungsaxe:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

denn es sind nun alle Schnitte parallel der xy-Ebene Kreise mit dem Mittelpunkte in der z-Axe.

Das Ellipsoid wird eine Kugel, wenn $a = b = c$; seine Gleichung nimmt nun die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

an.

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

kann durch reale Coordinaten nicht befriedigt werden. Man nennt ihr geometrisches Äquivalent das imaginäre Ellipsoid. Es besitzt dieselben Hauptebenen und Hauptdurchmesser und denselben Mittelpunkt wie das entsprechende reale Ellipsoid, hingegen die imaginären Halbaxen ai, bi, ci und nur imaginäre Punkte. Demgemäß stellen die Gleichungen

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 0$$

ein imaginäres Rotationsellipsoid und eine imaginäre Kugel vor.

II. Das eintheilige Hyperboloid mit der Gleichung

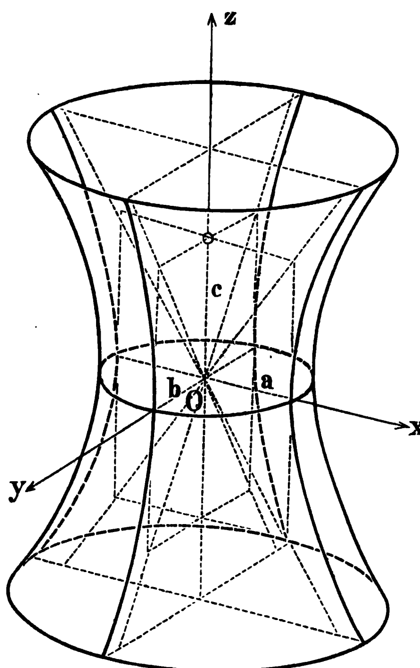
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Da z alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, x und y alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ mit Ausnahme jener erhalten dürfen, für welche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1,$$

erstreckt sich diese Fläche in das Unendliche. Die Coordinatenebenen, Coordinatenaxen und der Nullpunkt sind Hauptebenen, Hauptdurchmesser und Mittelpunkt des Hyperboloides.

Fig. 105.



Von den Hauptradien sind zwei real mit den Längen a, b, der dritte ist imaginär und gleich c i.

Die Fläche wird (Fig. 105) von der x y-Ebene nach der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

(Kehlellipse), von der x z- und y z-Ebene nach den Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0; \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

geschnitten, deren Brennpunktsaxen in der x- und y-Axe liegen, während die Nebenaxen (imaginären Axen) in der z-Axe zusammenfallen. Man überzeugt sich ferner leicht, dass alle Schnittlinien parallel der x y-Ebene reale Ellipsen, jene parallel der x z- und y z-Ebene Hyperbeln sind. Die Fläche ist daher zusammenhängend.

Wenn $a=b$, stellt die Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

ein eintheiliges Rotationshyperboloid; wenn $a=b=c$, in der Form

$$x^2+y^2-z^2-a^2=0$$

ein gleichseitiges eintheiliges Rotationshyperboloid vor.

Die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

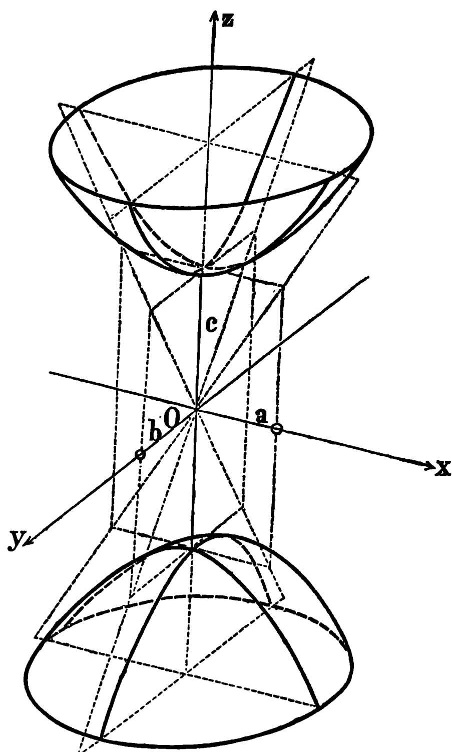
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

können durch Vertauschung von Coordinatenaxen auf die behandelte Form zurückgeführt werden, stellen daher keine neuen Flächen vor.

III. Das zweitheilige Hyperboloid mit der Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Fig. 106.



Da x und y alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können, z alle Werte von $-\infty$ und $+\infty$, mit Ausnahme der zwischen $-c$ und $+c$ liegenden erhalten darf, erstreckt sich die Fläche in das Unendliche. Hauptebenen, Hauptdurchmesser und Mittelpunkt sind dieselben wie beim einfachen Hyperboloid. Von den Hauptradien ist einer real mit der Länge c, die anderen sind imaginär und gleich a i, b i.

Die Fläche wird (Fig. 106) von der x y-Ebene nach der imaginären Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

von der x z- und y z-Ebene nach den Hyperbeln

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

geschnitten, deren Nebenaxen in der x- und y-Axe liegen, während die Brennpunktsaxen in der z-Axe zusammenfallen. Man überzeugt sich leicht, dass die Schnittlinien parallel der x y-Ebene Ellipsen sind, reale, so lange (absolut genommen) der Abstand der schneidenden

Ebene $z_0 > c$, imaginäre, wenn $z_0 < c$. Daher besteht die Fläche aus zwei getrennten Theilen. Die Schnittlinien parallel den anderen Hauptebenen sind Hyperbeln.

Wenn $a = b$, stellt die Gleichung

$$-\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ein zweitheiliges Rotationshyperboloid, wenn $a = b = c$ in der Form

$$-x^2 - y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

ein gleichseitiges zweitheiliges Rotationshyperboloid vor.

Die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

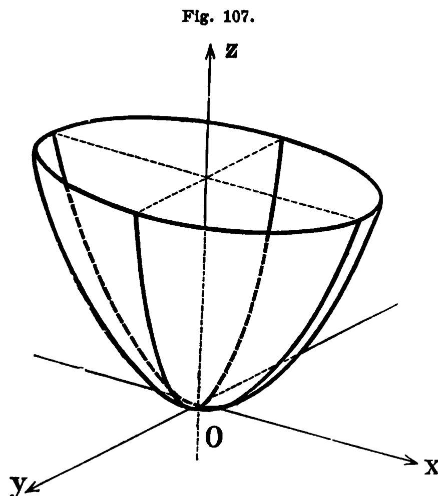
repräsentieren ebenfalls zweitheilige Hyperboloide.

IV. Das elliptische Paraboloid mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0,$$

$p > 0$; $q > 0$. Da x und y alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können und z alle Werte von 0 bis $+\infty$ erhalten darf, erstreckt sich die Fläche von der xy-Ebene an in der Richtung der positiven z-Axe in das Unendliche. Sie ist symmetrisch in Bezug auf die xz- und yz-Ebene, daher sind diese ihre Hauptebenen und die z-Axe ihr Hauptdurchmesser (Axe). Ein Mittelpunkt ist nicht vorhanden, auch fehlen die dritte Hauptebene und zwei in derselben liegende Hauptdurchmesser.

Fig. 107.



Von der xy-Ebene wird (Fig. 107) das elliptische Paraboloid in der zu dem Punkt O zusammengezogenen Ellipse

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$$

(imaginäres Geradenpaar mit

realem Schnittpunkt) geschnitten (berührt) von der x z- und y z-Ebene nach den Parabeln

$$x^2 = 2pz; \quad y^2 = 2qz.$$

Die Schnittlinien parallel der x y-Ebene sind Ellipsen, jene parallel den anderen Coordinatenebenen Parabeln. Wenn $p = q$, stellt die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{p} - 2z = 0$$

ein Rotationsparaboloid vor.

Die Gleichungen

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + 2z = 0;$$
$$\frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{r} \mp 2y = 0;$$
$$\frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{r} \mp 2x = 0;$$

$p > 0$; $q > 0$; $r > 0$ drücken keine neuen Flächen aus.

V. Das hyperbolische Paraboloid mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0.$$

$p > 0$; $q > 0$. Da x, y, z alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können, erstreckt sich die Fläche in das Unendliche. Sie ist symmetrisch in Bezug auf die x z- und y z-Ebene, daher sind diese ihre Hauptebenen und die z-Axe ihr Hauptdurchmesser (Axe). Ein Mittelpunkt ist nicht vorhanden, auch fehlen die dritte Hauptebene und zwei in derselben liegende Hauptdurchmesser.

Von der x y-Ebene wird (Fig. 108) das hyperbolische Paraboloid nach dem Geradenpaar

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0,$$

bestehend aus den Geraden

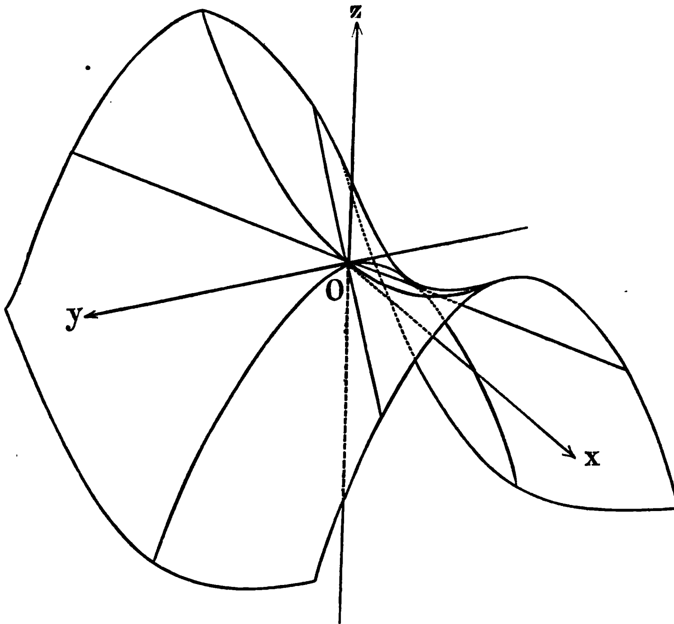
$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0; \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$$

von der x z- und y z-Ebene nach den Parabeln

$$x^2 = 2pz; \quad y^2 = -2qz$$

geschnitten. Die Schnittlinien parallel der x y-Ebene sind Hyperbeln

Fig. 108.



mit parallelen Asymptoten, deren Brennpunktsaxen auf der positiven Seite der x y-Ebene parallel sind der x-Axe, auf der negativen parallel der y-Axe. Die Schnittlinien parallel der x z-Ebene sind nach aufwärts, jene parallel der y z-Ebene nach abwärts gekehrte Parabeln.

Wenn $p = q$, stellt die Gleichung

$$\frac{x^2 - y^2}{p} - 2z = 0$$

ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid vor.

Die Gleichungen

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} + 2z = 0;$$
$$\frac{x^2}{p} - \frac{z^2}{r} \mp 2y = 0;$$
$$\frac{y^2}{q} - \frac{z^2}{r} \mp 2x = 0;$$

$p > 0$; $q > 0$; $r > 0$ drücken keine neuen Flächen aus.

VI. Die Kegelfläche mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Wenn dieser Gleichung die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes P_0 genügen, der vom Nullpunkte den Abstand r_0 hat, so genügen ihr auch die Coordinaten $n x_0$, $n y_0$, $n z_0$ eines beliebigen Punktes P'_0 der Geraden $O P_0$, der von O den Abstand $n r_0$ hat, folglich liegt die ganze Gerade $O P_0$ in der Fläche, ebenso die Geraden $O P_1$, $O P_2$, . . ., man hat es demnach mit einer Kegelfläche zu thun, deren Mittelpunkt im Nullpunkte liegt.

Die Schnittlinien parallel der x y-Ebene sind Ellipsen, jene parallel den anderen Coordinatenebenen Hyperbeln. Von den Coordinatenebenen selbst wird die Fläche nach drei Geradenpaaren geschnitten, von welchen das in der x y-Ebene imaginär ist.

Die Coordinatenebenen theilen die Fläche symmetrisch, sind also Hauptebenen, die Coordinatenaxen Hauptdurchmesser der Kegelfläche.

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

kann von realen Coordinaten nicht befriedigt werden; ihr geometrisches Äquivalent heißt der imaginäre Kegel. Er hat einen realen Mittelpunkt, reale Hauptebenen und Hauptdurchmesser.

Wenn $a = b$, stellt die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} \mp \frac{z^2}{c^2} = 0$$

einen realen oder imaginären Rotationskegel vor.

Durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

u. s. w.

werden ebenfalls Kegelflächen repräsentiert.

VII. Cylinderflächen und Ebenenpaare. Die Gleichung

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

stellt im allgemeinen eine Cylinderfläche vor, deren Erzeugende parallel sind der z-Axe, während die Leitlinie in der x y-Ebene durch dieselbe Gleichung ausgedrückt wird und ein Kegelschnitt ist. Danach unterscheidet man elliptische (reale oder imaginäre), hyperbolische und parabolische Cylinderflächen. Degeneriert die Leitlinie zu einem Geradenpaar, so geht die Cylinderfläche in ein Ebenenpaar über, das aus zwei realen, imaginären, sich schneidenden, parallelen oder vereinigten Ebenen zusammengesetzt sein kann. Die Schnittlinie eines Paares realer oder imaginärer Ebenen ist immer real und bei parallelen Ebenen unendlich fern.

VIII. Das Ellipsoid, die Hyperboloide und die Paraboloide können unter der Bezeichnung »ordinäre Flächen zweiter Ordnung« zusammengefasst werden. Unter ihnen befinden sich zwei Regelflächen, nämlich das eintheilige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

Denn schreibt man z. B. die Gleichung des eintheiligen Hyperboloides in der Form

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)=0$$

und setzt nun

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

so wird

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right);$$

folglich erscheint die Gleichung der Fläche darstellbar durch Elimination des Parameters λ aus den Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=0;$$
$$\left(1-\frac{y}{b}\right)-\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0,$$

daher die Fläche selbst als das Erzeugnis der durch diese Gleichungen ausgedrückten projectivischen Ebenenbüschel. (Vgl. Art. 32.)

Ebenso stellt sich das hyperbolische Paraboloid als Erzeugnis der projectivischen Ebenenbüschel

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}-\lambda=0;$$
$$\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)-2z=0$$

dar, denn durch Elimination des Parameters λ geht die Gleichung

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$$

hervor.

Bei den anderen ordinären Flächen zweiter Ordnung wird ein solcher Nachweis durch das Auftreten imaginärer Coëfficienten undurchführbar, sie sind daher keine Regelflächen.

Die Kegel- und Cylinderflächen können unter der Bezeichnung »singuläre Flächen« zusammengefasst, die Ebenenpaare als »degenerierte Flächen« angesehen werden.

Denkt man die im vorstehenden angeführten speciellen Gleichungen auf ein beliebiges Coordinatensystem transformiert, so gehen die einfachen Formen derselben in die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades über; letztere kann daher irgend eine der besprochenen Flächen oder Ebenenpaare vorstellen. Unter welchen Bedingungen einer dieser Fälle eintritt und ob auch noch andere Flächen in Frage kommen können, das bildet den Gegenstand besonderer Untersuchungen.

39. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades. Symbolische Bezeichnungen und Rechnungsoperationen. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades wird vortheilhaft in der Form geschrieben:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Setzt man

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = Q;$$
$$2a_{11}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z = L;$$
$$a_{44} = C,$$

bezeichnet ferner das ganze Gleichungspolynom mit U, so ergeben sich die mehr oder minder ausführlichen Abkürzungen

$$Q + L + C = 0$$

und

$$U = 0.$$

Die an das Quadrat eines linearen, viergliedrigen Ausdruckes erinnernde Form des Gleichungspolynoms führt auf dessen Darstellung durch das symbolische Quadrat

$$U \equiv \{a_1x + a_2y + a_3z + a_4\}^2,$$

welches so zu verstehen ist, dass nach Durchführung der angezeigten Rechnungsoperation in dem erhaltenen Ausdruck

$$a_1{}^2 x^2 + a_2{}^2 y^2 + a_3{}^2 z^2 + 2 a_1 a_2 x y + 2 a_1 a_3 x z + 2 a_2 a_3 y z + \\ + 2 a_1 a_4 x + 2 a_2 a_4 y + 2 a_3 a_4 z + a_4{}^2$$

an die Stelle eines Productes $a_i a_k$ der symbolischen Coëfficienten a_i und a_k der Coëfficient a_{ik} gesetzt wird, so dass aus $a_1{}^2 = a_1 . a_1$ der Coëfficient a_{11}, aus $a_1 . a_2$ der Coëfficient a_{12} entsteht u. s. w. Dadurch geht dieser Ausdruck in das Gleichungspolynom über. Die Einhaltung des beschriebenen Vorganges möge in der Folge durch geschweifte Klammern angedeutet und auf Productbildungen ausgedehnt werden; dabei ist zu beachten, dass der Gleichheit der Producte $a_i . a_k$ und $a_k . a_i$ die Gleichheit der Coëfficienten a_{ik} und a_{ki} entspricht.

Eine wichtige Form des Polynoms U geht hervor, wenn man das symbolische Quadrat als Product von zwei gleichen Factoren behandelt und den einen mit jedem Theile des anderen multipliciert. Man erhält

$$U \equiv \{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\} \{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\} \equiv \\ \equiv \{a_1 x\} \{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\} + \{a_2 y\} \{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\} + \\ + \{a_3 z\} \{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\} + \{a_4\} \{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\}.$$

Lässt man hierin bloß die symbolischen Coëfficienten in die zweiten Factoren eingehen, so folgt

$$U \equiv (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14}) x + (a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24}) y + \\ + (a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34}) z + (a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44}) \\ (a_{ik} = a_{ki}),$$

wo nach Durchführung der symbolischen Operation an die Stelle der sie anzeigenden geschwungenen die gewöhnlichen, runden Klammern getreten sind. Durch Einführung der Bezeichnungen

$$u_1 \equiv a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14}; \\ u_2 \equiv a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24}; \\ u_3 \equiv a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34}; \\ u_4 \equiv a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44} \\ (a_{ik} = a_{ki})$$

wird

$$U \equiv u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4.$$

Die Einsetzung der Coordinaten x_i, y_i, z_i des Punktes P_i in die Ausdrücke u_1, u_2, u_3, u_4, U soll durch Hinzufügung des einfachen oder doppelten Weisers i angezeigt werden, so dass

$$u_{1i} \equiv a_{11}x_i + a_{12}y_i + a_{13}z_i + a_{14};$$
$$u_{2i} \equiv a_{21}x_i + a_{22}y_i + a_{23}z_i + a_{24};$$
$$u_{3i} \equiv a_{31}x_i + a_{32}y_i + a_{33}z_i + a_{34};$$
$$u_{4i} \equiv a_{41}x_i + a_{42}y_i + a_{43}z_i + a_{44};$$

$$U_{ii} \equiv \{a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i + a_4\}^2 \equiv$$
$$\equiv \{a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i + a_4\}\{a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i + a_4\} \equiv$$
$$\equiv u_{1i}x_i + u_{2i}y_i + u_{3i}z_i + u_{4i} \equiv a_{11}x_i^2 + a_{22}y_i^2 + a_{33}z_i^2 +$$
$$+ 2a_{12}x_iy_i + 2a_{13}x_iz_i + 2a_{23}y_iz_i + 2a_{14}x_i + 2a_{24}y_i + 2a_{34}z_i + a_{44}.$$

Das öfter auftretende symbolische Product ungleicher Factoren $\{a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i + a_4\}$ und $\{a_1x_k + a_2y_k + a_3z_k + a_4\}$ soll je nach der Reihenfolge der letzteren mit U_{ik} und U_{ki} bezeichnet werden, indem man

$$U_{ik} \equiv \{a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i + a_4\}\{a_1x_k + a_2y_k + a_3z_k + a_4\} \equiv$$
$$\equiv u_{1i}x_k + u_{2i}y_k + u_{3i}z_k + u_{4i};$$
$$U_{ki} \equiv \{a_1x_k + a_2y_k + a_3z_k + a_4\}\{a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i + a_4\} \equiv$$
$$\equiv u_{1k}x_i + u_{2k}y_i + u_{3k}z_i + u_{4k}$$

setzt. Beide Ausdrücke sind offenbar identisch:

$$U_{ik} \equiv U_{ki} \equiv a_{11}x_ix_k + a_{22}y_iy_k + a_{33}z_iz_k + a_{12}(x_iy_k + x_ky_i) +$$
$$+ a_{13}(x_iz_k + x_kz_i) + a_{23}(y_iz_k + y_kz_i) + a_{14}(x_i + x_k) +$$
$$+ a_{24}(y_i + y_k) + a_{34}(z_i + z_k) + a_{44}.$$

Wird in denselben das System x_k, y_k, z_k durch x, y, z ersetzt, so möge der dadurch entstehende Ausdruck mit U_i bezeichnet werden, so dass

$$U_i \equiv u_{1i}x + u_{2i}y + u_{3i}z + u_{4i} \equiv u_1x_i + u_2y_i + u_3z_i + u_4.$$

Durch Einführung der Coordinaten x_i, y_i, z_i oder x_k, y_k, z_k für x, y, z geht der Ausdruck U_i in U_{ii} oder U_{ik} über.

Nach den vorstehenden Ausführungen sind die folgenden Bezeichnungen leicht verständlich:

$$Q \equiv \{a_1x + a_2y + a_3z\}^2; \quad Q_{ii} \equiv \{a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i\}^2;$$

$$V \equiv \{a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma\}^2 \equiv$$
$$\equiv a_{11} \alpha^2 + a_{22} \beta^2 + a_{33} \gamma^2 + 2 a_{12} \alpha \beta + 2 a_{13} \alpha \gamma + 2 a_{23} \beta \gamma \equiv$$
$$\equiv \{a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma\} \{a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma\} \equiv$$
$$\equiv (a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma) \alpha + (a_{21} \alpha + a_{22} \beta + a_{23} \gamma) \beta +$$
$$+ (a_{31} \alpha + a_{32} \beta + a_{33} \gamma) \gamma \equiv$$
$$\equiv v_1 \alpha + v_2 \beta + v_3 \gamma;$$
$$v_1 \equiv a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma; \; v_2 \equiv a_{21} \alpha + a_{22} \beta + a_{23} \gamma;$$
$$v_3 \equiv a_{31} \alpha + a_{32} \beta + a_{33} \gamma; \; v_4 \equiv a_{41} \alpha + a_{42} \beta + a_{43} \gamma;$$
$$V_{ii} \equiv \{a_1 \alpha_i + a_2 \beta_i + a_3 \gamma_i\}^2 \equiv v_{1i} \alpha_i + v_{2i} \beta_i + v_{3i} \gamma_i;$$
$$v_{1i} \equiv a_{11} \alpha_i + a_{12} \beta_i + a_{13} \gamma_i; \; v_{2i} \equiv a_{21} \alpha_i + a_{22} \beta_i + a_{23} \gamma_i;$$
$$v_{3i} \equiv a_{31} \alpha_i + a_{32} \beta_i + a_{33} \gamma_i; \; v_{4i} \equiv a_{41} \alpha_i + a_{42} \beta_i + a_{43} \gamma_i;$$
$$V_{ik} \equiv \{a_1 \alpha_i + a_2 \beta_i + a_3 \gamma_i\} \{a_1 \alpha_k + a_2 \beta_k + a_3 \gamma_k\} \equiv$$
$$\equiv v_{1i} \alpha_k + v_{2i} \beta_k + v_{3i} \gamma_k;$$
$$V_{ki} \equiv \{a_1 \alpha_k + a_2 \beta_k + a_3 \gamma_k\} \{a_1 \alpha_i + a_2 \beta_i + a_3 \gamma_i\} \equiv$$
$$\equiv v_{1k} \alpha_i + v_{2k} \beta_i + v_{3k} \gamma_i;$$
$$V_{ik} \equiv V_{ki} \equiv a_{11} \alpha_i \alpha_k + a_{22} \beta_i \beta_k + a_{33} \gamma_i \gamma_k + a_{12} (\alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i) +$$
$$+ a_{13} (\alpha_i \gamma_k + \alpha_k \gamma_i) + a_{23} (\beta_i \gamma_k + \beta_k \gamma_i).$$

40. Die Discriminante. Die aus den Coëfficienten der linearen Ausdrücke

$$u_1 \equiv a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14};$$
$$u_2 \equiv a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24};$$
$$u_3 \equiv a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34};$$
$$u_4 \equiv a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44}$$

gebildete, wegen $a_{ik} = a_{ki}$ symmetrische Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

wird die Discriminante der Gleichung $U = 0$ genannt. In ihr sind die Unterdeterminanten der Elemente der Hauptdiagonale symmetrisch und jene der symmetrisch zur ersten Diagonale liegenden Elemente einander gleich: $A_{ik} = A_{ki}$.

In der Unterdeterminante A_{ik} soll die Unterdeterminante des Elementes a_{rs} mit $A_{\substack{ik \\ rs}}$ bezeichnet werden. Eine Ausnahme wird nur die symmetrische Unterdeterminante des Elementes a_{44}:

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bilden, deren Unterdeterminanten sehr häufig auftreten und deshalb mit $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{ik}, \ldots$ bezeichnet werden mögen.

Die Berechnung der Discriminante erfolgt am besten mit Hilfe der Unterdeterminanten α_{ik} (I. Th., Art. 5, *e*) indem man zunächst

$$\begin{aligned} -A_{41} &= a_{14}\alpha_{11} + a_{24}\alpha_{21} + a_{34}\alpha_{31}; \\ -A_{42} &= a_{14}\alpha_{12} + a_{24}\alpha_{22} + a_{34}\alpha_{32}; \\ -A_{43} &= a_{14}\alpha_{13} + a_{24}\alpha_{23} + a_{34}\alpha_{33}; \\ A_{44} &= a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + a_{i3}\alpha_{i3} \end{aligned}$$

und dann

$$A = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}$$

ermittelt.

Man findet leicht (I. Th., Art. 16, Aufg. *f*) die Beziehungen

$$\begin{aligned} A_{11}A_{44} - A_{14}^2 &= \alpha_{11}A; \quad & A_{12}A_{44} - A_{14}A_{24} &= \alpha_{12}A; \\ A_{22}A_{44} - A_{24}^2 &= \alpha_{22}A; \quad & A_{13}A_{44} - A_{14}A_{34} &= \alpha_{13}A; \\ A_{33}A_{44} - A_{34}^2 &= \alpha_{33}A; \quad & A_{23}A_{44} - A_{24}A_{34} &= \alpha_{23}A. \end{aligned}$$

Ist $A_{44} = 0$, ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}A &= -A_{14}^2; \quad & \alpha_{12}A &= -A_{14}A_{24} \\ \alpha_{22}A &= -A_{24}^2; \quad & \alpha_{13}A &= -A_{14}A_{34} \\ \alpha_{33}A &= -A_{34}^2; \quad & \alpha_{23}A &= -A_{24}A_{34} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (56$$

daher haben dann $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ gleiche Vorzeichen, die entgegengesetzt sind jenem von A. Ferner besteht in diesem Falle die Beziehung

$$\alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{21} : \alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33} = A_{41} : A_{42} : A_{43}.$$

Ist hingegen $A = 0$, so folgt aus denselben Gleichungen, dass

$$A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} : A_{i4} = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4}$$

und dass die Unterdeterminanten $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ dann gleich bezeichnete Größen sein müssen.

Wenn $A = 0$ und $A_{44} = 0$, ist auch $A_{14} = A_{41} = 0$; $A_{24} = A_{42} = 0$; $A_{34} = A_{43} = 0$ und $\alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3} = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3}$ $(i, k = 1, 2, 3)$.

Wenn schließlich $A = 0$; $A_{44} = 0$; $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$, so verschwinden überhaupt alle Unterdeterminanten der Discriminante. Denn $A_{41} = A_{14}$; $A_{42} = A_{24}$; $A_{43} = A_{34}$ verschwinden schon wegen der beiden ersten Bedingungen. Nun ist aber in diesem Falle noch

$$0 : A_{12} : A_{13} = A_{21} : 0 : A_{23} = A_{31} : A_{32} : 0,$$

also auch

$$A_{12} = A_{21} = 0; \quad A_{13} = A_{31} = 0; \quad A_{23} = A_{32} = 0.$$

41. Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades. Die Transformation der Gleichung $U = 0$ auf ein neues Coordinatensystem (x', y', z'), dessen Axen den alten im gleichen Sinne parallel sind, geschieht mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$x = x_0 + x'; \quad y = y_0 + y'; \quad z = z_0 + z',$$

wenn P_0 der neue Nullpunkt ist. Dadurch geht die Gleichung

$$\{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\}^2 = 0$$

in

$$\{a_1 (x_0 + x') + a_2 (y_0 + y') + a_3 (z_0 + z') + a_4\}^2 = 0$$

oder

$$\{(a_1 x' + a_2 y' + a_3 z') + (a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 z_0 + a_4)\}^2 = 0,$$

über, also nach Durchführung der angezeigten Operation und Weglassung der Strichweiser in

$$Q + 2 u_{10} x + 2 u_{20} y + 2 u_{30} z + U_{00} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (57$$

Der Übergang auf das beliebige neue Coordinatensystem, dessen Nullpunkt P_0 ist und dessen Axen x', y', z' die Richtungscoordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ haben, wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'; \\ y &= y_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'; \\ z &= z_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}$$

vermittelt. Man erhält

$$\begin{aligned} \{a_1 (x_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z') + a_2 (y_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z') + \\ + a_3 (z_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z') + a_4\}^2 = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \{(a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1) x' + (a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2) y' + \\ + (a_1 \alpha_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) z' + (a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 z_0 + a_4)\}^2 = 0, \end{aligned}$$

woraus durch Ausführung der angezeigten Operation und Weglassung der Strichweiser die Gleichung

$$V_{11} x^2 + V_{22} y^2 + V_{33} z^2 + 2 V_{12} x y + 2 V_{13} x z + 2 V_{23} y z +$$

$$+ 2(u_{10}\alpha_1 + u_{20}\beta_1 + u_{30}\gamma_1)x +$$
$$+ 2(u_{10}\alpha_2 + u_{20}\beta_2 + u_{30}\gamma_2)y +$$
$$+ 2(u_{10}\alpha_3 + u_{20}\beta_3 + u_{30}\gamma_3)z + U_{00} = 0 \quad . \quad . \quad (58$$

hervorgeht.

42. Schnittlinien der Flächen zweiter Ordnung mit den Coordinatenebenen und mit beliebigen Ebenen. Die Gleichungen der Schnittlinien einer Fläche zweiter Ordnung mit den Coordinatenebenen ergeben sich, indem man in der allgemeinen Gleichung

$$\{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\}^2 = 0$$

x, y oder z gleich Null setzt.

Also hat die Schnittlinie mit der xy-Ebene die Gleichung

$$\{a_1 x + a_2 y + a_4\}^2 = 0$$

oder

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0 \quad . \quad . \quad (59$$

mit der Discriminante

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

in welcher die Elemente der dritten Zeile die Unterdeterminanten

$$A_{\substack{33\\41}} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}; \; A_{\substack{33\\42}} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}; \; A_{\substack{33\\44}} = \alpha_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

haben. Demnach ist die Schnittlinie eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, je nachdem $\alpha_{33} \lesseqgtr 0$; ein Geradenpaar, wenn $A_{33} = 0$; ein paralleles, wenn auch $\alpha_{33} = 0$.

Die Schnittlinie mit der yz-Ebene hat die Gleichung

$$\{a_2 y + a_3 z + a_4\}^2 = 0$$

oder

$$a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad . \quad (59^{I}$$

mit der Discriminante

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

und den Unterdeterminanten der Elemente der dritten Zeile

$$A_{\substack{11\\42}} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}; \; A_{\substack{11\\43}} = -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}; \; A_{\substack{11\\44}} = \alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Schnittlinie ist eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, je nachdem $\alpha_{11} \gtreqless 0$; ein Geradenpaar, wenn $A_{11} = 0$; ein paralleles, wenn auch $\alpha_{11} = 0$.

Die Schnittlinie mit der xz-Ebene hat die Gleichung

$$\{a_1 x + a_3 z + a_4\}^2 = 0$$

oder

$$a_{11} x^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{13} x z + 2 a_{14} x + 2 a_{34} z + a_{44} = 0 \quad . \quad (59^{II}$$

mit der Discriminante

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

und den Unterdeterminanten der Elemente der dritten Zeile

$$\underset{41}{A_{22}} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}; \; \underset{43}{A_{22}} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}; \; \underset{44}{A_{22}} = \alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Schnittlinie ist eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, je nachdem $\alpha_{22} \gtreqless 0$; ein Geradenpaar, wenn $A_{22} = 0$, ein paralleles, wenn auch $\alpha_{22} = 0$.

Um die Schnittlinie einer Fläche zweiter Ordnung mit einer beliebigen Ebene zu bestimmen, legt man diese durch einen Punkt P_0 und zwei durch diesen gehende, zu einander senkrechte Geraden x', y' fest. Betrachtet man nun die Ebene als die $x'y'$-Ebene eines neuen Coordinatensystems $(x'y'z')$, transformiert die Gleichung $U = 0$ auf dieses und setzt dann $z' = 0$, so ergibt sich (nach Weglassung der Strichweiser, vgl. Art. 41) die Gleichung

$$\begin{aligned} V_{11} x^2 + V_{22} y^2 + 2 V_{12} x y + 2 (u_{10} \alpha_1 + u_{20} \beta_1 + u_{30} \gamma_1) x + \\ + 2 (u_{10} \alpha_2 + u_{20} \beta_2 + u_{30} \gamma_2) y + U_{00} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (60 \end{aligned}$$

der Schnittlinie, bezogen auf das ebene Coordinatensystem $(x'y')$. Sie ist vom zweiten Grade, daher wird eine Fläche zweiter Ordnung von jeder Ebene nach einer Linie zweiter Ordnung geschnitten, die aber auch zu einem Geradenpaar degeneriert sein kann. Da die Gattung der Schnittlinie, die Richtung ihrer Hauptdurchmesser und das Verhältnis der Hauptradien nur von den Coëfficienten V_{11}, V_{22}, V_{12} abhängen, letztere aber bei einer Parallelverschiebung der Ebene ungeändert bleiben, weil sie blos die Richtungscoordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ enthalten, sind die Schnittlinien einer Fläche zweiter Ordnung mit parallelen Ebenen ähnlich und haben auch ähnliche Lage.

43. Schnittpunkte der Flächen zweiter Ordnung mit den Coordinatenaxen und mit beliebigen Geraden. Die Schnittpunkte der Fläche $U = 0$ mit den Coordinatenaxen sind durch die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{matrix} U = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix} U = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix} U = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

dargestellt. Aus denselben folgen die Gleichungen

$$a_{11} x^2 + 2 a_{14} x + a_{44} = 0;$$
$$a_{22} y^2 + 2 a_{24} y + a_{44} = 0;$$
$$a_{33} z^2 + 2 a_{34} z + a_{44} = 0,$$

durch deren Auflösung sich die Abstände der Schnittpunkte vom Nullpunkte des Coordinatensystems ergeben:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-a_{14} \pm \sqrt{a_{14}^2 - a_{11} a_{44}}}{a_{11}} = \frac{-a_{14} \pm \sqrt{-A_{\substack{22\\33}}}}{a_{11}} \\ y &= \frac{-a_{24} \pm \sqrt{a_{24}^2 - a_{22} a_{44}}}{a_{22}} = \frac{-a_{24} \pm \sqrt{-A_{\substack{33\\11}}}}{a_{22}} \\ z &= \frac{-a_{34} \pm \sqrt{a_{34}^2 - a_{33} a_{44}}}{a_{33}} = \frac{-a_{34} \pm \sqrt{-A_{\substack{11\\22}}}}{a_{33}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . (61$$

Daher wird die Fläche von jeder Axe in zwei Punkten getroffen, die real getrennt, zusammenfallend oder imaginär sein können.

Die Schnittpunkte der Fläche $U = 0$ mit der Geraden $P_i P_k$ ergeben sich aus folgender Betrachtung: Der Schnittpunkt P habe in Bezug auf die Punkte P_i und P_k das Theilverhältnis λ. Seine Coordinaten

$$\frac{x_i - \lambda x_k}{1 - \lambda}; \quad \frac{y_i - \lambda y_k}{1 - \lambda}; \quad \frac{z_i - \lambda z_k}{1 - \lambda}$$

genügen der Gleichung der Fläche

$$\{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\}^2 = 0.$$

Durch Einsetzung erhält man

$$\left\{a_1 \frac{x_i - \lambda x_k}{1 - \lambda} + a_2 \frac{y_i - \lambda y_k}{1 - \lambda} + a_3 \frac{z_i - \lambda z_k}{1 - \lambda} + a_4 \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda}\right\}^2 = 0$$

oder nach Weglassung des Factors $\frac{1}{(1-\lambda)^2}$ und Trennung der Glieder mit oder ohne λ

$$\left\{(a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 z_i + a_4) - \lambda (a_1 x_k + a_2 y_k + a_3 z_k + a_4)\right\}^2 = 0$$

und nach Ausführung der symbolischen Operation

$$U_{ii} - 2 U_{ik} \lambda + U_{kk} \lambda^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62$$

Da sich aus dieser in λ quadratischen Gleichung zwei reale, verschiedene oder gleiche, oder zwei imaginäre Werte für λ ergeben, kann man den Satz aussprechen:

»Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten, die real getrennt, vereinigt oder imaginär sein können.«

Aus dem berechneten Theilverhältnisse eines Schnittpunktes ergeben sich seine Coordinaten ohne Schwierigkeit.

Um die Punkte zu ermitteln, in welchen die Fläche $U = 0$ von der Geraden getroffen wird, die durch den Punkt $P_0 (x_0, y_0, z_0)$ geht und die Richtungscoordinaten α, β, γ hat, bezeichnet man mit r den unbekannten Abstand eines derselben von P_0; die Coordinaten $x = x_0 + r\alpha$; $y = y_0 + r\beta$; $z = z_0 + r\gamma$ dieses Punktes genügen der Gleichung

$$\left\{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\right\}^2 = 0,$$

so dass man

$$\left\{a_1 (x_0 + r\alpha) + a_2 (y_0 + r\beta) + a_3 (z_0 + r\gamma) + a_4\right\}^2 = 0$$

oder

$$\left\{(a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma) r + (a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 z_0 + a_4)\right\}^2 = 0$$

erhält, woraus sich die Gleichung

$$V r^2 + 2 (u_{10} \alpha + u_{20} \beta + u_{30} \gamma) r + U_{00} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (63$$

für die Berechnung von r ergibt, welche die Existenz von zwei Schnittpunkten neuerlich bestätigt.

Aufgabe.

Man bestimme die Schnittpunkte der Fläche

$$2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 4xy - 8xz - 12yz - 2x + 2y + 14z - 12 = 0$$

mit den Coordinatenaxen, ferner mit der Verbindungslinie der Punkte $P_1 (-1, -3, -5)$; $P_2 (3, 5, 3)$ und mit einer durch den Punkt $P_0 (5, 3, 3)$ gehenden Geraden, welche die Richtung $2 : 1 : 2$ hat. (Vgl. I. Abth., Art. 34, Aufg.)

44. Die homogene Gleichung zweiten Grades. Die homogene Gleichung $Q = 0$ oder

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

repräsentiert eine durch den Nullpunkt gehende Fläche, denn es genügen ihr dessen Coordinaten. Die Verbindungslinie des Nullpunktes mit einem Punkte P der Fläche habe die Richtungscoordinaten α, β, γ und es sei $OP = r$. Die Coordinaten $r\alpha, r\beta, r\gamma$ des Punktes P genügen der Gleichung $Q = 0$. Durch Einsetzung erhält man

$$r^2(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma) = 0$$

oder (s. Art. 39)

$$r^2 V = 0.$$

Da r nicht Null ist, muss

$$V = 0$$

sein, und sobald diese Bedingung erfüllt wird, ist für jeden Wert von r auch $r^2 V = 0$, d. h. die Gleichung der Fläche wird von den Coordinaten eines jeden Punktes auf dem Strahle OP befriedigt, der Strahl liegt in der Fläche. Durch Wiederholung dieser Betrachtung an anderen Punkten der letzteren gelangt man zu dem Schlusse, dass die Fläche aus unendlich vielen, durch den Nullpunkt gehenden Strahlen (Erzeugenden) gebildet wird, demnach eine Kegelfläche ist, deren Mittelpunkt mit dem Nullpunkte zusammenfällt; die Richtungscoordinaten ihrer Erzeugenden sind durch die Gleichung $V = 0$ verbunden, zu welcher noch die Grundgleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ tritt.

Um die Beschaffenheit der Kegelfläche zu erkennen, ist es nöthig, sich eine Leitlinie derselben zu verschaffen; als solche kann die Schnittlinie einer nicht durch den Nullpunkt gehenden Ebene dienen. Man nimmt diese am einfachsten parallel einer Coordinatenebene an.

Die Projection der Schnittlinie mit einer Ebene parallel der xy-Ebene im Abstande $z = 1$ ist der Schnittlinie congruent und hat die Gleichung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

mit der Discriminante

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

daher ist, so lange $A_{44} \gtrless 0$, die gewählte Leitlinie eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem $\alpha_{33} \gtreqless 0$; eine imaginäre Ellipse, wenn $\alpha_{33} > 0$ und $a_{ii} A_{44} > 0$ $(i = 1, 2)$. In den drei ersten Fällen hat man es mit einer realen, im letzten Falle mit einer imaginären Kegelfläche zu thun.

Ist $A_{44} = 0$, so degeneriert die Leitlinie zu einem Geradenpaar, die Kegelfläche aber zu einem Ebenenpaar. Die Verbindungslinie des immer realen Mittelpunktes (Schnittpunktes) des Geradenpaares mit dem Nullpunkte ist die immer reale Axe des Ebenenpaares.

Dem realen, nichtparallelen oder parallelen Geradenpaar ($\alpha_{33} < 0$ oder $\alpha_{33} = 0$, $\alpha_{ii} < 0$; $i = 1, 2$) entspricht ein reales, dem imaginären Geradenpaare ($\alpha_{33} > 0$ oder $\alpha_{33} = 0$, $\alpha_{ii} > 0$; $i = 1, 2$) ein imaginäres Ebenenpaar; dem Paare zusammenfallender Geraden ($\alpha_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$) ein Paar vereinigter Ebenen. Der Mittelpunkt des Geradenpaares hat die Coordinaten $\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}$; $\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}}$; 1 und bestimmt die Richtung $\alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33}$ der Axe des Ebenenpaares. Wegen $A_{44} = 0$ ist

$$\alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33} = \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{21} : \alpha_{22} : \alpha_{23};$$

man hat also drei Serien von Richtungscomponenten der Axe zur Verfügung und kann, wenn jene einer Serie verschwinden, eine andere Serie benützen, so z. B. wenn die Geraden des Paares parallel sind, also $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0$; dann hat die Axe des Ebenenpaares die Richtung

$$\alpha_{11} : \alpha_{12} : 0 = \alpha_{21} : \alpha_{22} : 0,$$

liegt daher in der xy-Ebene.

Schneidet man die Kegelfläche durch eine Ebene im Abstande $x = 1$ oder $y = 1$ parallel der yz- oder zx-Ebene, so ist immer A_{44} die Discriminante der Gleichung der Schnittlinie, an die Stelle von α_{33} aber tritt α_{11} oder α_{22} u. s. w. Mit Rücksicht hierauf sind die Ergebnisse in den nachfolgenden Tabellen zusammengestellt:

Kennzeichen		Die Gleichung $Q = 0$ stellt vor	
$A_{44} \gtrless 0$	$\alpha_{ii} > 0$; $a_{ii} A_{44} > 0$; $i = 1, 2, 3$	eine imaginäre	Kegelfläche
	$\alpha_{ii} > 0$; $i = 1, 2, 3$ $a_{kk} A_{44} < 0$; $k = 2, 3, 1$ $a_{ll} A_{44} < 0$; $l = 3, 1, 2$	eine reale	
	$\alpha_{ii} \leqq 0$; $i = 1, 2, 3$		

Kennzeichen		Die Gleichung $Q = 0$ stellt vor	
$A_{44} = 0$	$\alpha_{ii} \geqq 0;\ i = 1, 2, 3$ aber nicht alle α_{ii} Null	ein imaginäres	Ebenenpaar.
	$\alpha_{ii} \leqq 0;\ i = 1, 2, 3$ aber nicht alle α_{ii} Null	ein reales	
	$\alpha_{ii} = 0;\ i = 1, 2, 3$	ein vereinigtes	

45. Tangenten- und Polarebenen der Flächen zweiter Ordnung. Die Schnittpunkte P' und P'' der Fläche $U = 0$ mit der Geraden $P_i P_k$ (Art. 43) sind durch die Gleichung

$$U_{ii} - 2 U_{ik} \lambda + U_{kk} \lambda^2 = 0$$

bestimmt, aus welcher sich nämlich ihre Theilverhältnisse in Bezug auf die Punkte P_i und P_k

$$\lambda' = \frac{U_{ik} + \sqrt{U_{ik}^2 - U_{ii} U_{kk}}}{U_{kk}}$$

$$\lambda'' = \frac{U_{ik} - \sqrt{U_{ik}^2 - U_{ii} U_{kk}}}{U_{kk}}$$

ergeben. Soll die Fläche von der Geraden berührt werden, müssen die Punkte P' und P'' zusammenfallen, die Theilverhältnisse also gleich werden, was nur eintreten kann, wenn

$$U_{ii} U_{kk} - U_{ik}^2 = 0.$$

Versteht man unter P_i einen festen, nicht auf der Fläche liegenden Punkt ($U_{ii} \gtrless 0$), so drückt diese Gleichung aus, dass die Coordinaten des Punktes P_k der Gleichung

$$U_{ii} U - U_i^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64$$

genügen müssen, damit die Gerade $P_i P_k$ eine Tangente der Fläche sei, d. h. damit P_k auf einer durch den festen, gegebenen Punkt P_i gehenden Tangente liege. Daher wird durch diese Gleichung der Ort aller Punkte repräsentiert, deren Verbindungslinien mit P_i Tangenten der Fläche sind, also die an letztere aus P_i gelegte berührende Kegelfläche, welche somit von der zweiten Ordnung ist. Je nach der Lage des Punktes P_i ist dieselbe real oder imaginär. Die Berührungspunkte ergeben sich als gemeinsame Punkte des Tangentenkegels und der Fläche aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} U_{ii}\,U - U_i^2 = 0 \\ U = 0 \end{array}\right\},$$

oder, weil sich die erste Gleichung wegen der zweiten auf $U_i = 0$ reduciert, aus dem System

$$\left.\begin{array}{l} U_i = 0 \\ U = 0 \end{array}\right\};$$

sie bilden also die Schnittlinie der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene E_i, deren Gleichung $U_i = 0$ in den beiden Formen

$$\left.\begin{array}{r} u_{1i}x + u_{2i}y + u_{3i}z + u_{4i} = 0 \\ u_1 x_i + u_2 y_i + u_3 z_i + u_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (65$$
$$(U_{ii} \gtrless 0)$$

geschrieben werden kann. Die Ebene E_i wird die Polarebene des Punktes P_i und dieser wieder der Pol der Ebene E_i in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung genannt.

So wie die Polarebene durch den Pol ist auch der Pol durch die Polarebene vollkommen bestimmt. (Vgl. I. Abth., Art. 36).

Die Polarebene eines Punktes ist immer real, auch wenn der Tangentenkegel und mit ihm die Linie der Berührungspunkte imaginär sind; sie bietet in dem letzteren Falle das Beispiel der realen Ebene einer imaginären ebenen Linie.

Wird auf der Polarebene des Punktes P_i ein Punkt P_s angenommen, dessen Coordinaten also der Gleichung $U_i = 0$ genügen müssen, so dass $U_{is} = 0$ wird, so geht die Gleichung

$$U_{ii} - 2\,U_{is}\lambda + U_{ss}\,\lambda^2 = 0,$$

aus der die Theilverhältnisse der Punkte zu berechnen sind, in welchen die Fläche von der Geraden $P_i P_s$ getroffen wird, in

$$U_{ii} + U_{ss}\lambda^2 = 0$$

über und ihre Wurzeln λ', λ'' sind nun entgegengesetzt gleich. Daher sind die Treffpunkte P' und P'' harmonisch zu P_i und P_s. Die Polarebene hat also die Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte von dem Pole harmonisch getrennt ist durch die Punkte, in welchen die Verbindungslinie beider die Fläche zweiter Ordnung trifft und sie kann mit Hilfe dieser Eigenschaft construiert werden. Zu diesem Zwecke legt man durch den Pol P_i drei beliebige Geraden g_1, g_2, g_3, welche die Fläche in den Punktepaaren P'_1, P''_1; P'_2, P''_2; P'_3, P''_3 schneiden und bestimmt auf

jeder Geraden den zu P_i in Bezug auf das betreffende Punktepaar harmonischen Punkt. Die Verbindungsebene der so erhaltenen Punkte ist die Polarebene.

Von der Gleichung

$$U_{ii} U - U_i^2 = 0$$

des Tangentenkegels aus dem Punkte P_i an die Fläche $U = 0$ ausgehend, gelangt man zu der Gleichung der Tangentenebene in einem Punkte derselben, wenn man den Punkt P_i auf die Fläche rücken lässt. Dadurch wird $U_{ii} = 0$, die Gleichung des Tangentenkegels geht in

$$U_i^2 = 0$$

über und stellt nun die doppelt zählende Ebene

$$U_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66$$

vor, in welcher Polarebene und Tangentenkegel zusammenfallen, welche also die Tangentenebene der Fläche in dem Punkte P_i ist, zugleich aber auch die Polarebene dieses Punktes. Daher ist eine Tangentenebene die Polarebene ihres Berührungspunktes. Die durchgeführte Untersuchung zeigt, dass die Gleichung

$$U_i = 0$$

die Polarebene oder die Tangentenebene des Punktes P_i repräsentiert, je nachdem $U_{ii} \gtrless 0$ oder $U_{ii} = 0$ und dass der letztere Fall als ein specieller des ersteren angesehen werden kann.

Beispiele und Aufgaben.

a) Gegeben sei die Fläche

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4xz + 6yz - 4x + 2y + 2z - 35 = 0$$

mit der Discriminante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -35 \end{vmatrix}$$

und der Punkt P_0 (3, 2, 5). Die Elemente der 1., 2., 3., 4. Zeile der Discriminante sind die Coëfficienten der Ausdrücke u_1, u_2, u_3, u_4; daher findet man

$$\begin{aligned} u_{10} &= 1.3 - 1.2 + 2.5 - 2 = 9; \\ u_{20} &= -1.3 + 2.2 + 3.5 + 1 = 17; \\ u_{30} &= 2.3 + 3.2 - 1.5 + 1 = 8; \\ u_{40} &= -2.3 + 1.2 + 1.5 - 35 = -34; \end{aligned}$$

$$U_{00} = u_{10} x_0 + u_{20} y_0 + u_{30} z_0 + u_{40} = 9.3 + 17.2 + 8.5 - 34 = 67,$$

d. h. P_0 liegt nicht auf der gegebenen Fläche; demnach ist die Gleichung seiner Polarebene

$$9x + 17y + 8z - 34 = 0;$$

der berührende Kegel aus P_0 hat die Gleichung

$$67(x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4xz + 6yz - 4x + 2y + 2z - 35) - \\ -(9x + 17y + 8z - 34)^2 = 0$$

oder geordnet

$$14x^2 + 155y^2 + 131z^2 + 440xy - 124xz - 130yz - 344x - \\ - 1290y - 678z + 3501 = 0.$$

Da hierin z. B. $\alpha'_{33} = 14 \cdot 155 - 220^2 < 0$, wird die Kegelfläche von der xy-Ebene nach einer Hyperbel geschnitten, ist also real.

Für den Punkt $P_1(2, 3, 1)$ ist

$$u_{11} = -1; \quad u_{21} = 8; \quad u_{31} = 13; \quad u_{41} = -35; \quad U_{11} = 0,$$

er liegt daher auf der Fläche und die Gleichung der Tangentenebene in demselben ist

$$-x + 8y + 13z - 35 = 0.$$

b) Bei dem Ellipsoid und den Hyperboloiden, deren Gleichungen aus

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

durch entsprechende Combination der Vorzeichen hervorgehen, ist

$$A = \begin{vmatrix} \pm\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

für den Punkt P_0 daher

$$u_{10} = \pm\frac{x_0}{a^2}; \quad u_{20} = \pm\frac{y_0}{b^2}; \quad u_{30} = \pm\frac{z_0}{c^2}; \quad u_{40} = -1$$

und die Gleichung der Polar- oder Tangentenebene

$$\pm\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} \pm \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0,$$

und zwar der Polarebene, wenn

$$\pm\frac{x_0^2}{a^2} \pm \frac{y_0^2}{b^2} \pm \frac{z_0^2}{c^2} - 1 \gtrless 0,$$

der Tangentenebene, wenn

$$\pm \frac{x_0^2}{a^2} \pm \frac{y_0^2}{b^2} \pm \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0.$$

c) Bei den Paraboloiden

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} - 2z = 0$$

ist

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

demnach für P_0:

$$u_{10} = \frac{x_0}{p};\ u_{20} = \pm\frac{y_0}{q};\ u_{30} = -1;\ u_{40} = -z_0.$$

Daher stellt die Gleichung

$$\frac{x_0 x}{p} \pm \frac{y_0 y}{q} - (z + z_0) = 0$$

die Polar- oder Tangentenebene von P_0 vor, je nachdem

$$\frac{x_0^2}{p} \pm \frac{y_0^2}{q} - 2z_0 \gtrless 0 \text{ oder } \frac{x_0^2}{p} \pm \frac{y_0^2}{q} - 2z_0 = 0.$$

d) Gegeben sei die Fläche

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 6yz + 4x + 2y + 2z - 23 = 0.$$

Man bestimme die Polarebene und den Tangentenkegel des Nullpunktes, oder der Punkte P_1 (1, 2, 5); P_2 (1, 1, 1); P_3 (1, 1, − 13.)

46. Unendlich ferne Punkte der Flächen zweiter Ordnung. Für die Beurtheilung der Gestalt einer Fläche ist es von Bedeutung zu wissen, ob dieselbe in das Unendliche verläuft, d. h. ob sie unendlich ferne Punkte besitzt. Um sich hierüber Aufschluss zu verschaffen, untersucht man, unter welcher Bedingung eine durch den festen Punkt P_0 gelegte Gerade die Fläche in einem Punkte trifft, dessen Abstand von P_0 unendlich groß ist. Wenn α, β, γ die Richtungscoordinaten der Geraden sind, ergeben sich die Abstände ihrer Treffpunkte (Art. 43) aus der Gleichung

$$Vr^2 + 2(u_{10}\alpha + u_{20}\beta + u_{30}\gamma)r + U_{00} = 0$$

und diese hat eine unendlich große Wurzel, wenn (I. Abth., Art. 29) der Coëfficient von r^2 verschwindet, also

$$V = 0$$

oder ausgeschrieben

$$a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma = 0.$$

Es existieren daher im allgemeinen unendlich viele Geraden von der verlangten Beschaffenheit, deren Richtungen unabhängig von dem Punkte P_0 und nur an die Bedingung

$$V = 0$$

gebunden sind, vermöge welcher die Geraden eine stetige Folge, also eine Kegelfläche mit dem Mittelpunkte in P_0 bilden. Diese Kegelfläche wird die Richtfläche der Fläche zweiter Ordnung genannt. Man erhält ihre Gleichung, indem man auf einer Erzeugenden einen beliebigen Punkt P im Abstande r von P_0 annimmt, $\alpha = \frac{x - x_0}{r}$; $\beta = \frac{y - y_0}{r}$; $\gamma = \frac{z - z_0}{r}$ berechnet und in die Gleichung $V = 0$ einsetzt, welche hiedurch nach Weglassung des Factors $\frac{1}{r^2}$ in

$$a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33}(z - z_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) +$$
$$+ 2a_{13}(x - x_0)(z - z_0) + 2a_{23}(y - y_0)(z - z_0) = 0$$

übergeht. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\{a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0)\}^2 = 0$$

oder

$$\{(a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4) - (a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 z_0 + a_4)\}^2 = 0,$$

so ergibt sich durch Ausführung der symbolischen Erhebung zur zweiten Potenz die Gleichung

$$U - 2U_0 + U_{00} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67$$

der Richtfläche. Lässt man insbesondere P_0 mit dem Nullpunkte zusammenfallen, so erhält sie die einfache Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

oder

$$Q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67^{I}$$

Man erkennt daraus, dass die Richtfläche (Art. 44) eine reale oder imaginäre Kegelfläche ($A_{44} \gtrless 0$), ein reales, imaginäres oder vereinigtes Ebenenpaar sein kann ($A_{44} = 0$).

Ist sie eine imaginäre Kegelfläche, dann hat die in Betracht stehende Fläche keinen unendlich fernen Punkt, befindet sich also vollständig im endlichen Bereich; ist sie eine reale Kegelfläche, ein reales (getrenntes oder vereinigtes) Ebenenpaar, dann hat die Fläche unendlich ferne Punkte nach unendlich vielen Richtungen, die in einer Kegelfläche, in zwei Stellungen oder auch in nur einer Stellung enthalten sind; ist sie endlich ein imaginäres Ebenenpaar, so ist nur eine reale Richtung vorhanden, nämlich jene der immer realen Axe des Ebenenpaares, nach welcher sich die Fläche in das Unendliche erstreckt.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die nach dem Nullpunkte verlegte Richtfläche des realen oder imaginären Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\mp 1=0$$

ist die imaginäre Kegelfläche (Asymptotenkegel)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

b) Die Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0;$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

haben dieselbe, nach dem Nullpunkte verlegte Richtfläche (Asymptotenkegel)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

nämlich einen realen Kegel.

c) Die Paraboloide

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}-2z=0,$$

($p>0$, $q>0$) haben ein Ebenenpaar

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}=0$$

als Richtfläche, das bei dem elliptischen Paraboloid imaginär, bei dem hyperbolischen real ist, in beiden Fällen aber die z-Axe zur Axe hat. Das elliptische Paraboloid erstreckt sich daher nur in der Richtung der z-Axe in das Unendliche.

d) Man untersuche die in den Nullpunkt verlegten Richtflächen der Flächen:

$$2x^2 + 8y^2 - 8xy + 2x + 4y + 6z - 7 = 0;$$
$$x^2 + y^2 - z^2 + 2x + 3 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4xz - 6yz + 5 = 0.$$

47. Mittelpunkt. Radien. Classification der Flächen zweiter Ordnung. Wenn ein Punkt P_0 die Strecke der Treffpunkte P' und P'' einer durch ihn gelegten Geraden von gegebener Richtung halbieren soll, muss die wiederholt angeführte Gleichung (Art. 43)

$$V r^2 + 2(u_{10}\alpha + u_{20}\beta + u_{30}\gamma) r + U_{00} = 0$$

entgegengesetzt gleiche Wurzeln ergeben, sie muss rein quadratisch sein. Dazu ist die einzige Bedingung

$$u_{10}\alpha + u_{20}\beta + u_{30}\gamma = 0$$

nöthig, welche ausdrückt, dass die Coordinaten des Punktes P_0 der Gleichung

$$u_1\alpha + u_2\beta + u_3\gamma = 0$$

genügen müssen, damit er der Forderung entspreche, d. h. der Punkt P_0 muss auf der Ebene liegen, welche durch diese lineare Gleichung repräsentiert wird. Der Ort der Halbierungspunkte aller parallelen Sehnen von gegebener Richtung ist also eine Ebene. Sämmtlichen Richtungen des Raumes entsprechen unendlich viele Scharen paralleler Sehnen; diesen wieder entsprechen unendlich viele Ebenen, welche ihre Halbierungspunkte enthalten und durch die Gleichung

$$u_1\alpha + u_2\beta + u_3\gamma = 0$$

repräsentiert werden, sobald man die Richtungscoordinaten α, β, γ als willkürliche Parameter gelten lässt. Diese Ebenen gehen insgesammt durch den Schnittpunkt der Ebenen

$$u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0,$$

welcher offenbar die Eigenschaft hat, alle durch ihn gehenden Sehnen der Fläche zweiter Ordnung zu halbieren und aus diesem Grunde deren Mittelpunkt genannt wird; er soll in der Folge mit P_c bezeichnet werden, so dass für denselben die Relationen $u_{1c} = 0$; $u_{2c} = 0$; $u_{3c} = 0$ bestehen. Seine Coordinaten ergeben sich durch Auflösung der Gleichungen

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14} = 0;$$
$$a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z + a_{24} = 0;$$
$$a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z + a_{34} = 0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{41} \qquad a_{42} \qquad a_{43} \qquad a_{44}$$

$$x_c = \frac{A_{41}}{A_{44}};\; y_c = \frac{A_{42}}{A_{44}};\; z_c = \frac{A_{43}}{A_{43}} \;\ldots\ldots \quad (68$$

Seine Verbindungslinie mit dem Nullpunkte hat das Richtungsverhältnis $x_c : y_c : z_c = A_{41} : A_{42} : A_{43}$.

Je nach der Beschaffenheit von A_{44}, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $A_{44} \gtrless 0$, d. h. der Nenner der Auflösungen ist von Null verschieden. Dann haben diese endliche Werte, der Mittelpunkt liegt im endlichen Bereiche und man hat es mit centralen Flächen zu thun. Die Ebenen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ sind nicht einer und derselben Richtung parallel. Die vom Mittelpunkte ausgehenden Radien ergeben sich aus der Gleichung

$$V\,r^2 + 2\,(u_{10}\,\alpha + u_{20}\,\beta + u_{30}\,\gamma)\,r + U_{00} = 0,$$

wenn man P_0 auf P_c fallen lässt. Wegen $u_{1c} = u_{2c} = u_{3c} = 0$ nimmt sie dann die Form

$$V\,r^2 + U_{cc} = 0$$

an und weil

$$U_{cc} = u_{1c}\,x_c + u_{2c}\,y_c + u_{3c}\,z_c + u_{4c} = u_{4c} =$$
$$= a_{41}\,\frac{A_{41}}{A_{44}} + a_{42}\,\frac{A_{42}}{A_{44}} + a_{43}\,\frac{A_{43}}{A_{44}} + a_{44}\frac{A_{44}}{A_{44}},$$

also

$$U_{cc} = \frac{A}{A_{44}},$$

geht sie in

$$V\,r^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0$$

über, woraus man

$$r^2 = -\frac{1}{V}\cdot\frac{A}{A_{44}} \;\ldots\ldots \quad (69$$

berechnet und neuerlich bestätigt findet, dass der Mittelpunkt jede durch ihn gehende Sehne halbiert.

Wenn nun $A \gtrless 0$, so existiert kein Radius von der Länge Null, es liegt eine ordinäre Fläche zweiter Ordnung vor, deren Richtfläche eine reale oder imaginäre Kegelfläche ist. Im ersten Falle können Radien unendlich groß werden (Hyperboloide), im letzteren gibt es kein reales Wertsystem α, β, γ, welches der Gleichung $V = 0$ genügt (Art. 44), demnach bleibt das Vorzeichen von V ungeändert, es stimmt für alle Richtungen des Raumes mit jenem der speciellen Werte a_{11}, a_{22}, a_{33} überein, welche dieser Ausdruck für die besonderen Richtungen $1:0:0$; $0:1:0$; $0:0:1$ annimmt und wegen $\alpha_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$; $\alpha_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23}^2 > 0$; $\alpha_{22} = a_{33} a_{11} - - a_{13}^2 > 0$ müssen a_{11}, a_{22}, a_{33} gleiche Vorzeichen haben. Ferner ist wegen $a_{ii} A_{44} > 0$ (Art. 44) auch $V A_{44} > 0$, so dass sich für $r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{44}}$ immer positive oder immer negative, und folglich für r endliche, immer reale oder immer imaginäre Werte ergeben, je nachdem $A < 0$ oder $A > 0$. Damit sind die Kennzeichen für die allseitig begrenzte und die imaginäre ordinäre Fläche gegeben (Ellipsoide).

Wenn aber $A = 0$, so ist auch $\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{44}} = 0$ und folglich $r = 0$, so lange $V \gtrless 0$. Sobald hingegen $V = 0$, erhält man für r den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$, welcher andeutet, dass alle Punkte der Fläche $U = 0$ vom Mittelpunkte aus nur in jenen Richtungen zu finden sind, welche die Richtfläche enthält (Art. 46). Die Fläche ist also eine reale oder imaginäre Kegelfläche.

II. $A_{44} = 0$, d. h. der Nenner der Auflösungen verschwindet. Sind dann die Zähler A_{41}, A_{42}, A_{43}, oder ist mindestens einer derselben von Null verschieden, so sind eine, zwei oder alle drei Auflösungen unendlich groß, der Mittelpunkt ist in das Unendliche gerückt, und zwar in der Richtung $A_{41} : A_{42} : A_{43}$. Die Ebenen $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$ haben eine Richtung gemein, ohne durch eine und dieselbe Gerade zu gehen. Die Flächen mit unendlich fernem Mittelpunkt mögen unter der Bezeichnung »nicht centrale ordinäre Flächen« zusammengefasst werden. Ihre Richtfläche ist ein (reales oder imaginäres) Ebenenpaar. (Art. 46, 44).

III. $A_{44} = 0$; $A_{41} = A_{42} = A_{43} = 0$, daher auch $A = 0$, d. h. die Mittelpunktscoordinaten werden unbestimmt. Der Grund hiefür ist in der besonderen Lage zu suchen, welche nun die Ebenen $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$ gegen einander haben. Die möglichen Fälle sind:

α) Die drei Ebenen gehen durch eine und dieselbe nicht unendlich ferne Gerade, von welcher jeder Punkt als Mittelpunkt der Fläche $U = 0$ angesehen werden kann; diese ist eine Cylinderfläche, deren im endlichen Bereiche befindliche Axe den Ort aller Mittelpunkte bildet.

Die von irgend einem Punkte P_c des Ortes der Mittelpunkte ausgehenden Radien der Fläche berechnet man aus der Gleichung

$$r^2 = -\frac{1}{V} U_{cc} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A}{A_{44}}$$

(I) durch Ermittlung des nun wegen $A = A_{44} = 0$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftretenden Wertes von U_{cc}. Da $u_{1c} = u_{2c} = u_{3c} = 0$ ist nämlich wieder $U_{cc} = u_{4c}$, ferner

$$\begin{vmatrix} a_{11}+h & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A + h \, . \, A_{11} = \begin{vmatrix} a_{11}+h & a_{12} & a_{13} & h\,x_c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & u_{4c} \end{vmatrix}$$

(Transformation der 4. Colonne), daher

$$h\,\alpha_{11}\,u_{4c} = h \, . \, A_{11}; \quad u_{4c} = U_{cc} = \frac{A_{11}}{\alpha_{11}}.$$

Man hätte in der Discriminante auch a_{22} oder a_{33} durch $a_{22} + h$ oder $a_{33} + h$ ersetzen können u. s. w., so dass sich

$$U_{cc} = \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} = \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} = \frac{A_{33}}{\alpha_{33}}$$

ergibt und

$$r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (70$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

unabhängig von der Lage des Punktes P_c erscheint; demnach sind parallele Radien gleich und der Ort der Mittelpunkte stellt sich thatsächlich als Axe einer Cylinderfläche dar, welche unter den vorliegenden Bedingungen durch die Gleichung $U = 0$ repräsentiert wird.

Die Beschaffenheit der »axialen« Cylinderfläche ist aus ihrer Schnittlinie mit einer der Coordinatenebenen zu erkennen. Solange wenigstens eine der Unterdeterminanten A_{11}, A_{22}, A_{33} von Null verschieden ist, hat man es mit einer hyperbolischen oder elliptischen (realen oder imaginären) Cylinderfläche zu thun (Art. 42). Wenn aber $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$. verschwinden überhaupt alle Unterdeterminanten der Discriminante (Art. 40) und die Fläche degeneriert zu einem realen oder imaginären Ebenenpaar mit immer realer Schnittlinie (Axe).

Die Richtung der Axe (als Schnittlinie der Ebenen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$) und folglich auch jene der Erzeugenden der Cylinderfläche ist durch das Verhältnis

$$\alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{21} : \alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33} = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} \; (i = 1, 2, 3)$$

gegeben (Art. 40).

β) Die Ebenen $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$ sind parallel, d. h. sie haben eine unendlich ferne Gerade gemein; dann verschwinden alle Unterdeterminanten α_{ik}, insbesondere $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$, die Schnittlinien mit den Coordinatenebenen (oder mindestens mit einer derselben) werden Parabeln und die Fläche $U = 0$ ist ein parabolischer Cylinder, dessen Erzeugenden die Richtung $A_{i1} : A_{i2} : A_{i3}$ $(i = 1, 2, 3)$ haben.

γ) Die drei Ebenen fallen in eine einzige Ebene zusammen, von welcher jeder Punkt als Mittelpunkt der Fläche $U = 0$ angesehen werden kann. Diese ist dann zu einem Paar paralleler Ebenen degeneriert, deren Mittelebene als Ort der Mittelpunkte erscheint.

Die von irgend einem Punkte P_c des Ortes der Mittelpunkte ausgehenden Radien ergeben sich wieder durch Ermittlung des in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftretenden Wertes von U_{cc}. Da in diesem Falle $A = A_{ik} = 0$, $\alpha_{ik} = 0$, findet man

$$\begin{vmatrix} a_{11}+h & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+k & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = h\,k\,A_{\substack{11\\22}} = \begin{vmatrix} a_{11}+h & a_{12} & a_{13} & h\,x_c \\ a_{21} & a_{22}+k & a_{23} & k\,y_c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & u_{4c} \end{vmatrix}$$

(Transformation der 4. Colonne); daraus durch Entwicklung der Determinante rechts nach der 4. Colonne:

$$h\,x_c\,(A_{14} + k\,A_{\substack{14\\22}}) + k\,y_c\,(A_{24} + h\,A_{\substack{24\\11}}) +$$
$$+ u_{4c}\,(A_{44} + h\,\alpha_{11} + k\,\alpha_{22} + h\,k\,a_{33}) = h\,k\,A_{\substack{11\\22}}$$

und da wegen $a_{i1} : a_{i2} : a_{i3} : a_{i4} = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3} : a_{k4}$; $i, k = 1, 2, 3$ auch $A_{\substack{14\\22}} = A_{\substack{24\\11}} = 0$ u. s. w., erhält man schließlich

$$h\,k\,u_{4c} \,.\, a_{33} = h\,k\,A_{\substack{11\\22}};\quad u_{4c} = U_{cc} = \frac{A_{\substack{11\\22}}}{a_{33}}.$$

Man hätte auch a_{22} und a_{33} durch $a_{22} + h$ und $a_{33} + k$ ersetzen können u. s. w., so dass sich

$$U_{cc} = \frac{A_{\substack{11\\22}}}{a_{33}} = \frac{A_{\substack{22\\33}}}{a_{11}} = \frac{A_{\substack{33\\11}}}{a_{22}}$$

ergibt,

$$r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A_{\substack{ii\\kk}}}{a_{ll}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71$$

$$(i = 1, 2, 3;\; k = 2, 3, 1;\; l = 3, 1, 2)$$

unabhängig von der Lage des Punktes P_c erscheint, parallele Radien also gleich sind und der Ort der Mittelpunkte sich wirklich als Mittelebene eines Parallel-Ebenenpaares darstellt.

Das Ebenenpaar ist real getrennt, imaginär oder zusammenfallend, je nachdem seine Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen real getrennt, imaginär oder vereinigt sind (Art. 43), d. h. je nachdem $A_{\substack{ii\\kk}} < 0$, $A_{\substack{ii\\kk}} > 0$ oder $A_{\substack{ii\\kk}} = 0$ (i, k = 1, 2, 3).

Beispiele und Aufgaben.

a) Es sei die Gleichung

$$3x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 6xz + 8yz + 8x + 10y + 4z + 7 = 0$$

gegeben. Um den Mittelpunkt und die Radien der von ihr repräsentierten Fläche zu bestimmen, ermittelt man

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{array}{lll} \alpha_{11} = -6; & \alpha_{12} = 2; & \alpha_{13} = 2; \\ \alpha_{21} = 2; & \alpha_{22} = 6; & \alpha_{23} = -6; \\ \alpha_{31} = 2; & \alpha_{32} = -6; & \alpha_{33} = 2 \end{array}$$

und findet nun

$$\begin{array}{ll} -A_{41} = -24 + 10 + 4 = -10; & A_{41} = 10; \\ -A_{42} = 8 + 30 - 12 = 26; & A_{42} = -26; \\ -A_{43} = 8 - 30 + 4 = -18; & A_{43} = 18; \\ A_{44} = -18 + 4 + 6; & A_{44} = -8; \end{array}$$

$$A = 40 - 130 + 36 - 56 = -110;$$

$$\frac{A}{A_{44}} = \frac{55}{4},$$

demnach

$$x_c = -\frac{5}{4}; \quad y_c = \frac{13}{4}; \quad z_c = -\frac{9}{4}; \quad r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{55}{4}.$$

Die Fläche ist also eine centrale.

b) Die Gleichung

$$3x^2 + 5y^2 + 7z^2 + 4xy + 2xz + 8yz + 2x + 4y + 6z + 2 = 0$$

mit

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{array}{l} \alpha_{11} = 19; \ \alpha_{22} = 20; \ \alpha_{33} = 11; \\ A_{41} = -8; \ A_{42} = 0; \ A_{43} = -16; \ A_{44} = 40; \\ A = 24 \end{array}$$

stellt eine imaginäre, ordinäre Fläche vor, deren Mittelpunkt die Coordinaten $-\frac{1}{5}$; 0; $-\frac{2}{5}$ hat; denn es ist $\alpha_{ii} > 0$; $a_{ii} A_{44} > 0$; $A > 0$.

c) Bei der Gleichung

$$5x^2 + 8y^2 + 4z^2 + 12xy + 6xz + 6yz + 12x + 14y + 4z + 9 = 0$$

ist

$$\alpha_{11} = 23; \quad \alpha_{22} = 11; \quad \alpha_{33} = 4; \quad A_{41} = -21; \quad A_{42} = 7; \quad A_{43} = 7;$$
$$A_{44} = 7; \quad A = 0,$$

folglich stellt sie eine Kegelfläche mit dem Mittelpunkt $P_c(-3, 1, 1)$ vor, welche von den Coordinatenebenen nach imaginären Ellipsen geschnitten wird, also imaginär ist.

d) Bei der Gleichung

$$5x^2 + 2y^2 + 9z^2 + 2xy + 12xz + 6yz + 4x + 10y + 6z + 7 = 0$$

ist

$$A_{41} = -36; \; A_{42} = -36; \; A_{43} = 36; \; A_{44} = 0; \; A = -144,$$

sie stellt demnach eine nicht centrale Fläche vor, deren Mittelpunkt unendlich fern ist in der Richtung $-36 : -36 : 36 = -1 : -1 : 1$.

e) Bei der Gleichung

$$3x^2 + y^2 + 15z^2 + 4xy + 14xz + 8yz + 10x + 4y + 18z + 7 = 0$$

ist

$$\alpha_{11} = -1; \; \alpha_{22} = -4; \; \alpha_{33} = -1;$$
$$A_{41} = 0; \; A_{42} = 0; \; A_{43} = 0; \; A_{44} = 0; \; A = 0; \; A_{11} = -4,$$

also stellt sie eine hyperbolische Cylinderfläche vor.

f) Bei der Gleichung

$$6x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 10xy + 14xz + 10yz - 12x - 4y + 16z - 48 = 0$$

ist

$$\alpha_{11} = -9; \; \alpha_{22} = -25; \; \alpha_{33} = -1;$$
$$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = 0; \; A = 0; \; A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0,$$

sie stellt mithin ein Ebenenpaar vor und weil $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ negativ sind, ein reales.

g) Bei der Gleichung

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz + 8x + 6y + 4z + 7 = 0$$

ist

$$a_{ik} = 0; \; A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = 0; \; A = 0; \; A_{11} = -25.$$

Die Ebenen $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$ sind parallel, daher hat man es mit einer nicht axialen (parabolischen) Cylinderfläche zu thun.

h) Man untersuche wie im vorstehenden die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2z + 9 = 0;$$
$$2xy - 10z + 13 = 0;$$

$2x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 8xz + 8yz + 6y + 6z + 5 = 0;$
$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 6x + 10y + 2z + 11 = 0;$
$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz - 9 = 0;$
$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz + 2x + 10y + 12z + 7 = 0;$
$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 8yz + 2x + 6y + 34z - 9 = 0;$
$x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 4xz + 6yz + 10x + 4y + 24z + 3 = 0;$
$2x^2 + 8y^2 + 18z^2 + 8xy + 12xz + 24yz + 6x + 14y + 16z + 11 = 0;$
$4x^2 - 3y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 10yz + 14x + 6y + 16z + 18 = 0;$
$12x^2 + 6y^2 - 4z^2 + 18xy - 8xz - 2yz - 6y + 16z - 12 = 0;$
$5x^2 + 5y^2 + 20z^2 + 10xy + 20xz + 20yz - 14x - 14y - 28z + 17 = 0;$
$5x^2 + 2y^2 + 10z^2 + 6xy + 14xz + 8yz - 6x - 2y - 10z + 5 = 0;$
$3x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 6xy + 12xz + 12yz - 18x - 18y - 36z + 15 = 0;$
$3x^2 + 8z^2 + 2xy + 10xz + 4yz - 10x - 6y - 14z + 3 = 0;$
$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 12x + 24y + 12z + 36 = 0;$
$3x^2 - 3y^2 - 8z^2 - 8xy + 10xz + 10yz - 8x - 6y + 10z - 3 = 0.$

48. Transformation der Gleichungen centraler Flächen zu parallelen Coordinatenaxen durch den Mittelpunkt. Wird der Mittelpunkt als Nullpunkt eines neuen, gleichsinnig parallelen Coordinatensystems angenommen und die Gleichung $U = 0$ einer centralen Fläche darauf transformiert, so nimmt sie die Form (Art. 41)

$$Q + 2u_{1c}x + 2u_{2c}y + 2u_{3c}z + U_{cc} = 0$$

an oder, weil $u_{1c} = u_{2c} = u_{3c} = 0;\ U_{cc} = \frac{A}{A_{44}}$,

$$Q + \frac{A}{A_{44}} = 0. \qquad (72$$

Die erhaltene Gleichung ist dadurch charakterisiert, dass in ihr die linearen Glieder fehlen.

Ist $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, hat also die gegebene Gleichung die Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

so ergibt sich durch diese Transformation direct die Gleichung eines Ellipsoides oder Hyperboloides

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0,$$

welche man nämlich auf die Form (Art. 38)

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

bringen kann.

Ist $A = 0$, stellt also die Gleichung $\dot{U} = 0$ eine Kegelfläche vor, so geht sie durch die Transformation in $Q = 0$ über; somit ergibt sich auch auf diesem Wege die Bedeutung der verschwindenden Discriminante.

Wählt man einen beliebigen Punkt in der Axe eines Cylinders oder in der Mittelebene eines Parallel-Ebenenpaares als Mittelpunkt, so erhält man durch Transformation die Gleichungen

$$Q + \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (73$$

$$Q + \frac{A_{ii,kk}}{a_{ll}} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (74$$

(vgl. Art. 47).

49. Der Asymptotenkegel. Die nach dem Mittelpunkte einer centralen Fläche verlegte Richtfläche derselben heißt ihr Asymptotenkegel, dessen Gleichung daher aus jener der Richtfläche in einem beliebigen Punkt P_0 hervorgeht (Art. 46), wenn man P_0 mit P_c zusammenfallen lässt:

$$U - 2U_c + U_{cc} = 0;$$

und weil

$$U_c = u_{1c}x + u_{2c}y + u_{3c}z + u_{4c} = u_{4c} = \frac{A}{A_{44}} = U_{cc},$$

nimmt sie die Form an

$$U - \frac{A}{A_{44}} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75$$

Der Asymptotenkegel kann real oder imaginär sein, seine Erzeugenden können die Fläche offenbar nur in unendlich fernen Punkten treffen. Er kann auch als der Tangentenkegel an die Fläche aus ihrem Mittelpunkte angesehen werden, denn die Gleichung des letzteren ist

$$U_{cc}U - U_c^2 = 0,$$

also vermöge der Werte von U_{cc} und U_c mit der Gleichung des Asymptotenkegels identisch.

Anmerkung. Die Polarebene des Mittelpunktes hat die Gleichung

$$u_{1c}x + u_{2c}y + u_{3c}z + u_{4c} = 0$$

oder

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + \frac{A}{A_{44}} = 0,$$

sie ist daher (Art. 24, II) die unendlich ferne Ebene des Raumes.

Die Gleichung des Asymptotenkegels, transformiert auf ein paralleles Coordinatensystem durch den Mittelpunkt, wird (Art. 48)

$$\left(Q + \frac{A}{A_{33}}\right) - \frac{A}{A_{33}} = 0$$

oder

$$Q = 0,$$

wie zu erwarten war.

50. Conjugierte Diametralebenen und Durchmesser. Bei der Behandlung des Mittelpunktproblems (Art. 47) wurde festgestellt, dass die Halbierungspunkte aller parallelen Sehnen von gegebener Richtung $\alpha : \beta : \gamma$ auf einer durch den Mittelpunkt gehenden sogenannten »Durchmesser- oder Diametralebene« der Fläche zweiter Ordnung liegen, welche durch die Gleichung

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76$$

repräsentiert wird. Man sagt, die Diametralebene ist der Schar von parallelen Sehnen und diese wieder sind der Diametralebene conjugiert. Nach x, y, z geordnet, erhält die Gleichung die Form

$$v_1 x + v_2 y + v_3 z + v_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76^I$$

aus welcher sich das Richtungsverhältnis $v_1 : v_2 : v_3$ der Normalen (oder die Stellung) der Diametralebene ergibt.

Der Sehnenschar von der Richtung $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i$ ist die Diametralebene

$$v_{1i} x + v_{2i} y + v_{3i} z + v_{4i} = 0$$

conjugiert. Eine beliebige, in dieser enthaltene Richtung $\alpha_k : \beta_k : \gamma_k$ ist senkrecht zu der Normalenrichtung $v_{1i} : v_{2i} : v_{3i}$ der Diametralebene, daher besteht die Beziehung

$$v_{1i} \alpha_k + v_{2i} \beta_k + v_{3i} \gamma_k = 0$$

oder

$$V_{ik} = 0.$$

Da aber $V_{ik} = V_{ki}$, also auch

$$V_{ki} = 0$$

oder

$$v_{1k} \alpha_i + v_{2k} \beta_i + v_{3k} \gamma_i = 0,$$

enthält die Diametralebene

$$v_{1k}\,x + v_{2k}\,y + v_{3k}\,z + v_{4k} = 0,$$

welche einer Schar paralleler Sehnen von der Richtung $\alpha_k : \beta_k : \gamma_k$ conjugiert ist, die Richtung $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i$. Diese beiden Richtungen stehen also in der eigenthümlichen Beziehung zueinander, dass jede der Stellung der zu der anderen conjugierten Diametralebene angehört. Daher muss der beiden Diametralebenen gemeinsamen Richtung $\alpha_l : \beta_l : \gamma_l$ eine Diametralebene entsprechen, welche die Richtungen $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i$ und $\alpha_k : \beta_k : \gamma_k$ enthält. Solche drei Ebenen werden ein »Tripel conjugierter Diametralebenen« genannt; je zwei von ihnen schneiden sich in einem Durchmesser, zu dessen Richtung die dritte conjugiert ist. Die drei Durchmesser wieder heißen ein »Tripel conjugierter Durchmesser«, von welchen je zwei durch eine Diametralebene verbunden werden, welche zu der Richtung des dritten conjugiert ist. Die Richtungen der Durchmesser des Tripels sind durch die Gleichungen

$$V_{ik} = 0;\ V_{kl} = 0;\ V_{li} = 0$$

verbunden.

Die Ebenen $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$ sind auch Diametralebenen der Fläche, weil sie sich in ihrem Mittelpunkte schneiden und offenbar conjugiert den Sehnenscharen, welche die Richtungen der Coordinatenaxen haben.

Die Diametralebenen der nicht centralen Flächen enthalten alle die Richtung $A_{41} : A_{42} : A_{43}$ nach dem unendlich fernen Mittelpunkt.

Bei den Cylinderflächen existiert eine Axe der Mittelpunkte im endlichen Bereiche oder im Unendlichen. Daher geht jede beliebige, die Axe nicht enthaltende Ebene durch einen Mittelpunkt der Fläche und kann als eine Diametralebene angesehen werden, welche der Richtung $\alpha_e : \beta_e : \gamma_e = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3}$, $i = 1, 2, 3$ (Art. 47 III, α, β) der Erzeugenden conjugiert ist; denn weil $A = A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$, ist auch $v_{1e} = v_{2e} = v_{3e} = v_{4e} = 0$ und die Gleichung $v_{1e}\,x + v_{2e}\,y + v_{3e}\,z + v_{4e} = 0$ der zugeordneten Diametralebene wird unbestimmt, d. h. von den Coordinaten eines jeden Punktes befriedigt. Hingegen kann jede durch die Axe gehende Ebene durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha\,u_1 + \beta\,u_2 + \gamma\,u_3 = 0$$

ausgedrückt werden, weil die Axe die gemeinschaftliche Schnittlinie der Ebenen $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$ ist; sie ist also einer beliebigen, den Erzeugenden nicht parallelen Richtung zugeordnet. Bei der nichtaxialen Cylinderfläche insbesondere sind die beliebigen Richtungen conjugierten Diametralebenen parallel den Ebenen $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$.

Zwei durch irgend einen Punkt P_0 unter den zu einander senkrechten Richtungen $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ und $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$ gelegte Geraden x' und y' bestimmen eine Ebene mit den Stellungscoordinaten

$$\alpha = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}; \quad \beta = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}; \quad \gamma = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Von dieser wird die Fläche nach einer Linie geschnitten, welche man auf die Geraden x', y' als Coordinatenaxen beziehen und durch die Gleichung (Art. 42)

$$V_{11}x^2 + V_{22}y^2 + 2V_{12}xy + 2(u_{10}\alpha_1 + u_{20}\beta_1 + u_{30}\gamma_1)x + \\ + 2(u_{10}\alpha_2 + u_{20}\beta_2 + u_{30}\gamma_2)y + U_{00} = 0$$

darstellen kann. Ist P_0 Mittelpunkt dieser Linie, so darf deren Gleichung keine linearen Glieder enthalten (III. Th., I. Abth., Art. 39), d. h. es muss

$$u_{10}\alpha_1 + u_{20}\beta_1 + u_{30}\gamma_1 = 0;$$
$$u_{10}\alpha_2 + u_{20}\beta_2 + u_{30}\gamma_2 = 0$$

sein. Daraus folgt aber

$$u_{10} : u_{20} : u_{30} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha : \beta : \gamma$$

oder

$$\frac{u_{10}}{\alpha} = \frac{u_{20}}{\beta} = \frac{u_{30}}{\gamma};$$

demnach befriedigen die Coordinaten des Mittelpunktes P_0 der Schnittcurve das Gleichungssystem

$$\frac{u_1}{\alpha} = \frac{u_2}{\beta} = \frac{u_3}{\gamma}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77$$

welches offenbar einen Durchmesser der Fläche repräsentiert. Dieser ist der Ort der Mittelpunkte aller Linien, nach welchen die Fläche von parallelen Ebenen der Stellung $\alpha : \beta : \gamma$ geschnitten wird und heißt der dieser Stellung conjugierte Durchmesser; seiner Richtung ist wieder die Diametralebene der Stellung $\alpha : \beta : \gamma$ zugeordnet. Sind nämlich $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ seine Richtungscoordinaten, so kann sein Gleichungssystem auch in der Form

$$\frac{u_1}{v_{1i}} = \frac{u_2}{v_{2i}} = \frac{u_3}{v_{3i}}$$

dargestellt werden (Art. 34), während die seiner Richtung conjugierte Diametralebene die Gleichung

$$v_{1i}x + v_{2i}y + v_{3i}z + v_{4i} = 0,$$

also die Stellung $v_{1i} : v_{2i} : v_{3i} = \alpha : \beta : \gamma$ hat.

Die Durchmesser der nicht centralen Flächen sind parallel und haben die Richtung $A_{41} : A_{42} : A_{43}$ nach dem unendlich fernen Mittelpunkte. Bei den Cylinderflächen kann jede Gerade, welche die Axe schneidet, als ein Durchmesser angesehen werden. Demnach sind bei der nicht axialen Cylinderfläche die Richtungen aller Durchmesser in einer Stellung enthalten.

51. Hauptebenen und Hauptdurchmesser. Hauptradien. Wenn eine Diametralebene senkrecht ist zu der ihr conjugierten Sehnenschar, theilt sie die Fläche zweiter Ordnung in zwei symmetrische Hälften und wird eine Hauptebene genannt. Da in diesem Falle die Sehnen parallel sind der Normalen der Diametralebene, so besteht zwischen den Richtungsverhältnissen $\alpha : \beta : \gamma$ und $v_1 : v_2 : v_3$ beider (Art. 50) die Beziehung

$$v_1 : v_2 : v_3 = \alpha : \beta : \gamma$$

und wenn ρ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, ist

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \rho\,\alpha \\ v_2 &= \rho\,\beta \\ v_3 &= \rho\,\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78$$

Setzt man statt v_1, v_2, v_3 die betreffenden Ausdrücke und ordnet, so gehen die homogenen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \rho)\,\alpha + a_{12}\,\beta + a_{13}\,\gamma &= 0 \\ a_{21}\,\alpha + (a_{22} - \rho)\,\beta + a_{23}\,\gamma &= 0 \\ a_{31}\,\alpha + a_{32}\,\beta + (a_{33} - \rho)\,\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (79$$

hervor, welche nur dann gleichzeitig bestehen, nämlich paarweise dasselbe Richtungsverhältnis $\alpha : \beta : \gamma$ ergeben können, wenn ihre Determinante verschwindet; daraus ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (80$$

welche in ρ vom 3. Grade ist und durch Entwicklung der Determinante die Form

$$\rho^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\rho^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\,\rho - A_{44} = 0 \ . \ (80^{I}$$

annimmt. Sie hat immer drei reale Wurzeln.

Der Beweis hiefür kann mit Hilfe des folgenden Satzes aus der Gleichungslehre gegeben werden: Liefern die Einsetzungen der Zahlen a und b in das Polynom der Gleichung $f(\rho) = 0$ entgegengesetzt bezeichnete Substitutionsresultate, so liegt zwischen a und b wenigstens eine Wurzel der Gleichung.

Um nun bei der in Frage stehenden cubischen Gleichung das Eintreten solcher Zeichenwechsel nachzuweisen, gibt man ihr durch Entwicklung der Determinante, deren Unterdeterminanten mit $\triangle_{ik}$ bezeichnet werden mögen, die Form

$$(a_{33} - \rho)\triangle_{33} + a_{31}\triangle_{31} + a_{32}\triangle_{32} = 0$$

oder nach einfachen Reductionen:

$$(a_{33} - \rho)\left[(a_{11} - \rho)(a_{22} - \rho) - a_{12}^2\right] -$$
$$- \left[a_{13}^2(a_{22} - \rho) + a_{23}^2(a_{11} - \rho) - 2\,a_{12}\,a_{13}\,a_{23}\right] = 0$$

und nimmt (ohne damit die Allgemeinheit zu beeinträchtigen) $a_{11} < a_{22}$ an. Setzt man den Ausdruck in der ersten eckigen Klammer links für sich gleich Null, so erhält man die quadratische Gleichung

$$(a_{11} - \rho)(a_{22} - \rho) - a_{12}^2 = 0 \quad (\triangle_{33} = 0)$$

deren Polynom für $-\infty$, a_{11}, a_{22}, $+\infty$ Substitutionsresultate mit den Vorzeichen $+, -, -, +$ liefert. Daher liegt zwischen $-\infty$ und a_{11}, dann zwischen a_{22} und $+\infty$ je eine Wurzel der Gleichung $\triangle_{33} = 0$. Bezeichnet man die erste mit $\omega_{33}^{(1)}$, die zweite mit $\omega_{33}^{(2)}$, so ist $\omega_{33}^{(1)} < a_{11}$; $\omega_{33}^{(2)} > a_{22}$. Wird nun eine dieser Wurzeln $(\omega_{33}^{(i)})$ in das Polynom der cubischen Gleichung eingeführt, so verschwindet das Product links, weil

$$(a_{11} - \omega_{33}^{(i)})(a_{22} - \omega_{32}^{(i)}) - a_{12}^2 = 0,$$

und es bleibt der Ausdruck

$$-\left[a_{13}^2(a_{22} - \omega_{33}^{(i)}) + a_{23}^2(a_{11} - \omega_{33}^{(i)}) - 2\,a_{12}\,a_{13}\,a_{23}\right],$$

welcher wegen

$$a_{12} = \sqrt{(a_{11} - \omega_{33}^{(i)})(a_{22} - \omega_{33}^{(i)})}$$

in

$$-\left[a_{13}\sqrt{a_{22} - \omega_{33}^{(i)}} - a_{23}\sqrt{a_{11} - \omega_{33}^{(i)}}\right]^2$$

übergeht. Da laut Voraussetzung $\omega_{33}^{(1)} < a_{11} < a_{22}$; $\omega_{33}^{(2)} > a_{22} > a_{11}$, sind für $\omega_{33}^{(1)}$ die Größen unter den Wurzelzeichen positiv, die Größe in der Klammer real, ihr Quadrat positiv; hingegen für $\omega_{33}^{(2)}$ die Größen unter den Wurzelzeichen negativ, der Ausdruck in der Klammer rein imaginär (von der Form $m\sqrt{-1}$), sein Quadrat negativ. Also hat das Resultat der Substitution von $\omega_{33}^{(1)}$ in das Polynom der cubischen Gleichung das negative, jenes von $\omega_{33}^{(2)}$ das positive Vorzeichen. Ferner überzeugt man sich leicht, dass den Substitutionen von $-\infty$ und $+\infty$ das positive und negative Vorzeichen entspricht, indem man etwa in jeder Zeile der Determinante ρ als Factor heraushebt und

$$\rho^3 \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\rho} - 1 & \frac{a_{12}}{\rho} & \frac{a_{13}}{\rho} \\ \frac{a_{21}}{\rho} & \frac{a_{22}}{\rho} - 1 & \frac{a_{23}}{\rho} \\ \frac{a_{31}}{\rho} & \frac{a_{23}}{\rho} & \frac{a_{33}}{\rho} - 1 \end{vmatrix}$$

erhält etc. Aus dem Schema der Vorzeichen

$$\begin{matrix} -\infty & \omega_{33}^{(1)} & \omega_{33}^{(2)} & +\infty \\ + & - & + & - \end{matrix}$$

geht hervor, dass zwischen $-\infty$ und $\omega_{33}^{(1)}$; $\omega_{33}^{(1)}$ und $\omega_{33}^{(2)}$; $\omega_{33}^{(2)}$ und $+\infty$ je eine Wurzel der cubischen Gleichung enthalten ist, so dass die Beziehung besteht

$$\rho_1 < \omega_{33}^{(1)} < \rho_2 < \omega_{33}^{(2)} < \rho_3.$$

Da man für die Beweisführung die Determinante auch nach der ersten oder zweiten Zeile hätte entwickeln können und dann an die Stelle der Wurzeln $\omega_{33}^{(1)}$ der Gleichung $\triangle_{33} = 0$ die Wurzeln $\omega_{11}^{(1)}$ oder $\omega_{22}^{(1)}$ der Gleichungen $\triangle_{11} = 0$ oder $\triangle_{22} = 0$ getreten wären, besteht für die Wurzeln der cubischen Gleichung folgende allgemeine Beziehung:

Sind $\omega_{mm}^{(1)}$ und $\omega_{mm}^{(2)}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\triangle_{mm} = 0$ oder $\rho^2 - (a_{kk} + a_{ll})\rho + \alpha_{mm} = 0$; $(k = 1, 2, 3;\ l = 2, 3, 1;\ m = 3, 1, 2)$, so ist, $\omega_{mm}^{(1)} < \omega_{mm}^{(2)}$ vorausgesetzt:

$$\rho_1 < \omega_{mm}^{(1)} < \rho_2 < \omega_{mm}^{(2)} < \rho_3. \quad \ldots\ldots\ldots (81$$

Häufig handelt es sich nur darum, die Vorzeichen der Wurzeln der cubischen Gleichung zu kennen. Da letztere im vorliegenden Falle durchwegs reale Wurzeln hat, sind einer bekannten Regel zufolge so viele Wurzeln positiv, als das geordnete Gleichungspolynom Zeichenwechsel, und so viele negativ, als es Zeichenfolgen aufweist.

Die Unterdeterminanten der Determinante von Gl. 80 sind

$$\left.\begin{array}{ll} \triangle_{11} = \rho^2 - (a_{22} + a_{33})\rho + \alpha_{11}; & \triangle_{12} = \triangle_{21} = a_{12}\rho + \alpha_{12} \\ \triangle_{22} = \rho^2 - (a_{33} + a_{11})\rho + \alpha_{22}; & \triangle_{13} = \triangle_{31} = a_{13}\rho + \alpha_{13} \\ \triangle_{33} = \rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + \alpha_{33}; & \triangle_{23} = \triangle_{32} = a_{32}\rho + \alpha_{23} \end{array}\right\} . \quad (82$$

und wenn ρ eine Wurzel der cubischen Gleichung, ist (I Th., Art. 16)

$$\triangle_{11} : \triangle_{12} : \triangle_{13} = \triangle_{21} : \triangle_{22} : \triangle_{23} = \triangle_{31} : \triangle_{32} : \triangle_{33},$$

so dass sich aus irgend zwei der Gleichungen (79 immer dasselbe Richtungsverhältnis ergibt:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : \beta : \gamma = \triangle_{11} : \triangle_{12} : \triangle_{13} \\ \alpha : \beta : \gamma = \triangle_{21} : \triangle_{22} : \triangle_{23} \\ \alpha : \beta : \gamma = \triangle_{31} : \triangle_{32} : \triangle_{33} \end{array}\right\} . \quad \ldots\ldots (83$$

Multipliciert man links der Reihe nach mit α, β, γ, so erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha^2 : \alpha\beta : \alpha\gamma &= \triangle_{11} : \triangle_{12} : \triangle_{13}; \\ \alpha\beta : \beta^2 : \beta\gamma &= \triangle_{21} : \triangle_{22} : \triangle_{23}; \\ \alpha\gamma : \beta\gamma : \gamma^2 &= \triangle_{31} : \triangle_{32} : \triangle_{33}, \end{aligned}$$

welche mit Hilfe eines Proportionalitätsfactors σ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma\alpha^2 &= \triangle_{11}; \quad & \sigma\alpha\beta &= \triangle_{12}; \\ \sigma\beta^2 &= \triangle_{22}; \quad & \sigma\alpha\gamma &= \triangle_{13}; \\ \sigma\gamma^2 &= \triangle_{33}; \quad & \sigma\beta\gamma &= \triangle_{23} \end{aligned}$$

dargestellt werden können. Durch Addition der Gleichungen in der Colonne links folgt

$$\sigma = \triangle_{11} + \triangle_{22} + \triangle_{33},$$

so dass

$$\alpha = \sqrt{\frac{\triangle_{11}}{\triangle_{11} + \triangle_{22} + \triangle_{33}}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\triangle_{22}}{\triangle_{11} + \triangle_{22} + \triangle_{33}}};$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\triangle_{33}}{\triangle_{11} + \triangle_{22} + \triangle_{33}}}.$$

Hingegen findet man aus den Gleichungen der Colonne rechts z. B.

$$\frac{\sigma\alpha\beta \,.\, \sigma\alpha\gamma}{\sigma\beta\gamma} = \sigma\alpha^2 = \frac{\triangle_{12}\triangle_{13}}{\triangle_{23}} \text{ u. s. w.,}$$

daher

$$\alpha^2 = \frac{1}{\sigma}\,\frac{\triangle_{12}\triangle_{13}}{\triangle_{23}}; \quad \beta^2 = \frac{1}{\sigma}\,\frac{\triangle_{12}\triangle_{23}}{\triangle_{13}}; \quad \gamma^2 = \frac{1}{\sigma}\,\frac{\triangle_{13}\triangle_{23}}{\triangle_{12}}$$

und

$$\alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2 = \frac{\triangle_{12}\triangle_{13}}{\triangle_{23}} : \frac{\triangle_{12}\triangle_{23}}{\triangle_{13}} : \frac{\triangle_{13}\triangle_{23}}{\triangle_{12}},$$

also, wenn man die Verhältniszahlen rechts mit $\triangle_{12}\triangle_{13}\triangle_{23}$ multipliciert oder dividiert:

$$\alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2 = (\triangle_{12}\triangle_{13})^2 : (\triangle_{12}\triangle_{23})^2 : (\triangle_{13}\triangle_{23})^2 = \frac{1}{\triangle_{23}{}^2} : \frac{1}{\triangle_{13}{}^2} : \frac{1}{\triangle_{12}{}^2}.$$

mithin

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma = \triangle_{12}\triangle_{13} : \triangle_{12}\triangle_{23} : \triangle_{13}\triangle_{23} = (a_{12}\rho + \alpha_{12})(a_{13}\rho + \alpha_{13}) : \\ : (a_{12}\rho + \alpha_{12})(a_{23}\rho + \alpha_{23}) : (a_{13}\rho + \alpha_{13})(a_{23}\rho + \alpha_{23}) \ldots (83^1 \end{aligned}$$

oder auch

$$\alpha:\beta:\gamma = \frac{1}{\triangle_{23}}:\frac{1}{\triangle_{13}}:\frac{1}{\triangle_{12}} =$$

$$= \frac{1}{a_{23}\rho + \alpha_{23}}:\frac{1}{a_{13}\rho + \alpha_{13}}:\frac{1}{a_{12}\rho + \alpha_{12}} \quad . \; . \; . \; (83^{II}$$

Den drei Wurzeln ρ_1, ρ_2, ρ_3 der cubischen Gleichung entsprechen drei Richtungen $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$; $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$; $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$, durch welche drei Hauptebenen, ferner die zu diesen senkrechten, ihnen conjugierten Durchmesser der Fläche bestimmt werden, welche man Hauptdurchmesser oder Axen nennt. Je zwei solche Richtungen sind zu einander senkrecht; denn für die Wurzeln ρ_i und ρ_k, sowie die ihnen entsprechenden Richtungen $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i$ und $\alpha_k : \beta_k : \gamma_k$ nehmen die Gleichungen 78 die Formen

$$\left.\begin{aligned} v_{1i} &= \rho_i \alpha_i \\ v_{2i} &= \rho_i \beta_i \\ v_{3i} &= \rho_i \gamma_i \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} v_{1k} &= \rho_k \alpha_k \\ v_{2k} &= \rho_k \beta_k \\ v_{3k} &= \rho_k \gamma_k \end{aligned}\right\}$$

an, ergeben also, wenn man in der Colonne links mit $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, rechts mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ multipliciert und addiert:

$$V_{ik} = \rho_i(\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k); \quad V_{ki} = \rho_k(\alpha_k\alpha_i + \beta_k\beta_i + \gamma_k\gamma_i),$$

woraus durch Subtraction wegen $V_{ik} \equiv V_{ki}$

$$0 = (\rho_i - \rho_k)(\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k)$$

folgt. Da im allgemeinen $\rho_i \gtrless \rho_k$; $\rho_i - \rho_k \gtrless 0$ (der Fall $\rho_i = \rho_k$ wird später untersucht werden), ist

$$\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k = 0$$

und folglich auch

$$V_{ik} = 0.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass je zwei Hauptdurchmesser zu einander senkrecht sind, die zweite, dass jeder in der dem anderen conjugierten Diametralebene liegt. Demnach bilden die drei Hauptdurchmesser ein Tripel conjugierter Durchmesser und die Hauptebenen ein Tripel conjugierter Diametralebenen, zwischen deren Richtungs-(Stellungs-)Coordinaten die Gleichungen

$$V_{12} = 0; \quad V_{13} = 0; \quad V_{23} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (84$$

bestehen. Aus der linken Colonne derselben Gleichungen erhält man durch Multiplication mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ und Addition

$$V_{ii} = \rho_i,$$

also gelten für die Richtungscoordinaten der Hauptdurchmesserrichtungen auch die Beziehungen

$$V_{11} = \rho_1; \quad V_{22} = \rho_2; V_{33} = \rho_3. \quad \ldots \ldots \quad (85$$

Die Gleichung der Hauptebene H_i der Stellung $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i$ tritt in den Formen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i u_1 + \beta_i u_2 + \gamma_i u_3 = 0 \\ v_{1i}x + v_{2i}y + v_{3i}z + v_{4i} = 0 \\ \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + \frac{v_{4i}}{\rho_i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (86$$

auf (s. Gl. 78); das Gleichungssystem des Hauptdurchmessers der Richtung $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i$ ist

$$\frac{u_1}{\alpha_i} = \frac{u_2}{\beta_i} = \frac{u_3}{\gamma_i}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (87$$

Den verschiedenen Gattungen der Flächen zweiter Ordnung entsprechend können bezüglich der Hauptebenen und Hauptdurchmesser folgende Fälle eintreten:

α) Centrale Flächen. $A_{44} \gtrless 0$. Die cubische Gleichung

$$\rho^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \rho^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) \rho - A_{44} = 0$$

hat drei nicht verschwindende Wurzeln. Hauptebenen und Hauptdurchmesser befinden sich im endlichen Bereich.

Zwischen den Wurzeln bestehen die Beziehungen

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}; \quad \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33};$$
$$\rho_1\rho_2\rho_3 = A_{44}.$$

β) Nicht centrale Flächen. $A_{44} = 0$. Die cubische Gleichung hat die Form

$$\rho \left[\rho^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \rho + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\right] = 0,$$

daher verschwindet eine Wurzel derselben, und zwar möge $\rho_3 = 0$ angenommen werden. Zufolge der dritten Gleichung 86 rückt, weil $\frac{v_{43}}{\rho_3} = \frac{v_{43}}{0} = \infty$, die Hauptebene H_3 in das Unendliche; mit ihr die darin liegenden Hauptdurchmesser h_1 und h_2. Im endlichen Bereiche bleiben der Hauptdurchmesser h_3 mit den durch ihn gehenden Hauptebenen H_1 und H_2. Der Hauptdurchmesser h_3 ist parallel den übrigen

Durchmessern der Fläche, hat demnach die Richtung $A_{41} : A_{42} : A_{43}$ und das Gleichungssystem

$$\frac{u_1}{A_{41}} = \frac{u_2}{A_{42}} = \frac{u_3}{A_{43}};$$

zwischen den nicht verschwindenden Wurzeln bestehen die Beziehungen

$$\rho_1 + \rho_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}; \quad \rho_1 \rho_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}.$$

γ) Axiale Cylinderflächen. $A = 0$; $A_{44} = 0$; $A_{41} = A_{42} = A_{43} = 0$ $\alpha_{ik} \gtreqless 0$, aber nicht alle α_{ik} Null, $i, k = 1, 2, 3$. Die cubische Gleichung hat wieder die Form

$$\rho \left[\rho^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \rho + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\right] = 0$$

und eine verschwindende Wurzel $\rho_3 = 0$. Für diese gehen die Gleichungen 79 in die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} \alpha_3 + a_{12} \beta_3 + a_{13} \gamma_3 &= 0; \\ a_{21} \alpha_3 + a_{22} \beta_3 + a_{23} \gamma_3 &= 0; \\ a_{31} \alpha_3 + a_{32} \beta_3 + a_{33} \gamma_3 &= 0, \end{aligned}$$

die wegen $A_{44} = 0$ nebeneinander bestehen können; aus je zwei derselben findet man

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{21} : \alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33} = \\ = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3}, \; i = 1, 2, 3$$

(vgl. Art. 47 und 40), demnach ist der Durchmesser h_3 den Erzeugenden der Cylinderfläche parallel. Er fällt mit der Axe zusammen, weil sein Gleichungssystem

$$\frac{u_1}{\alpha_3} = \frac{u_2}{\beta_3} = \frac{u_3}{\gamma_3}$$

von den Coordinaten eines jeden Punktes derselben befriedigt wird. In der Gleichung

$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \frac{v_{43}}{\rho_3} = 0$$

der Hauptebene H_3 erhält das constante Glied, weil $\rho_3 = 0$ und

$$v_{43} = a_{41} \alpha_3 + a_{42} \beta_3 + a_{43} \gamma_3 = \frac{a_{41} A_{i1} + a_{42} A_{i2} + \alpha_{43} A_{i3}}{\sqrt{A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + A_{i3}}} = 0$$

die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, d. h. es kann jede zu dem Hauptdurchmesser h_3 senkrechte Ebene als Hauptebene H_3 angesehen werden. Die beiden anderen gehen durch h_3 und sind vollkommen bestimmt.

δ) Die parabolische Cylinderfläche. $A=0$; $A_{44}=0$; $A_{41}=$ $=A_{42}=A_{43}=0$; $\alpha_{ik}=0$, $i,k=1,2,3$. Die cubische Gleichung hat nun die Form

$$\rho^2\left[\rho-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\right]=0,$$

also zwei verschwindende Wurzeln; es sei $\rho_1=0$; $\rho_3=0$ angenommen. Dann ist

$$\rho_2=(a_{11}+a_{22}+a_{33})\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (88$$

und dieser Wurzel entspricht wegen $\alpha_{ik}=0$ die Richtung

$$\alpha_2:\beta_2:\gamma_2=\frac{1}{a_{23}}:\frac{1}{a_{13}}:\frac{1}{a_{12}}=1:\frac{a_{23}}{a_{13}}:\frac{a_{23}}{a_{12}}$$

(s. Gl. 83^{II}). Nun ist z. B.

$$\alpha_{23}=a_{12}a_{13}-a_{23}a_{11}=0;\quad \frac{a_{23}}{a_{13}}=\frac{a_{12}}{a_{11}};\ \frac{a_{23}}{a_{12}}=\frac{a_{13}}{a_{11}},$$

daher auch

$$\alpha_2:\beta_2:\gamma_2=1:\frac{a_{12}}{a_{11}}:\frac{a_{13}}{a_{11}}=a_{11}:a_{12}:a_{13} \text{ u. s. w.},$$

so dass man

$$\alpha_2:\beta_2:\gamma_2=a_{11}:a_{12}:a_{13}=a_{21}:a_{22}:a_{23}=a_{31}:a_{32}:a_{33}\ .\ . \quad (89$$

erhält. Dieser Richtung entspricht die Hauptebene H_2 mit der Gleichung

$$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\frac{v_{42}}{\rho_2}=0.$$

Da $a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+a_{k3}A_{i3}=0$ $(i,k=1,2,3)$, enthält diese Ebene (vgl. Art. 47) die Richtung der Erzeugenden und schneidet die Cylinderfläche nach einer Erzeugenden.

Für die verschwindenden Wurzeln ρ_1 und ρ_3 gehen die Gleichungen 79 in

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_i+a_{12}\beta_i+a_{13}\gamma_i&=0;\\ a_{21}\alpha_i+a_{22}\beta_i+a_{23}\gamma_i&=0;\\ a_{31}\alpha_i+a_{32}\beta_i+a_{33}\gamma_i&=0;\\ i&=1,3 \end{aligned}$$

über, d. h. die ihnen entsprechenden Richtungen müssen in der Stellung $\alpha_2:\beta_2:\gamma_2$ enthalten sein, erscheinen aber im übrigen unbestimmt. Da in der Gleichung

$$\alpha_i x+\beta_i y+\gamma_i z+\frac{v_{4i}}{\rho_i}=0$$

im allgemeinen $v_{4i} \gtrless 0$, aber immer $\rho_i = 0$, wird das constante Glied unendlich groß, die zugehörige Diametralebene befindet sich im Unendlichen. Nur wenn

$$\alpha_i : \beta_i : \gamma_i = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3}, \quad i = 1, 3; \; k = 1, 2, 3$$

wird

$$v_{4i} = \frac{a_{41} A_{k1} + a_{42} A_{k2} + a_{43} A_{k3}}{\sqrt{A_{k1}^2 + A_{k2}^2 + A_{k3}^2}} = 0; \quad \frac{v_{4i}}{\rho_i} = \frac{0}{0},$$

so dass jede zu den Erzeugenden senkrechte Ebene als Hauptebene angesehen werden kann. Eine solche möge mit H_3 bezeichnet werden. Die dritte Hauptebene H_2 ist dann unendlich fern, jedoch muss ihr die zu den Richtungen $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ und $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$ senkrechte Normalenrichtung zugeschrieben werden; sie enthält die unendlich ferne Axe des Cylinders (Hauptdurchmesser h_3).

Die Hauptdurchmesser treffen die centrale Fläche in je zwei Punkten, welche Scheitelpunkte heißen. Die nach den Scheitelpunkten gehenden Radien werden Hauptradien genannt; ihre Längen sind (Art. 47)

$$\left.\begin{aligned} R_1^2 &= -\frac{1}{V_{11}} \cdot \frac{A}{A_{44}} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{A}{A_{44}} \\ R_2^2 &= -\frac{1}{V_{22}} \cdot \frac{A}{A_{44}} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{A}{A_{44}} \\ R_3^2 &= -\frac{1}{V_{33}} \cdot \frac{A}{A_{44}} = -\frac{1}{\rho_3} \frac{A}{A_{44}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (90$$

Die Realität der Hauptradien hängt von den Vorzeichen der Wurzeln ρ_1, ρ_2, ρ_3 und von jenem des Bruches $\frac{A}{A_{44}}$ ab. Den imaginären entsprechen imaginäre Paare von Scheitelpunkten. Sind die Hauptradien alle real oder alle imaginär, dann hat die cubische Gleichung drei gleich bezeichnete Wurzeln. Bei ungleich bezeichneten Wurzeln ist nur ein Theil der Hauptradien real.

Die beiden, durch die Axe (Hauptdurchmesser) h_3 einer axialen Cylinderfläche gehenden Hauptebenen H_1 und H_2 schneiden dieselbe nach je zwei Erzeugenden, welche Scheitelerzeugende genannt werden können. Werden durch irgend einen als Mittelpunkt betrachteten Punkt P_c der Axe Parallele zu den Hauptdurchmesserrichtungen h_1 und h_2 gelegt, so bestimmen diese zwei Hauptradien der Fläche, deren Längen (Art. 47)

$$\left.\begin{aligned} R_1{}^2 &= -\frac{1}{V_{11}} \cdot \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}} = -\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}} \\ R_2{}^2 &= -\frac{1}{V_{22}} \cdot \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}} = -\frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (91$$

sind und deren Realität von den Vorzeichen der nicht verschwindenden Wurzeln ρ_1, ρ_2, so wie von jenem des Bruches $\frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}}$ abhängt. Es sind entweder beide Paare Scheitelerzeugende real oder beide imaginär oder es ist ein Paar real und ein Paar imaginär.

Bei den nicht axialen Cylinderflächen ist nur eine Hauptebene, daher auch nur eine Scheitelerzeugende im endlichen Bereich vorhanden.

Die durch irgend einen Punkt P_c der Mittelebene eines Parallelebenenpaares gelegte Senkrechte der Mittelebene kann als ein Hauptdurchmesser gelten, welchem der Radius (Art. 47)

$$r^2 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{A_{\substack{ii\\kk}}}{a_{ll}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_{\substack{ii\\kk}}}{a_{ll}}$$

entspricht. Da zwei Wurzeln der cubischen Gleichung verschwinden, etwa $\rho_1 = \rho_2 = 0$, ist $\rho_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ und man kann

$$r^2 = -\frac{A_{\substack{11\\22}}}{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, a_{33}} = -\frac{A_{\substack{22\\33}}}{(a_{11} + a_{23} + a_{33})\, a_{11}} =$$

$$= \frac{-A_{\substack{11\\33}}}{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, a_{22}}$$

setzen; daher ist der Abstand der Ebenen des Paares

$$\delta = 2\sqrt{-\frac{A_{\substack{11\\22}}}{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, a_{33}}} = \sqrt{-\frac{A_{\substack{22\\33}}}{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, a_{11}}} =$$

$$= \sqrt{-\frac{A_{\substack{11\\33}}}{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, a_{22}}} \quad \ldots\ldots \quad (92$$

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$11x^2 + 11y^2 + 14z^2 - 2xy - 8xz - 8yz - 12x - 12y - \\ - 12z - 18 = 0$$

mit

$$\alpha_{11} = 138;\ \alpha_{22} = 138;\ \alpha_{33} = 120;\ \alpha_{12} = 30;\ \alpha_{13} = 48;\ \alpha_{23} = 48;$$

$$A_{41} = 1296;\ A_{42} = 1296;\ A_{43} = 1296;\ A_{44} = 1296;\ A = -36 . 1296$$

repräsentiert eine centrale Fläche mit dem Mittelpunkte $P_c(1, 1, 1)$. Die cubische Gleichung

$$\rho^3 - 36\rho^2 + 396\rho - 1296 = 0$$

hat die Wurzeln $\rho_1 = 6$; $\rho_2 = 12$; $\rho_3 = 18$. Also ist

$$\left.\begin{array}{l}\triangle_{12}^{(1)} = 24\\ \triangle_{13}^{(1)} = 24\\ \triangle_{23}^{(1)} = 24\end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l}\triangle_{12}^{(2)} = 18\\ \triangle_{13}^{(2)} = 0\\ \triangle_{23}^{(2)} = 0\end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l}\triangle_{12}^{(3)} = 12\\ \triangle_{13}^{(3)} = -24\\ \triangle_{23}^{(3)} = -24\end{array}\right\}$$

und man findet

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \frac{1}{24} : \frac{1}{24} : \frac{1}{24} = 1 : 1 : 1;$$

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \frac{1}{0} : \frac{1}{0} : \frac{1}{18} = \infty : \infty : 1;$$

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = -\frac{1}{24} : -\frac{1}{24} : \frac{1}{12} = -1 : -1 : 2.$$

Die Richtung $\alpha_2 : \beta_3 : \gamma_2$ erscheint nicht vollkommen bestimmt, gehört aber offenbar der x y-Ebene an. Als Senkrechte der beiden anderen hat sie das Richtungsverhältnis

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = 1 : -1 : 0.$$

Ferner ist

$$\frac{A}{A_{44}} = -36,$$

daher

$$R_1^2 = -\frac{1}{6} \cdot -36 = 6; \quad R_1 = \sqrt{6};$$

$$R_2^2 = -\frac{1}{12} \cdot -36 = 3; \quad R_2 = \sqrt{3};$$

$$R_3^2 = -\frac{1}{18} \cdot -36 = 2; \quad R_3 = \sqrt{2}.$$

b) Die Gleichung

$$2x^2 - 8y^2 + 6z^2 + 8xz - 8yz - 20x + 22y - 8z + 6 = 0$$

mit

$$\alpha_{11} = -64;\ \alpha_{22} = -4;\ \alpha_{33} = -16;\ \alpha_{12} = -16;\ \alpha_{13} = 32;\ \alpha_{23} = 8;$$
$$A_{41} = -336;\ A_{42} = -84;\ A_{43} = 168;\ A_{44} = 0;\ A = 1764$$

stellt eine nicht centrale Fläche vor, deren Durchmesser die Richtung

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = -336 : -84 : 168 = -4 : -1 : 2$$

haben. Die cubische Gleichung

$$\rho\left[\rho^2 - 84\right] = 0$$

hat die Wurzeln $\rho_1 = 2\sqrt{21}$; $\rho_2 = -2\sqrt{21}$; $\rho_3 = 0$ und es ist

$$\triangle_{12}^{(1)} = 0\,.\,2\sqrt{21} - 16 = -16;\ \triangle_{13}^{(1)} = 4\,.\,2\sqrt{21} + 32 = 8\sqrt{21} + 32;$$
$$\triangle_{23}^{(1)} = -4\,.\,2\sqrt{21} + 8 = -8\sqrt{21} + 8,$$

demnach die Stellung der ersten Hauptebene:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \frac{1}{8 - 8\sqrt{21}} : \frac{1}{32 + 8\sqrt{21}} : \frac{1}{-16} =$$
$$= (1 + \sqrt{21}) : (16 - 4\sqrt{21}) : 10,$$

während sich jene der zweiten aus

$$\triangle_{12}^{(2)} = 0\,.\,-2\sqrt{21} - 16 = -16;\ \triangle_{13}^{(2)} = 4\,.\,-2\sqrt{21} + 32 =$$
$$= -8\sqrt{21} + 32;\ \triangle_{23}^{(2)} = -4\,.\,-2\sqrt{21} + 8 = 8\sqrt{21} + 8$$

ergibt:

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \frac{1}{8 + 8\sqrt{21}} : \frac{1}{32 - 8\sqrt{21}} : \frac{1}{-16} =$$
$$= (1 - \sqrt{21}) : (16 + 4\sqrt{21}) : 10.$$

c) Die Gleichung

$$5x^2 + 2y^2 + 10z^2 + 6xy - 2xz - 4yz - 24x - 12y - 12z - 30 = 0$$

mit

$$\alpha_{11} = 16;\quad \alpha_{22} = 49;\quad \alpha_{33} = 1;\quad \alpha_{12} = -28;\quad \alpha_{13} = -4;\quad \alpha_{23} = 7;$$
$$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = 0;\ A_{11} = -1056$$

stellt eine axiale Cylinderfläche vor, deren Axe als Schnittlinie der Ebenen $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$ die Richtung

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3} = -4 : 7 : 1$$

hat, die auch jene der Erzeugenden ist. Die cubische Gleichung

$$\rho\left[\rho^2 - 17\rho + 66\right] = 0$$

besitzt die Wurzeln $\rho_1 = 11$; $\rho_2 = 6$; $\rho_3 = 0$; demnach findet man

$$\triangle_{12}^{(1)} = 5;\ \triangle_{13}^{(1)} = -15;\ \triangle_{23}^{(1)} = -15;$$
$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \frac{1}{-15} : \frac{1}{-15} : \frac{1}{5} = -1 : -1 : 3;$$
$$\triangle_{12}^{(2)} = -10;\ \triangle_{13}^{(2)} = -10;\ \triangle_{23}^{(2)} = -5;$$
$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \frac{1}{-5} : \frac{1}{-10} : \frac{1}{-10} = 2 : 1 : 1;$$
$$\triangle_{12}^{(3)} = -28;\ \triangle_{13}^{(3)} = -4;\ \triangle_{23}^{(3)} = 7;$$
$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{1}{7} : \frac{1}{-4} : \frac{1}{-28} = -4 : 7 : 1.$$

Ferner ist

$$\frac{A_{11}}{\alpha_{11}} = \frac{-1056}{16} = 66$$

und

$$R_1{}^2 = -\frac{1}{11} \cdot -66 = 6; \quad R_1 = \sqrt{6};$$

$$R_2{}^2 = -\frac{1}{6} \cdot -66 = 11; \quad R_2 = \sqrt{11}.$$

d) Die Gleichung

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 - 8xy + 4xz - 4yz - 26x + 8y - 22z + 85 = 0$$

mit

$$\alpha_{ik} = 0; \quad A_{41} = A_{42} = A_{43} = A = 0; \quad A_{11} = -324; \quad A_{12} = -162; \quad A_{13} = 324$$

stellt eine nicht axiale Cylinderfläche vor, deren Erzeugenden die Richtung

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = A_{11} : A_{12} : A_{13} = -324 : -162 : 324 = -2 : -1 : 2$$

haben. Die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\rho^2 (\rho - 9) = 0$$

sind $\rho_1 = 0$; $\rho_3 = 9$; $\rho_3 = 0$; sie werden für die Bestimmung der Hauptebenen nicht gebraucht, denn der Hauptebene H_2 entspricht die Stellung

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = a_{i1} : a_{i2} : a_{i3} = 4 : -4 : 2 = 2 : -2 : 1, \; (i = 1, 2, 3)$$

und zu den beiden gefundenen ist die Richtung

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 1 : 2 : 2.$$

senkrecht.

e) Man bestimme die Hauptebenen, Hauptdurchmesser u. s. w. bei den Flächen:

$$4x^2 + 16y^2 + 20z^2 + 16xz + 16yz - 24x - 14y - 36z + 16 = 0;$$
$$7x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 20xy + 4xz - 16yz - 2x + 44y + 20z - 77 = 0;$$
$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36xy + 12xz - 24yz - 40x - 18y - 92z + 88 = 0;$$
$$3x^2 - 6y^2 + 3z^2 + 12xy - 24xz - 12yz - 6x - 12y + 24z + 39 = 0.$$

52. Scheitelpunkt und Scheitelebene der nicht centralen Flächen. Wie bereits erwähnt (Art. 51) besitzen die nicht centralen Flächen nur einen Scheitelpunkt (im endlichen Bereich) nämlich ihren Schnittpunkt mit der Axe. Die Tangentenebene einer nicht centralen Fläche im Scheitelpunkte ist zu der Axe senkrecht und soll kurzweg die Scheitelebene genannt werden. Als Tangentenebene im Scheitelpunkte P_s hat sie (Art. 45) die Gleichung

$$u_{1s}\,x + u_{2s}\,y + u_{3s}\,z + u_{4s} = 0,$$

als zu der Axenrichtung $(A_{41} : A_{42} : A_{43})$ senkrechte Ebene hingegen die Gleichung

$$A_{41}\,x + A_{42}\,y + A_{43}\,z + \lambda = 0,$$

wo λ eine noch zu bestimmende Größe ist.

Diese beiden Gleichungen können sich nur durch einen Factor σ unterscheiden, so dass die Identität

$$u_{1s}x + u_{2s}\,y + u_{3s}\,z + u_{4s} = \sigma\,(A_{41}\,x + A_{42}\,y + A_{43}\,z + \lambda)$$

besteht, welche die Berechnung der Unbekannten x_s, y_s, z_s, λ ermöglicht. Zunächst zerfällt sie in die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{1s} &= \sigma\,A_{41};\\ u_{2s} &= \sigma\,A_{42};\\ u_{3s} &= \sigma\,A_{43};\\ u_{4s} &= \sigma\,\lambda; \end{aligned}$$

multipliciert man nun der Reihe nach mit

$$A_{11},\ A_{21},\ A_{31},\ A_{41};\quad A_{12},\ A_{22},\ A_{32},\ A_{42};\quad A_{13},\ A_{23},\ A_{33},\ A_{43};\quad A_{14},\ A_{24},\ A_{43},\ A_{44}$$

und addiert jedesmal, so folgen daraus wegen $A_{44} = 0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} A\,x_s &= \sigma\,(A_{11}\,A_{41} + A_{21}\,A_{42} + A_{31}\,A_{43} + A_{41}\,\lambda);\\ A\,y_s &= \sigma\,(A_{12}\,A_{41} + A_{22}\,A_{42} + A_{32}\,A_{43} + A_{42}\,\lambda);\\ A\,z\ &= \sigma\,(A_{13}\,A_{41} + A_{23}\,A_{42} + A_{33}\,A_{43} + A_{43}\,\lambda);\\ A &= \sigma\,(A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2). \end{aligned}$$

Wenn man jetzt in der vorhandenen Reihenfolge die linken und rechten Seiten der Gleichungen der ersten Gruppe mit denselben Seiten jener der zweiten Gruppe multipliciert und dann addiert, erhält man

$$A\,.\,U_{ss} = \sigma^2 \Big[A_{11}\,A_{41}{}^2 + A_{22}\,A_{42}{}^2 + A_{33}\,A_{43}{}^2 + 2\,A_{12}\,A_{41}\,A_{42} + {} \\ + 2\,A_{13}\,A_{41}\,A_{43} + 2\,A_{23}\,A_{42}\,A_{43} + 2\,\lambda\,(A_{41}{}^2 + A_{42}{}^2 + A_{43}{}^2)\Big]$$

und da $U_{ss} = 0$, weil P_s ein Punkt der Fläche, ist

$$A_{11}\,A_{41}{}^2 + A_{22}\,A_{42}{}^2 + A_{33}\,A_{43}{}^2 + 2\,A_{12}\,A_{41}\,A_{42} + 2\,A_{13}\,A_{41}\,A_{43} + {} \\ + 2\,A_{23}\,A_{42}\,A_{43} + 2\,\lambda\,(A_{41}{}^2 + A_{42}{}^2 + A_{43}{}^2) = 0,$$

also

$$\lambda = -\frac{1}{2}\,\frac{A_{11}\,A_{41}{}^2 + A_{22}\,A_{42}{}^2 + A_{33}\,A_{43}{}^2 + 2\,A_{12}\,A_{41}\,A_{42} + 2\,A_{13}\,A_{41}\,A_{43} + 2\,A_{23}\,A_{42}\,A_{43}}{A_{41}{}^2 + A_{42}{}^2 + A_{43}{}^2}$$

oder in abgekürzter Darstellung

$$\lambda = -\frac{1}{2}\frac{\{A_1 A_{41} + A_2 A_{42} + A_3 A_{43}\}^2}{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2}.$$

Addiert und subtrahiert man im Zähler des Bruches den Ausdruck

$$A_{11}(A_{42}^2 + A_{43}^2) + A_{22}(A_{41}^2 + A_{43}^2) + A_{33}(A_{41}^2 + A_{42}^2),$$

so wird

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[A_{11} + A_{22} + A_{33} + \frac{\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix}}{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2}\right],$$

wo in den Determinanten überall A_{44} statt Null gesetzt worden ist; dieselben haben als Unterdeterminanten der Elemente A_{11}, A_{22}, A_{33} der Reciproken der Discriminante die Werte $a_{11} A^2$; $a_{22} A^2$; $a_{33} A^2$. Setzt man noch (Art. 40) $A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2 = -(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) A$, so erhält man schließlich

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left(A_{11} + A_{22} + A_{33} - \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}} A\right)$$

und die Gleichung der Scheitelebene nimmt die Form an

$$2 A_{41} x + 2 A_{42} y + 2 A_{43} z - \\ -\left(A_{11} + A_{22} + A_{33} - \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}} A\right) = 0. \quad (93$$

Ferner findet man durch Division aus den Gleichungen der zweiten Gruppe:

$$\left.\begin{aligned} x_s &= \frac{A_{11} A_{41} + A_{21} A_{42} + A_{31} A_{43} + A_{41}\lambda}{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2} \\ y_s &= \frac{A_{12} A_{41} + A_{22} A_{42} + A_{32} A_{43} + A_{42}\lambda}{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2} \\ z_s &= \frac{A_{13} A_{41} + A_{23} A_{42} + A_{33} A_{43} + A_{43}\lambda}{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (94$$

und kann daraus mit Hilfe des schon bestimmten Wertes von λ die Coordinaten des Scheitelpunktes berechnen. Einfachere Formeln ergeben sich durch folgendes Verfahren:

Man setzt z. B. bei x_s den zuerst ermittelten Ausdruck für λ ein und multipliciert beiderseits mit $2 A_{41}$; dadurch erhält man

$$2 A_{41} x_s = 2 \frac{A_{11} A_{41}^2 + A_{21} A_{41} A_{42} + A_{31} A_{41} A_{43}}{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2} - \\ - \frac{A_{41}^2 \{A_1 A_{41} + A_2 A_{42} + A_3 A_{43}\}^2}{(A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2)^2},$$

ferner indem man die Brüche rechts zusammenzieht und dann den Ausdruck $2\,A_{11}\,A_{24}^2\,A_{34}^2 + A_{11}\,A_{24}^4 + A_{11}\,A_{34}^4$ addiert und subtrahiert:

$$2\,A_{41}\,x_s = A_{11} + \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & 0 \end{vmatrix} A_{42}^2 + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & 0 \end{vmatrix} A_{43}^2 + 2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{41} & A_{43} & 0 \end{vmatrix} A_{42}\,A_{43}}{(A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2)^2};$$

$$= A_{11} + \frac{a_{33}\,A^2\,A_{42}^2 + a_{22}\,A^2\,A_{43}^2 - 2\,a_{23}\,A^2\,A_{42}\,A_{43}}{(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})^2\,A^2},$$

wo nach Kürzung mit A^2 der Zähler des Bruches auch in Determinantenform darstellbar ist. Ähnlich geht man bei y_s und z_s vor, indem man mit $2\,A_{42}, 2A_{43}$ multipliciert u. s. w. Dadurch ergeben sich für die Coordinaten des Scheitelpunktes die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2\,A_{41}\,x_s &= A_{11} - \frac{1}{(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})^2} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & A_{42} \\ a_{32} & a_{33} & A_{43} \\ A_{42} & A_{43} & 0 \end{vmatrix} \\ 2\,A_{42}\,y_s &= A_{22} - \frac{1}{(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A_{41} \\ a_{31} & a_{33} & A_{43} \\ A_{41} & A_{43} & 0 \end{vmatrix} \\ 2\,A_{43}\,z_s &= A_{33} - \frac{1}{(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_{41} \\ a_{21} & a_{22} & A_{42} \\ A_{41} & A_{42} & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (94^{I}$$

Wenn eine der Unterdeterminanten A_{41}, A_{42}, A_{43} verschwindet, darf die betreffende Gleichung nicht verwendet werden, da sich anscheinend ein unendlich großer Wert der entsprechenden Coordinate ergibt, thatsächlich aber in unbestimmter Form ein ganz bestimmter Wert. In solchen Fällen, besonders wenn die Gleichung $U = 0$ unvollständig ist, werden am besten die Gleichungen der Axe und der Scheitelebene für die Berechnung der Coordinaten des Scheitelpunktes herangezogen.

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$2\,x^2 + y^2 + 5\,z^2 + 2\,x\,y + 6\,x\,z + 2\,y\,z + 2\,x + 2\,y + 4\,z + 7 = 0$$

mit

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}; \qquad \begin{gathered} \alpha_{11} = 4;\ \alpha_{22} = 1;\ \alpha_{33} = 1; \\ A_{41} = 2;\ A_{42} = -1;\ A_{43} = -1;\ A_{44} = 0; \\ A = -1;\ A_{11} = 23;\ A_{22} = 6;\ A_{33} = 6 \end{gathered}$$

repräsentiert eine nicht centrale Fläche, deren Durchmesser die Richtung $2 : -1 : -1$ haben.

Die Gleichung der Scheitelebene ist

$$4x - 2y - 2z - \left[23 + 6 + 6 - \frac{2+1+5}{4+1+1} \cdot (-1)\right] = 0$$

oder

$$12x - 6y - 6z - 109 = 0.$$

Für den Scheitelpunkt findet man

$$4x_s = 23 - \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad x_s = \frac{208}{36};$$

$$-2y_s = 6 - \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad y_s = -\frac{125}{36};$$

$$-2z_s = 6 - \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad z_s = -\frac{113}{36}.$$

b) Man bestimme die Scheitelebenen und Scheitelpunkte der Flächen

$$2x^2 + y^2 + 9z^2 + 6xy + 10xz + 8yz + 2x + 6y + 4z + 5 = 0;$$
$$2x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 4xy - 2xz - 2yz - 18x + 6y + 30z - 48 = 0;$$
$$3x^2 - z^2 + 4x + 2y + 2z + 7 = 0;$$
$$2xy - 6x - 2y - 2z + 22 = 0.$$

53. Scheitelerzeugende und Scheitelebene der parabolischen Cylinderfläche. Es wurde bereits (Art. 51) angeführt, dass die nicht axiale Cylinderfläche nur eine Scheitelerzeugende im endlichen Bereiche besitzt, nämlich ihre Schnittlinie mit der Hauptebene. Die Tangentenebene dieser Erzeugenden ist zu der Hauptebene senkrecht und möge die Scheitelebene genannt werden; zu ihrer Gleichung gelangt man durch entsprechende Umformung der Gleichung $U = 0$. Die Hauptebene H_2 hat die Stellung

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33}.$$

Multipliciert man links einmal mit α_2, dann mit β_2, endlich mit γ_2, so gehen die Beziehungen

$$\alpha_2^2 : \alpha_2\beta_2 : \alpha_2\gamma_2 = a_{11} : a_{12} : a_{13};$$
$$\alpha_2\beta_2 : \beta_2^2 : \beta_2\gamma_2 = a_{21} : a_{22} : a_{23};$$
$$\alpha_2\gamma_2 : \beta_2\gamma_2 : \gamma_2^2 = a_{31} : a_{32} : a_{33}$$

hervor, welche sich, da $a_{11} + a_{22} + a_{33} = \rho_2$ (Art. 51) durch die Gleichungen

Beispiele und Aufgaben.

a) Die Gleichung

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36xy + 12xz - 24yz - 8x + 30y + \\ + 4z - 8 = 0$$

mit

$$\alpha_{ik} = 0; \quad A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = 0; \quad A_{11} = -1764; \\ A_{22} = -196; \quad A_{33} = -441$$

stellt eine parabolische Cylinderfläche vor, deren Hauptebene die Stellung $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = 9 : -18 : 6 = 3 : -6 : 2$ hat. Man findet

$$v_{42} = -14; \quad v_{42}\alpha_2 - a_{14} = -2; \quad v_{42}\beta_2 - a_{24} = -3;$$

$$v_{42}\gamma_2 - a_{34} = -6; \quad \frac{v_{42}^2}{\rho_2} - a_{44} = 12,$$

daher

$$2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

als Gleichung der Scheitelebene. Zur Probe berechnet man

$$A_{\substack{41\\22}} + A_{\substack{41\\33}} = 28 - 126 = -98; \quad A_{\substack{42\\11}} + A_{\substack{42\\33}} = -84 - 63 = -147;$$

$$A_{\substack{43\\11}} + A_{\substack{43\\22}} = -252 - 42 = -294;$$

$$A_{\substack{11\\22}} + A_{\substack{22\\33}} + A_{\substack{33\\11}} = -36 - 513 - 88 = -637;$$

$$\frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} = -\frac{2401}{49} = -49,$$

woraus dieselbe Gleichung hervorgeht. Die Gleichung der Hauptebene ist

$$3u_1 - 6u_2 + 2u_3 = 0,$$

oder

$$3x - 6y + 2z - 2 = 0,$$

demnach das Gleichungssystem der Scheitelerzeugenden

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \\ 3x - 6y + 2z - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

und deren Richtung $6 : 2 : -3$.

b) Man bestimme die Scheitelebenen und Scheitelerzeugenden der durch die Gleichungen

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 - 8xy + 4xz - 4yz - 14x - 4y - 16z + 10 = 0;$$

$$z^2 - 4x - 4y - 2z + 9 = 0;$$

$$y^2 - 4y + 2z - 3 = 0$$

repräsentierten parabolischen Cylinderflächen.

54. Die Rotationsflächen zweiter Ordnung und die Kugelfläche. Bisher sind die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\rho^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\rho^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\,\rho - A_{44} = 0$$

als ungleich vorausgesetzt worden; nur bei den nicht axialen Cylinderflächen haben sich zwei gleiche, aber verschwindende Wurzeln ergeben. Der Fall, dass zwei nicht verschwindende, oder dass alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich sind, hat eine besondere geometrische Bedeutung, welche im nachstehenden erläutert werden soll. Hiebei kann die bei dem Beweise für die Realität der Wurzeln der cubischen Gleichung (Art. 51) ermittelte Beziehung

$$\rho_1 < \omega_{mm}^{(1)} < \rho_2 < \omega_{mm}^{(2)} < \rho_3$$

mit Vortheil angewendet werden. Darin bedeuten $\omega_{mm}^{(1)}$ und $\omega_{mm}^{(2)}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichungen $\triangle_{mm} = 0$, $m = 1, 2, 3$.

I. Wenn zwei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich sind, z. B. $\rho_1 = \rho_2 = \rho_i$, so ist auch $\omega_{mm}^{(1)} = \rho_i$, d. h. die quadratischen Gleichungen $\triangle_{11} = 0$; $\triangle_{22} = 0$; $\triangle_{33} = 0$ haben eine gemeinschaftliche Wurzel ρ_i und man findet (Art. 51)

$$\begin{aligned} \alpha_i : \beta_i : \gamma_i &= 0 : \triangle_{12}^{(i)} : \triangle_{13}^{(i)}; \\ &= \triangle_{21}^{(i)} : 0 : \triangle_{23}^{(i)}; \quad (\triangle_{ik}^{(i)} = \triangle_{ki}^{(i)}); \\ &= \triangle_{31}^{(i)} : \triangle_{32}^{(i)} : 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass auch $\triangle_{12}^{(i)} = 0$; $\triangle_{13}^{(i)} = 0$; $\triangle_{23}^{(i)} = 0$ oder

$$a_{12}\,\rho_i + \alpha_{12} = 0; \quad a_{13}\,\rho_i + \alpha_{13} = 0; \quad a_{23}\,\rho_i + \alpha_{23} = 0,$$

demnach

$$\rho_i = \rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{12}}{a_{12}} = -\frac{\alpha_{13}}{a_{13}} = -\frac{\alpha_{23}}{a_{23}},$$

so dass sich

$$\frac{\alpha_{12}}{a_{12}} = \frac{\alpha_{13}}{a_{13}} = \frac{\alpha_{23}}{a_{23}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96$$

als Kennzeichen von zwei gleichen Wurzeln der cubischen Gleichung ergibt.

Da aber nun das Richtungsverhältnis

$$\alpha_i : \beta_i : \gamma_i = 0 : 0 : 0$$

in unbestimmter Form auftritt, erscheint die Richtung des der Wurzel ρ_i entsprechenden Hauptdurchmessers unbestimmt; doch kann man zeigen,

dass dieselbe trotzdem einer Bedingung unterworfen ist. Es ist jetzt nämlich

$$\rho_1 = -\frac{\alpha_{12}}{a_{12}} = -\frac{a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}}{a_{12}} = a_{33} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

u. s. w., also

$$a_{11} - \rho_1 = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}; \quad a_{22} - \rho_1 = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}; \quad a_{33} - \rho_1 = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

und infolge dessen gehen die Gleichungen 79 (Art. 51) in die Gleichungen

$$\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}\alpha_1 + \quad a_{12}\beta_1 + \quad a_{13}\gamma_1 = 0;$$
$$a_{21}\alpha_1 + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\beta_1 + \quad a_{23}\gamma_1 = 0;$$
$$a_{31}\alpha_1 + \quad a_{32}\beta_1 + \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\gamma_1 = 0,$$

die sich durch Division mit $a_{12}a_{13}$; $a_{12}a_{23}$; $a_{13}a_{23}$ insgesammt auf die Gleichung

$$\frac{1}{a_{23}}\alpha_1 + \frac{1}{a_{13}}\beta_1 + \frac{1}{a_{12}}\gamma_1 = 0$$

reducieren, aus welcher man erkennt, dass die Richtung $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ in der Stellung

$$\frac{1}{a_{23}} : \frac{1}{a_{13}} : \frac{1}{a_{12}}$$

enthalten sein muss. Da eine andere Bedingung für die den gleichen Wurzeln ρ_1 und ρ_2 entsprechenden Hauptdurchmesserrichtungen nicht vorhanden ist, können dafür zwei beliebige, zu einander senkrechte Richtungen der ermittelten Stellung angenommen werden, während die dritte offenbar nur

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{1}{a_{23}} : \frac{1}{a_{13}} : \frac{1}{a_{12}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97$$

sein kann; übrigens wird diese Behauptung leicht durch das in Art. 51 (Gl. 83^{II}) dargestellte Richtungsverhältnis

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{1}{a_{23}\rho_3 + \alpha_{23}} : \frac{1}{a_{13}\rho_3 + \alpha_{13}} : \frac{1}{a_{12}\rho_3 + \alpha_{12}}$$

bestätigt, weil daraus

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{1}{a_{23}} \frac{1}{\rho_3 + \frac{\alpha_{23}}{a_{23}}} : \frac{1}{a_{13}} \frac{1}{\rho_3 + \frac{\alpha_{13}}{a_{13}}} : \frac{1}{a_{12}} \frac{1}{\rho_3 + \frac{\alpha_{12}}{a_{12}}},$$

folgt, wo die zweiten Factoren der Verhältniszahlen rechts einander gleich sind u. s. w.

Denkt man nun durch einen beliebigen Punkt P_0 des Hauptdurchmessers h_3 einen Strahl senkrecht zu diesem gelegt, so hat derselbe eine der unendlich vielen möglichen Richtungen $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i$ und die Abstände seiner Treffpunkte von P_0 sind durch die Gleichung

$$V_{ii} r^2 + 2 (u_{10} \alpha_i + u_{20} \beta_i + u_{30} \gamma_i) \; r + U_{00} = 0$$

bestimmt. Das Gleichungssystem des Hauptdurchmessers h_3 wird durch die Coordinaten von P_0 befriedigt, daher ist

$$\frac{u_{10}}{\alpha_3} = \frac{u_{20}}{\beta_3} = \frac{u_{30}}{\gamma_3}$$

oder mit Hilfe eines bestimmten Factors λ, dessen Wert nicht bekannt zu sein braucht,

$$u_{10} = \lambda \alpha_3; \quad u_{20} = \lambda \beta_3; \quad u_{30} = \lambda \gamma_3$$

und

$$u_{10} \alpha_i + u_{20} \beta_i + u_{30} \gamma_i = \lambda (\alpha_3 \alpha_i + \beta_3 \beta_i + \gamma_3 \gamma_i) = 0.$$

Mithin wird

$$V_{ii} r^2 + U_{00} = 0,$$

$$r^2 = - \frac{1}{V_{ii}} U_{00} = - \frac{1}{\rho_i} U_{00},$$

d. h. die Treffpunkte aller durch den Punkt P_0 senkrecht zu h_3 gelegten Strahlen haben von P_0 denselben Abstand

$$\sqrt{- \frac{1}{\rho_i} U_{00}},$$

sie liegen in einem Kreise, dessen Mittelpunkt P_0 ist. Man erkennt daraus, dass die Fläche eine Rotationsfläche ist. Hat dieselbe einen Mittelpunkt im endlichen Bereich, so entspricht diesem der Hauptkreis mit dem Radius

$$R = \sqrt{- \frac{1}{\rho_i} \cdot \frac{A}{A_{44}}}.$$

Bei Rotations-Cylinderflächen ist

$$R = \sqrt{-\frac{1}{\rho_i} \cdot \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}}}.$$

Anmerkung. Die Gleichung einer parabolischen Cylinderfläche hat auch zwei gleiche (verschwindende) Wurzeln, weist also das Kennzeichen einer Rotationsfläche auf. Diese Fläche kann als der Grenzfall einer centralen Rotationsfläche angesehen werden, wenn man die Drehungsaxe in das Unendliche gerückt denkt.

II. Hat die cubische Gleichung drei gleiche Wurzeln

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3,$$

so ist

$$\rho_1 = \omega_{mm}^{(1)} = \rho_2 = \omega_{mm}^{(2)} = \rho_3,$$

d. h. die quadratischen Gleichungen $\triangle_{11} = 0$; $\triangle_{22} = 0$; $\triangle_{33} = 0$ oder

$$\rho^2 - (a_{22} + a_{33})\,\rho + \alpha_{11} = 0; \quad \rho^2 - (a_{11} + a_{33})\,\rho + \alpha_{22} = 0;$$
$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\,\rho + \alpha_{33} = 0$$

haben durchwegs gleiche Wurzeln, welche auch gleich sind der dreifach auftretenden Wurzel der cubischen Gleichung. Nun ist

$$\omega_{11} = \frac{a_{22} + a_{33} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{33})^2 + 4\,a_{23}^2}}{2};$$

$$\omega_{22} = \frac{a_{11} + a_{33} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{33})^2 + 4\,a_{13}^2}}{2};$$

$$\omega_{33} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}^2}}{2},$$

so dass sich gleiche Wurzeln nur dann ergeben, wenn

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}; \quad a_{12} = 0; \quad a_{13} = 0; \; a_{23} = 0,$$
$$(\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = a_{11} = a_{22} = a_{33}),$$

die Gleichung $U = 0$ also die specielle Form

$$a_{11}\,(x^2 + y^2 + z^2) + 2\,a_{14}\,x + 2\,a_{24}\,y + 2\,a_{34}\,z + a_{44} = 0 \quad . \quad . \; (98$$

besitzt; sie stellt nun eine centrale Fläche vor, weil A_{44} nicht verschwindet. Durch Transformation auf parallele Coordinaten durch den Mittelpunkt geht sie in

$$a_{11}\,(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{A}{A_{44}} = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{A}{A_{44}}$$

über und zeigt, dass jeder Punkt der Fläche vom Mittelpunkte den constanten Abstand $\sqrt{-\frac{1}{a_{11}}\frac{A}{A_{44}}}$ hat: Die Fläche ist eine reale oder imaginäre Kugelfläche, die sich zu einem Punkt zusammenzieht, wenn $A = 0$ (imaginäre Kegelfläche).

Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Falle die Hauptdurchmesser-Richtungen an gar keine Bedingung gebunden, also vollkommen unbestimmt sind, was sich geometrisch dadurch erklärt, dass bei der Kugelfläche drei beliebige, zu einander senkrechte Durchmesser als Hauptdurchmesser gelten können.

55. Transformation der Gleichung einer centralen Fläche auf die Hauptdurchmesser. Es liegt nahe, die centrale Fläche zweiter Ordnung auf ein Coordinatensystem zu beziehen, welches aus den Hauptdurchmessern als Coordinatenaxen gebildet wird. Wählt man die Hauptdurchmesser h_1, h_2, h_3 als neue x-, y-, z-Axe, demnach den Mittelpunkt P_c als neuen Nullpunkt, so geht die Gleichung $U = 0$ durch Transformation (Art. 41) über in

$$\begin{aligned} V_{11}x^2 + V_{22}y^2 + V_{33}z^2 + 2V_{12}xy + 2V_{13}xz + 2V_{23}yz + \\ + 2(u_{1c}\alpha_1 + u_{2c}\beta_1 + u_{3c}\gamma_1)x + \\ + 2(u_{1c}\alpha_2 + u_{2c}\beta_2 + u_{3c}\gamma_2)y + \\ + 2(u_{1c}\alpha_3 + u_{2c}\beta_3 + u_{3c}\gamma_3)z + U_{cc} = 0, \end{aligned}$$

oder, weil

$$V_{12} = V_{13} = V_{23} = 0;\ V_{11} = \rho_1;\ V_{22} = \rho_2;\ V_{33} = \rho_3$$

(Art. 51);

$$u_{1c} = u_{2c} = u_{3c} = 0;\ U_{cc} = \frac{A}{A_{44}}$$

(Art. 47), in

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99$$

Daraus folgt durch eine einfache Umformung

$$\frac{x^2}{-\frac{1}{\rho_1}\frac{A}{A_{44}}} + \frac{y^2}{-\frac{1}{\rho_2}\frac{A}{A_{44}}} + \frac{z^2}{-\frac{1}{\rho_3}\cdot\frac{A}{A_{44}}} - 1 = 0.$$

Die Nenner der Brüche links sind (Art. 51) gleich den Quadraten der Hauptradien R_1, R_2, R_3, so dass man schließlich

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99^{I}$$

als charakteristische Form der Gleichung einer centralen Fläche erhält, die auf ihre Hauptdurchmesser bezogen ist. Je nachdem die Haupt-

radien real oder imaginär, ihre Quadrate daher positiv oder negativ sind, kann man $R_1{}^2 = \pm a^2$; $R_2{}^2 = \pm b^2$; $R_3{}^2 = \pm c^2$ setzen, wo a, b, c reale positive Größen bedeuten; dadurch ergeben sich die Haupt-Gleichungstypen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$

welche erkennen lassen, dass die ordinäre, centrale Fläche zweiter Ordnung nur ein reales oder imaginäres Ellipsoid, ein eintheiliges oder zweitheiliges Hyperboloid sein kann (Art. 38).

Wenn $A = 0$, also eine Kegelfläche vorliegt ($A_{44} \gtrless 0$), nimmt Gleichung 99 die Form

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100$$

an, kann aber auch, je nachdem ρ_1, ρ_2, ρ_3 gleich oder verschieden bezeichnet sind, in einer der Hauptformen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dargestellt werden, wovon die erste der imaginären, die zweite der realen Kegelfläche entspricht.

Bei Rotationsflächen ist nur ein Hauptdurchmesser bestimmt. welcher zugleich die Drehungsaxe vorstellt. Wird derselbe mit h_3 bezeichnet, so können h_1 und h_2 beliebig angenommen werden, wenn sie nur zu einander und zu h_3 senkrecht sind.

Anmerkung. Das Product

$$R_1{}^2 . R_2{}^2 . R_3{}^2 = -\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \cdot \frac{A^3}{A_{44}{}^3} = -\frac{A^3}{A_{44}{}^4}$$

(wegen $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = A_{44}$, Art. 51) hat das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem eine paare oder unpaare Zahl Hauptradien imaginär, ist also negativ bei dem imaginären Ellipsoid und eintheiligen Hyperboloid, positiv bei dem realen Ellipsoid und dem zweitheiligen Hyperboloid. Da $A_{44}{}^4 > 0$, ist demnach bei dem ersteren Paar Flächen A positiv, bei dem letzteren A negativ.

56. Transformation der Gleichung einer nicht centralen Fläche auf die Scheitelebene und die beiden Hauptebenen als Coordinatenebenen. Wenn man die Axe h_3 einer nicht centralen Fläche zur z-Axe, die Scheitelebene zur xy-Ebene eines neuen Coordinatensystems macht, so dass der Scheitelpunkt dessen Nullpunkt wird, die x- und y-Axe aber die Normalen der Hauptebenen H_1 und H_2 im Scheitelpunkte sind, dann geht die Gleichung $U = 0$ durch Transformation über in

$$\begin{aligned} V_{11} x^2 + V_{22} y^2 + V_{33} z^2 + 2 V_{12} x y + 2 V_{13} x z + 2 V_{23} y z + \\ + 2 (u_{1s} \alpha_1 + u_{2s} \beta_1 + u_{3s} \gamma_1) x + \\ + 2 (u_{1s} \alpha_2 + u_{2s} \beta_2 + u_{3s} \gamma_2) y + \\ + 2 (u_{1s} \alpha_3 + u_{2s} \beta_3 + u_{3s} \gamma_3) z + U_{ss} = 0. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$V_{12} = V_{13} = V_{23} = 0; \ V_{11} = \rho_1; \ V_{22} = \rho_2; \ V_{33} = \rho_3 = 0$$

(Art. 51) $U_{ss} = 0$, weil P_s auf der Fläche liegt

$$u_{1s} \alpha_1 + u_{2s} \beta_1 + u_{3s} \gamma_1 = 0; \quad u_{1s} \alpha_2 + u_{2s} \beta_2 + u_{3s} \gamma_2 = 0,$$

weil P_s beiden Hauptebenen angehört; endlich

$$u_{1s} \alpha_3 + u_{2s} \beta_3 + u_{3s} \gamma_3 = v_{13} x_s + v_{23} y_s + v_{33} z_s + v_{43} = v_{43},$$

weil

$$v_{13} = \rho_3 \alpha_3 = 0; \quad v_{23} = \rho_3 \beta_3 = 0; \quad v_{33} = \rho_3 \gamma_3 = 0 \text{ (Art. 51).}$$

Mit Rücksicht auf diese besonderen Werte der Coëfficienten nimmt die transformierte Gleichung die einfache Form

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + 2 v_{43} z = 0 \quad \ldots \ldots \quad (101$$

oder

$$\frac{x^2}{-\frac{1}{\rho_1} v_{43}} + \frac{y^2}{-\frac{1}{\rho_2} v_{43}} - 2z = 0$$

an. Da $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = A_{41} : A_{42} : A_{43}$; $A_{44} = 0$, findet man ferner

$$\begin{aligned} v_{43} = a_{41} \alpha_3 + a_{42} \beta_3 + a_{43} \gamma_3 = \frac{a_{41} A_{41} + a_{42} A_{42} + a_{43} A_{43} + a_{44} A_{44}}{\sqrt{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2}} = \\ = \frac{A}{\sqrt{-(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) A}} \end{aligned}$$

und kann

$$-\frac{1}{\rho_1} v_{43} = \frac{-A}{\rho_1 \sqrt{-(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) A}} = \pm p;$$

$$-\frac{1}{\rho_2} v_{43} = \frac{-A}{\rho_2 \sqrt{-(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) A}} = \pm q$$

$$(p > 0; \ q > 0)$$

setzen, so dass sich die Haupt-Gleichungstypen

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$$
$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$$

ergeben, welche erkennen lassen, dass (Art. 38, 47) die ordinäre, nicht centrale Fläche nur ein Paraboloid sein kann, und zwar ein elliptisches oder hyperbolisches, je nachdem ρ_1 und ρ_2 gleich oder ungleich bezeichnet sind.

Anmerkung. Das Paraboloid ist danach ein elliptisches oder hyperbolisches, je nachdem $\rho_1 \rho_2 > 0$ oder $\rho_1 \rho_2 < 0$.

Da

$$\rho_1 \rho_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = -\frac{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2}{A}$$

(Art. 51, 40), ist $A < 0$ bei dem elliptischen, $A > 0$ bei dem hyperbolischen Paraboloid.

57. Transformation der Gleichung einer axialen Cylinderfläche auf die Hauptebenen und eine dazu senkrechte Ebene als Coordinatenebenen. Bei einer axialen Cylinderfläche kann man den Hauptdurchmesser h_3 (die Axe) zur neuen z-Axe und eine beliebige dazu senkrechte Ebene zur neuen xy-Ebene machen, so dass die x- und y-Axe die Normalen der Hauptebenen H_1 und H_2 in einem Punkte P_c der Axe sind. Dann geht die allgemeine Gleichung $U = 0$ durch Transformation über in

$$\begin{aligned}V_{11}x^2 + V_{22}y^2 + V_{33}z^2 + 2V_{12}xy + 2V_{13}xz + 2V_{23}yz +\\ + 2(u_{1c}\alpha_1 + u_{2c}\beta_1 + u_{3c}\gamma_1)x +\\ + 2(u_{1c}\alpha_2 + u_{2c}\beta_2 + u_{3c}\gamma_2)y +\\ + 2(u_{1c}\alpha_3 + u_{2c}\beta_3 + u_{3c}\gamma_3)z + U_{cc} = 0,\end{aligned}$$

oder, weil

$$V_{12} = V_{13} = V_{23} = 0;\ V_{11} = \rho_1;\ V_{22} = \rho_2;\ V_{33} = \rho_3 = 0$$

(Art. 51);

$$u_{1c} = u_{2c} = u_{3c} = 0;\ U_{cc} = \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}}$$

(Art. 47), in

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}} = 0; \quad \ldots\ldots \quad (102$$

daraus folgt durch eine einfache Umformung

$$\frac{x^2}{-\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}}}+\frac{y^2}{-\frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}}}-1=0.$$

Die Nenner der Brüche links sind (Art. 51) gleich den Quadraten der Hauptradien R_1 und R_2, so dass man schließlich

$$\frac{x^2}{R_1^2}+\frac{y^2}{R_2^2}-1=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (102^{I}$$

als charakteristische Form der Gleichung einer axialen Cylinderfläche erhält, die auf die Hauptebenen bezogen ist. Je nachdem die Hauptradien real oder imaginär, ihre Quadrate daher positiv oder negativ sind, kann man $R_1^2 = \pm a^2$; $R_2^2 = \pm b^2$ setzen, wo a, b positive reale Größen bedeuten. Dadurch ergeben sich die Gleichungstypen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0;$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

für die reale oder imaginäre elliptische und für die hyperbolische Cylinderfläche.

58. Transformation der Gleichung einer nicht axialen Cylinderfläche auf die Hauptebene, die Scheitelebene und eine dazu senkrechte Ebene als Coordinatenebenen. Wählt man die Scheitelerzeugende einer nicht axialen Cylinderfläche zur neuen z-Axe, eine dazu senkrechte, durch den Punkt P_s dieser Erzeugenden gelegte Ebene zur xy-Ebene, die Hauptebene zur xz-, die Scheitelebene zur yz-Ebene, so dass also die y-Axe eine Tangente wird, dann geht durch Transformation die Gleichung $U = 0$ über in

$$\begin{aligned} V_{11}x^2 + V_{22}y^2 + V_{33}z^2 + 2V_{12}xy + 2V_{13}xz + 2V_{23}yz &+ \\ + 2(u_{1s}\alpha_1 + u_{2s}\beta_1 + u_{3s}\gamma_1)\,x &+ \\ + 2(u_{1s}\alpha_2 + u_{2s}\beta_2 + u_{3s}\gamma_2)\,y &+ \\ + 2(u_{1s}\alpha_3 + u_{2s}\beta_3 + u_{3s}\gamma_3)\,z &+ U_{ss} = 0. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$V_{12} = V_{13} = V_{23} = 0; \quad V_{11} = \rho_1 = 0; \quad V_{22} = \rho_2; \quad V_{33} = \rho_3 = 0$$

(Art. 51);

$$U_{ss} = 0; \quad u_{1s}\alpha_2 + u_{2s}\beta_2 + u_{3s}\gamma_2 = 0,$$

weil P_s der Fläche und der Hauptebene angehört; $u_{1s}\alpha_3 + u_{2s}\beta_3 + u_{3s}\gamma_3 = 0$, weil die Richtung $u_{1s} : u_{2s} : u_{3s} = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ senkrecht ist (Art. 45, 51) zu der Richtung $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$; endlich

$$u_{1s}\alpha_1 + u_{2s}\beta_1 + u_{3s}\gamma_1 = v_{11}x_s + v_{21}y_s + v_{31}z_s + v_{41} = v_{41},$$

weil $v_{11} = \rho_1\alpha_1 = 0$; $v_{21} = \rho_1\beta_1 = 0$; $v_{31} = \rho_1\gamma_1 = 0$ (Art. 51). Daher ergibt sich die transformierte Gleichung in der einfachen Form

$$\rho_2 y^2 + 2v_{41}x = 0, \quad \ldots \ldots \quad (103$$

welche die parabolische Cylinderfläche charakterisiert. Da (Art. 53)

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = (v_{42}\alpha_2 - a_{14}) : (v_{42}\beta_2 - a_{24}) : (v_{42}\gamma_2 - a_{34})$$

und

$$(v_{42}\alpha_2 - a_{14})^2 + (v_{42}\beta_2 - a_{24})^2 + (v_{42}\gamma_2 - a_{34})^2 =$$
$$= a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - v_{42}^2,$$

also

$$v_{41} = \frac{a_{41}(v_{42}\alpha_2 - a_{14}) + a_{42}(v_{42}\beta_2 - a_{24}) + a_{43}(v_{42}\gamma_2 - a_{34})}{\sqrt{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - v_{42}^2}} =$$

$$= \frac{v_{42}^2 - (a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2)}{\sqrt{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - v_{42}^2}} =$$

$$= -\sqrt{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - v_{42}^2} = -\sqrt{-\frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}}}$$

(vgl. Art. 53), ferner $\rho_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (Art. 51), kann die parabolische Cylinderfläche auch durch die Gleichung

$$y^2 = 2\sqrt{-\frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{(a_{11} + a_{22} + a_{33})^3}} \cdot x$$

dargestellt werden.

59. Übersicht der wichtigsten Untersuchungsergebnisse. Die allgemeine Gleichung $U = 0$ kann, wie aus den bisher durchgeführten Untersuchungen hervorgeht, eine ordinäre Fläche (Ellipsoid. Hyperboloid, Paraboloid), eine singuläre Fläche (Kegel-, Cylinderfläche) oder eine degenerierte Fläche (Ebenenpaar) vorstellen. Die möglichen Fälle mit ihren charakteristischen Kennzeichen sind

$A \gtrless 0$. **Ordinäre Flächen.**

$A_{44} \gtrless 0$	centrale	$\alpha_{ii} > 0$; $a_{ii} A_{44} > 0$; $i = 1, 2, 3$	Ellipsoid	$A > 0$; imaginäres.
				$A < 0$; reales.
		$\alpha_{ii} > 0$; $a_{kk} A_{44} < 0$; $a_{ll} A_{44} < 0$; $i, k, l = 1, 2, 3$; $i \gtrless k \gtrless l \gtrless i$ oder $\alpha_{ii} \leqq 0$; $i = 1, 2, 3$	Hyperboloid	$A > 0$; eintheiliges.
				$A < 0$; zweitheiliges.
$A_{44} = 0$	nicht centrale		Paraboloid	$A > 0$; hyperbolisches.
				$A < 0$; elliptisches.

$A = 0$. **Singuläre und degenerierte Flächen.**

$A_{44} \gtrless 0$		Kegelfläche	$\alpha_{ii} > 0$; $a_{ii} A_{44} > 0$; $i = 1, 2, 3$	imaginäre.	
			$\alpha_{ii} > 0$; $a_{kk} A_{44} < 0$; $a_{ll} A_{44} < 0$; $i, k, l = 1, 2, 3$; $i \gtrless k \gtrless l \gtrless i$ oder $\alpha_{ii} \leqq 0$; $i = 1, 2, 3$	reale.	
$A_{44} = 0$	A_{11}, A_{22}, A_{33} nicht Null oder nicht alle Null	Cylinderfläche	$\alpha_{ii} \geqq 0$ aber nicht alle Null	elliptische	$a_{ii} A_{kk} > 0$; $i, k = 1, 2, 3$; $i \gtrless k$ imaginäre.
					$a_{ii} A_{kk} < 0$; $i, k = 1, 2, 3$; $i \gtrless k$ reale.
			$\alpha_{ii} \leqq 0$ aber nicht alle Null	hyperbolische.	
			$\alpha_{ik} = 0$	parabolische.	
	$A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{33} = 0$	Ebenenpaar	$\alpha_{ii} \geqq 0$ aber nicht alle Null: imaginäres	mit realer Schnittlinie im endlichen Bereich.	
			$\alpha_{ii} \leqq 0$ aber nicht alle Null: reales		

A = 0. Singuläre und degenerierte Flächen.						
$A_{44} = 0$	$A_{11} = 0;\ A_{22} = 0;\ A_{33} = 0$	Ebenenpaar	$\alpha_{ik} = 0$	$A_{\substack{ii\\kk}} \geqq 0$ $i, k = 1, 2, 3$ $i \gtrless k$ aber nicht alle Null	imaginäres	paralleles
				$A_{\substack{ii\\kk}} \leqq 0$ $i, k = 1, 2, 3$ $i \gtrless k$ aber nicht alle Null	reales	
				$A_{\substack{ii\\kk}} = 0;\ i, k = 1, 2, 3$ $i \gtrless k$		vereinigtes.

Von besonderer Bedeutung ist:

I. Bei den centralen Flächen:

Mittelpunkt: $x_c = \frac{A_{41}}{A_{44}}$; $y_c = \frac{A_{42}}{A_{44}}$; $z_c = \frac{A_{43}}{A_{43}}$;

Axenrichtungen: $\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a_{23}\rho + \alpha_{23}} : \frac{1}{a_{13}\rho + \alpha_{13}} : \frac{1}{a_{12}\rho + \alpha_{12}}$:

Hauptradius: $R^2 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{A}{A_{44}}$,

wenn ρ eine Wurzel der Gleichung

$$\rho^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\rho^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\rho - A_{44} = 0.$$

Auf den Mittelpunkt parallel transformierte Gleichung:

$$Q + \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

Auf die Axen transformierte Gleichung:

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

Gleichung des Asymptotenkegels:

$$U - \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

II. Bei den nicht centralen Flächen:

Durchmesserrichtung: $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = A_{41} : A_{42} : A_{43}$;

Gleichungssystem der Axe: $\frac{u_1}{A_{41}} = \frac{u_2}{A_{12}} = \frac{u_3}{A_{43}}$;

Stellung der Hauptebenen:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a_{23}\rho + \alpha_{23}} : \frac{1}{a_{13}\rho + \alpha_{13}} : \frac{1}{a_{12}\rho + \alpha_{12}},$$

wenn ρ eine Wurzel der Gleichung

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\rho + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = 0;$$

Gleichung der Scheitelebene:

$$2A_{41}x + 2A_{42}y + 2A_{43}z - \left(A_{11} + A_{22} + A_{33} - \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}} A\right) = 0;$$

Scheitelpunkt:

$$2A_{41}x_s = A_{11} - \frac{1}{(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})^2} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & A_{42} \\ a_{32} & a_{33} & A_{43} \\ A_{42} & A_{43} & 0 \end{vmatrix};$$

$$2A_{42}y_s = A_{22} - \frac{1}{(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A_{41} \\ a_{31} & a_{33} & A_{43} \\ A_{41} & A_{43} & 0 \end{vmatrix};$$

$$2A_{43}z_s = A_{33} - \frac{1}{(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{33})^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_{41} \\ a_{21} & a_{22} & A_{42} \\ A_{41} & A_{42} & 0 \end{vmatrix}.$$

Parameter der Hauptschnitte:

$$\pm p = \frac{-A}{\rho_1 \sqrt{-(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})A}}; \pm q = \frac{-A}{\rho_2 \sqrt{-(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})A}};$$

Gleichung, transformiert auf Scheitelebene und Hauptebenen:

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + 2\frac{A}{\sqrt{-(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})A}} z = 0.$$

III. Bei den axialen Cylinderflächen:

Richtung der Erzeugenden und der Axe:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3};\ i = 1, 2, 3;$$

Gleichungssystem der Axe:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0;$$

Stellung der Hauptebenen:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a_{23}\rho + \alpha_{23}} : \frac{1}{a_{13}\rho + \alpha_{13}} : \frac{1}{a_{12}\rho + \alpha_{12}};$$

Hauptradius:

$$R^2 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}},$$

wenn ρ eine Wurzel der Gleichung

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\rho + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = 0.$$

Auf die Hauptebenen transformierte Gleichung:

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \frac{A_{ii}}{\alpha_{ii}} = 0.$$

IV. Bei der parabolischen Cylinderfläche:

Richtung der Erzeugenden:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3};\ i = 1, 2, 3;$$

Stellung der Hauptebene:

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = a_{i1} : a_{i2} : a_{i3} = \frac{1}{a_{23}} : \frac{1}{a_{13}} : \frac{1}{a_{12}};\ i = 1,\ 2,\ 3;$$

Gleichung der Hauptebene:

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \frac{v_{42}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} = 0;$$

Gleichung der Scheitelebene:

$$(v_{42}\,\alpha_2 - a_{14})\,x + (v_{42}\,\beta_2 - a_{24})\,y + (v_{42}\,\gamma_2 - a_{34})\,z +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{v_{42}{}^2}{\rho_2} - a_{44}\right) = 0;$$
$$\rho_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

Gleichung, transformiert auf Hauptebene, Scheitelebene und eine dazu senkrechte Ebene:

$$y^2 = 2\sqrt{-\frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{(a_{11} + a_{22} + a_{33})^3}}\;x.$$

V. Bei einem Paar nicht paralleler Ebenen:

Richtung der Axe:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3};\ i = 1, 2, 3;$$

Gleichungssystem der Axe:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0;$$

Stellung der Hauptebenen (Winkelhalbierungsebenen):

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a_{23}\,\rho + \alpha_{23}} : \frac{1}{a_{13}\,\rho + \alpha_{13}} : \frac{1}{a_{12}\,\rho + \alpha_{12}},$$

wenn ρ eine Wurzel der Gleichung

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\rho + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = 0;$$

Winkel φ der Ebenen:

$$\tan\varphi = \frac{2\sqrt{-(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}};$$

Gleichung, transformiert auf die Winkelhalbierungsebenen (**Hauptebenen**) und eine dazu senkrechte Ebene:

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 = 0.$$

VI. Bei einem Parallel-Ebenenpaar:
Mittelebene:

$$u_i = 0;\ i = 1, 2, 3;$$

Abstand der Ebenen von einander:

$$\delta = 2\sqrt{\frac{-A_{\substack{11\\22}}}{a_{33}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}} = 2\sqrt{\frac{-A_{\substack{22\\23}}}{a_{11}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{-A_{\substack{11\\33}}}{a_{22}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}}.$$

VII. In allen Fällen ordinärer oder singulärer Flächen:
Kennzeichen der Rotationsflächen:

$$\frac{\alpha_{12}}{a_{12}} = \frac{\alpha_{13}}{a_{13}} = \frac{\alpha_{23}}{a_{23}};$$

Richtung der Rotationsaxe:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{1}{a_{23}} : \frac{1}{a_{13}} : \frac{1}{a_{12}}.$$

VIII. In allen Fällen ordinärer Flächen:
Kennzeichen der Regelflächen und des imaginären Ellipsoides:

$$A > 0.$$

IX. In allen Fällen ordinärer und singulärer Flächen:
Gleichung des Tangentenkegels (Tangenten-Ebenenpaares) aus P_0:

$$U_{c0}\,U - U_0{}^2 = 0;$$

Gleichung der Polarebene von P_0 ($U_{c0} \gtrless 0$):

$$U_0 = 0;$$

Gleichung der Tangentenebene in P_0 ($U_{00} = 0$):

$$U_0 = 0.$$

X. In allen Fällen ordinärer und singulärer Flächen:

Gleichung der zur Richtung $\alpha : \beta : \gamma$ conjugierten Diametralebene:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0;$$

Gleichungssystem des der Stellung $\alpha : \beta : \gamma$ conjugierten Durchmessers:

$$\frac{u_1}{\alpha} = \frac{u_2}{\beta} = \frac{u_3}{\gamma}.$$

60. **Vorgang bei der Untersuchung von Gleichungen.** Für die Untersuchung der geometrischen Bedeutung einer beliebigen Gleichung $U = 0$ erscheint erfahrungsgemäß folgender Vorgang am zweckmäßigsten:

I. Man stellt zuerst die Matrix der Discriminante auf und berechnet die Unterdeterminanten α_{ik} von A_{44}; sodann mit Hilfe derselben die Unterdeterminanten $A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}$ mittelst der Formeln

$$\left.\begin{aligned} -A_{i4} &= a_{14}\,\alpha_{1i} + a_{24}\,\alpha_{2i} + a_{34}\,\alpha_{3i} \\ A_{4i} &= a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + a_{i3}\,\alpha_{i3} \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3,$$

ferner den Wert der Discriminante

$$A = a_{41}\,A_{41} + a_{42}\,A_{42} + a_{43}\,A_{43} + a_{44}\,A_{44}.$$

Wenn $A_{44} = 0$, berechnet man auch A_{11}, A_{22}, A_{33}.

II. Wenn nicht alle α_{ik} verschwinden, hat man es mit einer ordinären Fläche, einer Kegel- oder axialen Cylinderfläche oder mit einem Paar nicht paralleler Ebenen zu thun. Bei den ordinären und Kegelflächen bestimmt man den Mittelpunkt oder den Scheitelpunkt, bei den Cylinderflächen oder Ebenenpaaren die Axe oder Mittelebene. Dann erfordern die Kegel-, Cylinderflächen und Ebenenpaare für die Feststellung ihrer Beschaffenheit nur den Schnitt mit einer passend gewählten Coordinaten- oder dazu parallelen Ebene.

III. Wenn alle α_{ik} verschwinden, kann nur eine parabolische Cylinderfläche, ein Parallel-Ebenenpaar oder ein Paar vereinigter Ebenen vorliegen. Das Ebenenpaar erkennt man daran, dass $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$, während bei der Cylinderfläche mindestens eine dieser Unterdeterminanten von Null verschieden ist. Bei dem Parallel-Ebenenpaar ist wenigstens eine der Unterdeterminanten $A_{\substack{11\\22}}, A_{\substack{22\\33}}, A_{\substack{33\\11}}$ nicht Null, bei dem vereinigten verschwinden diese auch.

IV. Die cubische Gleichung

$$\rho^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\rho^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\,\rho - A_{44} = 0$$

vermittelt durch ihre Wurzeln die Bestimmung der Hauptebenen Hauptdurchmesser, Hauptradien u. s. w. oder, wenn nicht mehr verlangt wird, durch die Anzahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen ihres Polynoms die Classification der Flächen. Insbesondere ist bei den centralen Flächen die Eintheilung in die Gruppen

$A > 0$: Imaginäres Ellipsoid, eintheiliges Hyperboloid,

$A < 0$: Reales Ellipsoid, zweitheiliges Hyperboloid

und die Bemerkung, dass den Ellipsoiden nur Zeichenwechsel oder nur Zeichenfolgen entsprechen, hinreichend, um dieselben von einander zu unterscheiden.

Das elliptische ($A < 0$) und hyberbolische ($A > 0$) Paraboloid sind direct erkennbar.

V. Die Rotationsflächen werden durch die Beziehung

$$\frac{\alpha_{12}}{a_{12}} = \frac{\alpha_{13}}{a_{13}} = \frac{\alpha_{23}}{a_{23}}$$

angezeigt.

Aufgaben.

Man untersuche nach den angegebenen Regeln die Gleichungen:

1. $25x^2 + 22y^2 + 16z^2 - 20xy + 4xz - 16yz - 22x - 20y - 68z + {}$ $+ 205 = 0$;
   $\alpha_{11} = 288$; $\alpha_{22} = 396$; $\alpha_{33} = 450$; $\alpha_{12} = 144$; $\alpha_{13} = 36$; $\alpha_{23} = 180$;
   $A_{41} = 5832$; $A_{42} = 11664$; $A_{43} = 17469$; $A_{44} = 5832$; $A = 419904$;
   $\rho_1 = 9$; $\rho_2 = 18$; $\rho_3 = 36$.
2. $25x^2 + 22y^2 + 16z^2 - 20xy + 4xz - 16yz - 22x - 20y - 68z + {}$ $+ 61 = 0$ (vgl. Aufg. 1); $A = -419904$.
3. $85x^2 + 53y^2 + 58z^2 + 24xy - 36xz - 12yz + 36x + 12y - {}$ $- 116z + 156 = 0$;
   $\alpha_{11} = 3038$; $\alpha_{22} = 4606$; $\alpha_{33} = 4361$; $\alpha_{12} = -588$; $\alpha_{13} = 882$; $\alpha_{23} = 294$;
   $A_{41} = A_{42} = 0$; $A_{43} = 235298$; $A_{44} = 235298$; $A = 23059204$;
   $\rho_1 = \rho_2 = 49$; $\rho_3 = 98$.
4. $85x^2 + 53y^2 + 58z^2 + 24xy - 36xz - 12yz + 36x + 12y - {}$ $- 116z - 40 = 0$ (vgl. Aufg. 3) $A = -23059204$.

5. $7x^2 + 10y^2 - 8z^2 - 44xy + 28xz - 16yz - 10x + 52y +$
$+ 52z - 53 = 0;$
$\alpha_{11} = -144;\ \alpha_{22} = -252;\ \alpha_{33} = -414;\ \alpha_{12} = -288;\ \alpha_{13} = 36;$
$\alpha_{23} = -252;$
$A_{41} = 5832;\ A_{42} = 11664;\ A_{43} = 17496;\ A_{44} = 5832;\ A = 419904;$
$\rho_1 = -9;\ \rho_2 = -18;\ \rho_3 = 36.$

6. $59x^2 - 37y^2 - 22z^2 + 72xy - 108xz - 36yz + 108x + 36y +$
$+ 44z + 76 = 0;$
$\alpha_{11} = 490;\ \alpha_{22} - 4214;\ \alpha_{33} = -3479;\ \alpha_{12} = 1764;\ \alpha_{13} = -2646;$
$\alpha_{23} = -882;$
$A_{41} = 0;\ A_{42} = 0;\ A_{43} = 235298;\ A_{44} = 235298;\ A = 23059204;$
$\rho_1 = \rho_2 = -49;\ \rho_3 = 98.$

7. $x^2 + y^2 + 7z^2 + 16xy - 8xz + 8yz + 8x - 8y - 14z - 29 = 0;$
$\alpha_{11} = -9;\ \alpha_{22} = -9;\ \alpha_{33} = -63;\ \alpha_{12} = -72;\ \alpha_{13} = 36;$
$\alpha_{23} = -36;$
$A_{41} = 0;\ A_{42} = 0;\ A_{43} = -729;\ A_{44} = -729;\ A = 26244;$
$\rho_1 = \rho_2 = 9;\ \rho_3 = -9.$

8. $7x^2 + 10y^2 - 8z^2 - 44xy + 28xz - 16yz - 10x + 52y +$
$+ 52z - 197 = 0$ (vgl. Aufg. 5); $A = -419904.$

9. $59x^2 - 37y^2 - 22z^2 + 72xy - 108xz - 36yz + 108x + 36y +$
$+ 44z - 120 = 0$ (vgl. Aufg. 6); $A = -23059204.$

10. $x^2 + y^2 + 7z^2 + 16xy - 8xz + 8yz + 8x - 8y - 14z + 43 = 0$
(vgl. Aufg. 7); $A = -26244.$

11. $25x^2 + 22y^2 + 16z^2 - 20xy + 4xz - 16yz - 22x - 20y -$
$- 68z + 133 = 0$ (vgl. Aufg. 1); $A = 0.$

12. $7x^2 + 10y^2 - 8z^2 - 44xy + 28xz - 16yz - 10x + 52y +$
$+ 52z - 125 = 0$ (vgl. Aufg. 5); $A = 0.$

13. $85x^2 + 53y^2 + 58z^2 + 24xy - 36xz - 12yz + 36x + 12y -$
$- 116z + 58 = 0$ (vgl. Aufg. 3); $A = 0.$

14. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 3 = 0;$
$\alpha_{11} = 1;\ \alpha_{22} = 1;\ \alpha_{33} = 1;\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0;$
$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = 1;\ A = 0;\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1.$

15. $59x^2 - 37y^2 - 22z^2 + 72xy - 108xz - 36yz + 108x + 36y +$
$+ 44z - 22 = 0$ (vgl. Aufg. 6); $A = 0.$

16. $x^2 + y^2 + 7z^2 + 16xy - 8xz + 8yz + 8x - 8y - 14z + 7 = 0$
(vgl. Aufg. 7); $A = 0.$

17. $11x^2 + 14y^2 + 20z^2 + 20xy - 4xz + 16yz - 74x - 28y - 70z + 95 = 0$;
$\alpha_{11} = 216$; $\alpha_{22} = 216$; $\alpha_{33} = 54$; $\alpha_{12} = -216$; $\alpha_{13} = 108$; $\alpha_{23} = -108$;
$A_{41} = 8748$; $A_{42} = -8748$; $A_{43} = 4374$; $A_{44} = 0$; $A = 354294$;
$A_{11} = 7290$; $A_{22} = -25515$; $A_{33} = -5832$;
$\rho_1 = 27$; $\rho_2 = 18$; $\rho_3 = 0$.

18. $13x^2 + 45y^2 + 40z^2 - 24xy + 36xz + 12yz - 110x - 4y + 6z + 71 = 0$;
$\alpha_{11} = 1764$; $\alpha_{22} = 196$; $\alpha_{33} = 441$; $\alpha_{12} = 588$; $\alpha_{13} = -882$; $\alpha_{23} = -294$;
$A_{41} - 100842$; $A_{42} = 33614$; $A_{43} = -50421$; $A_{44} = 0$; $A = -5764801$;
$A_{11} = 170471$; $A_{22} = -108045$; $A_{33} = -96040$;
$\rho_1 = \rho_2 = 49$; $\rho_3 = 0$.

19. $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy - 20xz - 16yz + 14x + 4y + 34z - 29 = 0$;
$\alpha_{11} = -72$; $\alpha_{22} = -72$; $\alpha_{33} = -18$; $\alpha_{12} = 72$; $\alpha_{13} = -36$; $\alpha_{23} = 36$;
$A_{41} = 972$; $A_{42} = -972$; $A_{43} = 486$; $A_{44} = 0$; $A = 13122$;
$A_{11} = 2106$; $A_{22} = -2511$; $A_{33} = 648$;
$\rho_1 = 18$; $\rho_2 = -9$; $\rho_3 = 0$.

20. $x^2 - y^2 - 4xz - 4yz + 4x - 4y + 2z = 0$;
$\alpha_{11} = -4$; $\alpha_{22} = -4$; $\alpha_{33} = -1$; $\alpha_{12} = 4$; $\alpha_{13} = -2$; $\alpha_{23} = 2$;
$A_{41} = 18$; $A_{42} = -18$; $A_{43} = 9$; $A_{44} = 0$; $A = 81$;
$A_{11} = 9$; $A_{22} = -9$; $A_{33} = 0$ $\rho_1 = 3$; $\rho_2 = -3$; $\rho_3 = 0$.

21. $9x^2 + 6y^2 + 12z^2 + 12xy - 12xz - 30x - 24y + 12z + 45 = 0$;
$\alpha_{11} = 72$; $\alpha_{22} = 72$; $\alpha_{33} = 18$; $\alpha_{12} = -72$; $\alpha_{13} = 36$; $\alpha_{23} = -36$;
$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = 0$; $A_{11} = 1296$;
$\rho_1 = 18$; $\rho_2 = 9$; $\rho_3 = 0$.

22. $9x^2 + 6y^2 + 12z^2 + 12xy - 12xz - 30x - 24y + 12z + 9 = 0$ (vgl. Aufg. 21); $A_{11} = -1296$.

23. $13x^2 + 45y^2 + 40z^2 - 24xy + 36xz + 12yz - 112x + 126y - 140z + 294 = 0$ (vgl. Aufg. 18);
$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = 0$; $A_{11} = 86436$; $\rho_1 = \rho_2 = 49$; $\rho_3 = 0$.

24. $13x^2 + 45y^2 + 40z^2 - 24xy + 36xz + 12yz - 112x + 126y -$
$- 140z + 196 = 0$ (vgl. Aufg. 23); $A_{11} = - 86436$.

25. $14x^2 + 63y^2 - 28z^2 - 84xy - 84yz + 84y + 56z + 70 = 0;$
$\alpha_{11} = - 3528;\quad \alpha_{22} = - 392;\quad \alpha_{33} = - 882;\quad \alpha_{12} = - 1176;$
$\alpha_{13} = 1764;\ \alpha_{23} = 588;$
$A_{41} = A_{42} = A_{13} = A_{44} = A = 0;\ A_{11} = - 345744;$
$\rho_1 = 98;\ \rho_2 = - 49;\ \rho_3 = 0.$

26. $5x^2 + 27y^2 - 32z^2 - 48xy - 12xz - 60yz + 49 = 0;$
$\alpha_{11} = - 1764;\quad \alpha_{22} = - 196;\quad \alpha_{33} = - 441;\quad \alpha_{12} = - 588;$
$\alpha_{13} = 882;\ \alpha_{23} = 294;$
$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = 0;\ A_{11} = - 1764 \times 49;$
$\rho_1 = 49;\ \rho_2 = - 49;\ \rho_3 = 0.$

27. $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 24x - 30y - 12z +$
$+ 45 = 0;$
$\alpha_{ik} = 0;\ A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = 0;\ \rho_1 = \rho_3 = 0;\ \rho_2 = 9:$
$A_{11} = A_{22} = - 1296;\ A_{33} = - 324;\ A_{12} = 1296;\ A_{13} = - 648.$

28. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz - 2y + 2z + 1 = 0;$
$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{23} = 1;\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = - 1;$
$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = 0;$
$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0;\ \rho_1 = 3,\ \rho_2 = 1;\ \rho_3 = 0.$

29. $8x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 20xy + 28xz + 30yz - 24x - 24y -$
$- 12z = 0;$
$\alpha_{11} = - 81;\quad \alpha_{22} = - 100;\quad \alpha_{33} = - 4;\quad \alpha_{12} = 90;\quad \alpha_{13} = - 18;$
$\alpha_{23} = 20;\ A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$
$\rho_1 = 37;\ \rho_2 = - 5;\ \rho_3 = 0.$

30. $4x^2 - 8y^2 + 4z^2 + 4xy + 10xz - 4yz - 16x - 8y - 20z +$
$+ 16 = 0;$
$\alpha_{11} = - 36;\quad \alpha_{22} = - 9;\quad \alpha_{33} = - 36;\quad \alpha_{12} = - 18;\quad \alpha_{13} = 36;$
$\alpha_{13} = 18;\ A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A = A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0:$
$\rho_1 = 9;\ \rho_2 = - 9;\ \rho_3 = 0.$

31. $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 4xz + 6yz - 24x - 36y - 12z +$
$+ 40 = 0;$
$\alpha_{ik} = 0;\ A_{i4} = 0;\ i = 1, 2, 3, 4;\ A = 0;\ A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$

32. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6x - 6y - 12z +$
$+ 5 = 0;$

$\alpha_{ik} = 0;\ A_{ii} = 0;\ i = 1, 2, 3, 4;\ A = 0;\ A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$

33. $4x^2 + 4y^2 + z^2 + 8xy + 4xz + 4yz - 8x - 8y - 4z + {}$
$+ 4 = 0;$

$\alpha_{ik} = 0;\ A_{ii} = 0;\ i = 1, 2, 3, 4;\ A = 0;\ A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$

61. Flächen zweiter Classe. Die Polarebene des Punktes P_0 in Bezug auf die Fläche $U = 0$ hat (Art. 45) die Gleichung

$$u_{10}x + u_{20}y + u_{30}z + u_{40} = 0.$$

Sind ξ_0, η_0, ζ_0 die Coordinaten der Polarebene, so lässt sich deren Gleichung auch in der Form

$$\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + 1 = 0$$

darstellen und es besteht die Identität

$$u_{10}x + u_{20}y + u_{30}z + u_{40} \equiv \sigma(\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + 1),$$

wo unter σ ein Proportionalitätsfactor verstanden ist. Die Identität zerfällt in die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{10} &= \sigma\xi_0; \\ u_{20} &= \sigma\eta_0; \\ u_{30} &= \sigma\zeta_0; \\ u_{40} &= \sigma. \end{aligned}$$

Durch Addition folgt, nachdem man der Reihe nach mit A_{11}, A_{21}, A_{31}, A_{41}; $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$; $A_{13}, A_{23}, A_{33}, A_{43}$; $A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}$ multipliciert hat,

$$\begin{aligned} A x_0 &= \sigma(A_{11}\xi_0 + A_{21}\eta_0 + A_{31}\zeta_0 + A_{41}) = \sigma t_{10}; \\ A y_0 &= \sigma(A_{12}\xi_0 + A_{22}\eta_0 + A_{32}\zeta_0 + A_{42}) = \sigma t_{20}; \\ A z_0 &= \sigma(A_{13}\xi_0 + A_{23}\eta_0 + A_{33}\zeta_0 + A_{43}) = \sigma t_{30}; \\ A &= \sigma(A_{14}\xi_0 + A_{24}\eta_0 + A_{34}\zeta_0 + A_{44}) = \sigma t_{40}, \end{aligned}$$

wenn $t_{10}, t_{20}, t_{30}, t_{40}$ Abkürzungen bedeuten. Multipliciert man nun die linken und rechten Seiten der Gleichungen der ersten Gruppe in der gegebenen Reihenfolge mit denselben Seiten der Gleichungen in der zweiten Gruppe und addiert, so ergibt sich

$$A \,.\, U_{00} = \sigma^2(t_{10}\xi_0 + t_{20}\eta_0 + t_{30}\zeta_0 + t_{40})$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} T_{00} &\equiv t_{10}\xi_0 + t_{20}\eta_0 + t_{30}\zeta_0 + t_{40} = \{A_1\xi_0 + A_2\eta_0 + A_3\zeta_0 + A_4\}^2 \equiv \\ &\equiv A_{11}\xi_0^2 + A_{22}\eta_0^2 + A_{33}\zeta_0^2 + 2A_{12}\xi_0\eta_0 + 2A_{13}\xi_0\zeta_0 + 2A_{23}\eta_0\zeta_0 + {} \\ &\qquad + 2A_{14}\xi_0 + 2A_{24}\eta_0 + 2A_{34}\zeta_0 + A_{44} \end{aligned}$$

setzt,

$$A\,U_{00} = \sigma^2\,T_{00}.$$

Lässt man P_0 auf die Fläche rücken, so wird die Polarebene zur Tangentenebene derselben in P_0 und da nun $U_{00} = 0$, der Factor σ aber seiner Natur nach nicht Null sein kann, wird auch

$$T_{00} = 0,$$

d. h. die Coordinaten einer beliebigen Tangentenebene genügen der Gleichung

$$T = 0$$

oder

$$A_{11}\,\xi^2 + A_{22}\,\eta^2 + A_{33}\,\zeta^2 + 2\,A_{12}\,\xi\eta + 2\,A_{13}\,\xi\zeta + 2\,A_{23}\,\eta\zeta + \\ + 2\,A_{14}\,\xi + 2\,A_{24}\,\eta + 2\,A_{34}\,\zeta + A_{44} = 0,$$

welche also die Fläche in Ebenencoordinaten vorstellt. Sie ist vom zweiten Grade, daher ist die Fläche zweiter Ordnung auch eine Fläche zweiter Classe.

---

4. Abschnitt.

Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung.

62. Kreisschnitte. Die cubische Gleichung für die Hauptebenen

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

ist einer bemerkenswerten geometrischen Deutung fähig, welche direct auf die Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung führt. Ihr zufolge stellt nämlich (vgl. Art. 44) die homogene Gleichung

$$(a_{11} - \rho)\,x^2 + (a_{22} - \rho)\,y^2 + (a_{33} - \rho)\,z^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + 2\,a_{13}\,x\,z + \\ + 2\,a_{23}\,y\,z = 0$$

oder

$$Q - \rho\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

ein Ebenenpaar vor, dessen Bedeutung für die Fläche $U = 0$ hervortritt, wenn man es derart parallel verschiebt, dass seine Axe durch einen beliebig angenommenen Punkt P_0 geht; seine Gleichung wird dann auf folgendem Wege ermittelt: Bezieht man zunächst das Ebenenpaar

auf ein dem gegebenen paralleles Coordinatensystem $(x' y' z')$ in P_0 durch die Gleichung

$$\{a_1 x' + a_2 y' + a_3 z'\}^2 - \rho (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

und geht dann mittelst der Transformationsformeln $x' = x - x_0$; $y' = y - y_0$; $z' = z - z_0$ auf das Coordinatensystem (x, y, z) über, so erhält man

$$\{a_1 (x - x_0) + a_2 (y - y_0) + a_3 (z - z_0)\}^2 - \\ - \rho \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right] = 0$$

oder

$$\{(a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4) - (a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 z_0 + a_4)\}^2 - \\ - \rho \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right] = 0$$

und nach Ausführung der symbolischen Operation

$$U - 2 U_0 + U_{00} - \rho \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right] = 0$$

als Gleichung des Ebenenpaares. Sie ist linear combiniert aus den Gleichungen

$$U = 0;$$

$$\rho \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right] + 2 U_0 - U_{00} = 0$$

der gegebenen Fläche und einer Kugelfläche (vgl. Art. 54, II), daher enthält das Ebenenpaar die Schnittlinie dieser beiden, welche somit nur aus zwei Kreisen bestehen kann. Man schließt daraus, dass die Fläche $U = 0$ von jeder Ebene, welche parallel ist einer der Ebenen des Paares

$$Q - \rho (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

nach einem Kreise geschnitten wird.

Den drei Wurzeln ρ_1, ρ_2, ρ_3 der cubischen Gleichung entsprechend gibt es drei solche Ebenenpaare; deren Axen haben die Richtungen

$$\triangle_{11}^{(i)} : \triangle_{12}^{(i)} : \triangle_{13}^{(i)} = \triangle_{21}^{(i)} : \triangle_{22}^{(i)} : \triangle_{23}^{(i)} = \triangle_{31}^{(i)} : \triangle_{32}^{(i)} : \triangle_{33}^{(i)},$$

sind also den Hauptdurchmessern der Fläche parallel (Art. 44 und Art. 51). Man kann sie als Repräsentanten der Kreisschnittebenen bezeichnen. Ihre Realität ist an die Bedingung $\triangle_{kk} \leqq 0$ gebunden (Art. 44). Soll etwa $\triangle_{33} < 0$, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} < 0$$

sein, so ergibt sich, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, vorausgesetzt, aus dem Beweise für die Realität der Wurzeln der cubischen Gleichung (Art. 51), dass diese Bedingung nur von ρ_2 erfüllt wird, also nur ein Ebenenpaar real sein kann. Denn es ist

$$\rho_1 < \omega_{33}^{(1)} < \rho_2 < \omega_{33}^{(2)} < \rho_3 ;$$
$$\omega_{33}^{(1)} < a_{11} < a_{22} < \omega_{33}^{(2)},$$

wenn unter $\omega_{33}^{(1)}, \omega_{33}^{(2)}$ die Wurzeln der Gleichung $\triangle_{33} = 0$ verstanden sind; daher ergeben die Substitutionen aller Zahlen zwischen $\omega_{33}^{(1)}$ und $\omega_{33}^{(2)}$, darunter a_{11}, a_{22}, ρ_2, dasselbe Vorzeichen von $\triangle_{33}$, nämlich das negative, was durch Einsetzung von a_{11} oder a_{22} direct zu erkennen ist. Hingegen erhält man für alle Substitutionen von Zahlen, die kleiner sind als $\omega_{33}^{(1)}$ oder größer als $\omega_{33}^{(2)}$, darunter auch für ρ_1 und ρ_3. positive Werte von $\triangle_{33}$. Demnach werden die realen Kreisschnittebenen der Fläche $U = 0$ durch das Ebenenpaar

$$Q - \rho_2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

repräsentiert, sobald $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Bei den Rotationsflächen sind zwei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich, etwa $\rho_1 = \rho_2$ ($= \omega_{11}^{(1)}$, vgl. Art. 54, I); für diese wird $\triangle_{11} = \triangle_{22} = \triangle_{33} = 0$, d. h. die ihnen entsprechenden Ebenenpaare sind in einer Doppelebene vereinigt, so dass die Fläche nur von realen Ebenen, welche dieser parallel sind, nach Kreisen geschnitten werden kann. Bekanntlich wird die Stellung dieser Ebenen durch die Drehungsaxe bestimmt.

Anmerkung. Bei dem hyperbolischen Paraboloid und der parabolischen Cylinderfläche kann von Kreisschnitten nicht die Rede sein.

Erwähnenswert ist, dass eine centrale Fläche und ihr Asymptotenkegel dieselben Kreisschnittebenen haben, weil sich ihre Gleichungen nur im constanten Glied unterscheiden, dieses aber die Wurzeln der cubischen Gleichung nicht beeinflusst.

63. Die Kugelfläche. Bei der Behandlung des Falles gleicher Wurzeln der cubischen Gleichung (Art. 54, II) wurde festgestellt, dass eine Gleichung von der Form

$$a_{11} (x^2 + y^2 + z^2) + 2 a_{14} x + 2 a_{24} y + 2 a_{34} z + a_{44} = 0$$

eine Kugelfläche vorstellt. Anderseits folgt aus der Definition der Kugelfläche als Ort eines Punktes $P(x, y, z)$, welcher von dem gegebenen Punkte $C(a, b, c)$ den gegebenen Abstand r hat, direct die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Ordnet man und setzt $a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = k$, so folgt daraus sogenannte Normalform

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0$$

der Gleichung einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte C und dem Radius r. Abgekürzt sei dieselbe durch

$$S = 0$$

dargestellt. Durch Vergleich der beiden Formen findet man

$$a = -\frac{a_{14}}{a_{11}};\ b = -\frac{a_{24}}{a_{11}};\ c = -\frac{a_{34}}{a_{11}};\quad r^2 = \frac{a_{14}{}^2 + a_{24}{}^2 + a_{34}{}^2 - a_{11}a_{44}}{a_{11}{}^2};$$

demnach repräsentiert die allgemeine Gleichung eine reale oder imaginäre Kugelfläche, je nachdem

$$a_{14}{}^2 + a_{24}{}^2 + a_{34}{}^2 \gtrless a_{11}\,a_{44}.$$

Besondere Gleichungsformen ergeben sich bei speciellen Lagen der Kugelfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

wenn ihr Mittelpunkt im Nullpunkte liegt;

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0,$$

wenn sie durch den Nullpunkt geht;

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2by - 2cz = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2cz = 0,$$

wenn außerdem der Mittelpunkt in der xy-, yz-, zx-Ebene liegt;

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2by = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cz = 0,$$

wenn die Kugelfläche durch den Nullpunkt geht und ihr Mittelpunkt in der x-, y-, oder z-Axe liegt.

I. Eine durch den beliebigen Punkt P_0 und die Richtung $\alpha : \beta : \gamma$ bestimmte Gerade schneidet die Kugelfläche

$$S = 0$$

in zwei Punkten, deren Abstände s' und s'' von P_0 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$s^2 - 2\left[(x_0 - a)\,\alpha + (y_0 - b)\,\beta + (z_0 - c)\,\gamma\right] s + S_{00} = 0$$

sind (Art. 43). Die Schnittpunkte können real getrennt, vereinigt oder imaginär sein, immer ist aber

$$s' . s'' = S_{00},$$

d. h. unabhängig von der Richtung der Geraden ist das Product der von der Kugelfläche auf ihr bestimmten Abschnitte eine constante, nur von der Lage des Punktes P_0 abhängige Größe S_{00}, welche dessen Potenz in Bezug auf die Kugelfläche genannt wird. Die Potenz des Nullpunktes ist k. Sind aus P_0 reale Tangenten an die Kugelfläche möglich, deren Berührungspunkte von P_0 den Abstand t haben, so ist für diese $s' = s'' = t$, mithin

$$S_{00} = t^2.$$

Sind aber keine realen Tangenten möglich, dann existieren reale, entgegengesetzt gleiche Abschnitte, nämlich wenn

$$(x_0 - a) \alpha + (y_0 - b) \beta + (z_0 - c) \gamma = 0,$$

d. h. wenn die Gerade senkrecht ist zu der Verbindungslinie des Punktes P_0 mit dem Mittelpunkte C der Kugelfläche. In diesem Falle ist $s' = h$, $s'' = - h$ und

$$S_{00} = - h^2.$$

Man entnimmt dem Vorstehenden, dass die Potenz eines Punktes positiv oder negativ ist, je nachdem er ausserhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegt. Sie wird Null, wenn der Punkt sich auf der Fläche selbst befindet.

II. Die Tangentenebene in dem Punkte P_0 der Kugelfläche ist senkrecht zu dem Radius $C P_0$, ihre Gleichung ist demnach

$$(x_0 - a) (x - x_0) + (y_0 - b) (y - y_0) + (z_0 - c) (z - z_0) = 0.$$

Schreibt man $x - a + a - x_0$; $y - b + b - y_0$; $z - c + c - z_0$ statt $x - x_0$; $y - y_0$; $z - z_0$, so ergibt sich

$$(x_0 - a) (x - a) + (y_0 - b) (y - b) + (z_0 - c) (z - c) - (x_0 - a)^2 - \\ - (y_0 - b)^2 - (z_0 - c)^2 = 0$$

und da

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2,$$

weil der Punkt auf der Kugelfläche liegt, kann die Gleichung der Tangentenebene auch in der Form

$$(x_0 - a) (x - a) + (y_0 - b) (y - b) + (z_0 - c) (z - c) - r^2 = 0$$

gegeben werden. Befindet sich der Mittelpunkt im Nullpunkte, so reduciert sie sich auf

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - r^2 = 0.$$

III. Durch die Schnittlinie der Kugelflächen

$$S' = 0; \quad S'' = 0$$

gehen unendlich viele Kugelflächen. Sie werden durch die Gleichung

$$S' - \lambda S'' = 0$$

repräsentiert. In der That hat diese Gleichung die Form

$$(1 - \lambda)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(a' - \lambda a'')x - 2(b' - \lambda b'')y - 2(c' - \lambda c'')z + \\ + k' - \lambda k'' = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{a' - \lambda a''}{1 - \lambda}x - 2\frac{b' - \lambda b''}{1 - \lambda}y - 2\frac{c' - \lambda c''}{1 - \lambda}z + \\ + \frac{k' - \lambda k''}{1 - \lambda} = 0,$$

stellt daher eine Kugelfläche vor, deren Mittelpunkt C die Coordinaten

$$a = \frac{a' - \lambda a''}{1 - \lambda}; \quad b = \frac{b' - \lambda b''}{1 - \lambda}; \quad c = \frac{c' - \lambda c''}{1 - \lambda}$$

hat, also auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte C' und C'' liegend, die Strecke $C'C''$ nach dem Verhältnisse λ theilt. Wird $\lambda = 1$, so rückt C in unendliche Entfernung, aus der Gleichung

$$S' - \lambda S'' = 0$$

wird aber

$$S' - S'' = 0$$

oder

$$2(a'' - a')x + 2(b'' - b')y + 2(c'' - c')z + k' - k'' = 0,$$

d. h. die Kugelfläche ist in die Ebene des Kreises übergegangen, welche die gegebenen zwei Kugelflächen gemein haben; diese Ebene ist die Chordal- oder Potenzebene der beiden Kugelflächen. Liegt ein Punkt P_0 in der Potenzebene, so ist $S'_{00} - S''_{00} = 0$ oder $S'_{00} = S''_{00}$, d. h. der Punkt hat gleiche Potenzen in Bezug auf die Kugelflächen; sind also aus ihm Tangenten an dieselben möglich, so liegen deren

Berührungspunkte in einer Kugelfläche, welche die Flächen $S' = 0$ und $S'' = 0$ rechtwinkelig schneidet.

IV. Den drei Kugelflächen

$$S' = 0; \quad S'' = 0; \quad S''' = 0$$

entsprechen drei Potenzebenen

$$S' - S'' = 0; \quad S'' - S''' = 0; \quad S''' - S' = 0,$$

die offenbar durch eine Gerade gehen; diese wird die Potenzlinie der Kugelflächen genannt und durch das Gleichungssystem

$$S' = S'' = S'''$$

dargestellt. Ist P_0 ein Punkt der Potenzlinie, so gelten für seine Coordinaten die Beziehungen

$$S'_{00} = S''_{00} = S'''_{00},$$

d. h. er hat dieselbe Potenz in Bezug auf die drei Kugelflächen. Sind aus ihm Tangenten an die letzteren möglich, so liegen deren Berührungspunkte auf einer vierten Kugelfläche, welche die drei anderen rechtwinkelig schneidet.

V. Den vier Kugelflächen

$$S' = 0; \quad S'' = 0; \quad S''' = 0; \quad S^{IV} = 0$$

entsprechen die sechs Potenzebenen

$$S' - S'' = 0; \quad S' - S''' = 0; \quad S' - S^{IV} = 0; \quad S'' - S''' = 0;$$
$$S'' - S^{IV} = 0; \quad S''' - S^{IV} = 0,$$

welche offenbar durch einen Punkt gehen. Dieser wird der Potenzmittelpunkt oder Chordalpunkt genannt und durch das Gleichungssystem

$$S' = S'' = S''' = S^{IV}$$

dargestellt. Bezeichnet man ihn mit P_0, so gelten für seine Coordinaten die Beziehungen

$$S'_{00} = S''_{00} = S'''_{00} = S^{IV}_{00},$$

d. h. er hat dieselbe Potenz in Bezug auf alle vier Kugelflächen. Sind aus ihm Tangenten an dieselben möglich, so liegen deren Berührungspunkte auf einer fünften Kugelfläche, welche die vier anderen rechtwinkelig schneidet.

VI. Die xy-Ebene wird von der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0$$

im Nullpunkte berührt. Die Gleichung

$$(ax + by + cz + d)\,z = 0$$

tellt eine beliebige Ebene und die xy-Ebene vor. Durch lineare Combination erhält man die Gleichung

$$d(x^2 + y^2 + z^2 - 2rz) + 2r(axz + byz + cz^2 + dz) = 0$$

oder

$$d(x^2 + y^2) + (d + 2rc)\,z^2 + 2arxz + 2bryz = 0$$

einer Kegelfläche, welche den Schnittkreis der Kugelfläche mit der Ebene $ax + by + cz + d = 0$ aus dem Nullpunkte projiciert. Diese Kegelfläche wird von einer beliebigen, der xy-Ebene parallelen Ebene

$$z = z_0$$

nach einer Linie geschnitten, deren Projection auf die xy-Ebene die Gleichung

$$d(x^2 + y^2) + 2arz_0x + 2brz_0y + (d + 2rc)\,z_0^2 = 0$$

hat, die also ein Kreis ist mit den Mittelpunktscoordinaten

$$-\frac{arz_0}{d},\; -\frac{brz_0}{d},\quad z_0$$

und dem Radius

$$\frac{z_0}{d}\sqrt{(a^2 + b^2)\,r^2 - (d^2 + 2rcd)}.$$

Damit hat man ein Mittel gewonnen, die auf einer Kugelfläche liegenden Kreise von einem Punkte aus auf eine Ebene wieder als Kreise zu projicieren. (Stereographische Projection.)

64. Das Ellipsoid. Das auf seine Hauptdurchmesser bezogene Ellipsoid hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Durch Auflösung nach x, y, z erhält man

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}};$$

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}};$$

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

und erkennt, dass für reale Punkte

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,$$

demnach

$$-a \leqq x \leqq a; \quad -b \leqq y \leqq b; \quad -c \leqq z \leqq c$$

sein muss. Wenn der Radius $OP = r$ die Richtung $\alpha : \beta : \gamma$, also P die Coordinaten $x = r\alpha$, $y = r\beta$, $z = r\gamma$ besitzt, hat man

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) r^2 = 1$$

und

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Setzt man einmal

$$\alpha^2 = 1 - \beta^2 - \gamma^2,$$

ein anderesmal

$$\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$$

ein, so folgen die Gleichungen

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\beta^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\gamma^2;$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\alpha^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\beta^2$$

und wenn $a > b > c$ angenommen wird, so dass

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} > 0; \quad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} > 0; \quad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} > 0, \text{ ist } \frac{1}{c^2} \geqq \frac{1}{r^2} \geqq \frac{1}{a^2},$$

daher mindestens $r = c$ und höchstens $r = a$, d. h. die Längen der Radien variieren zwischen c und a. Da sich innerhalb der angegebenen Grenzen keine imaginären Werte der Coordinaten eines Punktes des Ellipsoides ergeben können, ist dasselbe eine allseitig begrenzte, geschlossene Fläche.

I. Die Tangentenebene im Punkte P_0 hat (Art. 45) die Gleichung

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0,$$

also ist

$$\frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} : \frac{z_0}{c^2}$$

das Richtungsverhältnis der Normalen in demselben Punkte und

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{z_0}{c^2}\right)},$$

deren Gleichungssystem, welches auch auf die Form

$$\frac{a^2}{x_0}(x - x_0) = \frac{b^2}{y_0}(y - y_0) = \frac{c^2}{z_0}(z - z_0)$$

gebracht werden kann. Das Ellipsoid und seine Tangentenebene werden von der xy-Ebene nach der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

und der Geraden

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

geschnitten; diese ist also die Polare der orthogonalen Projection P_{0z} des Punktes P_0 auf die xy-Ebene in Bezug auf die Schnittellipse. Der Schnittpunkt der Normalen mit der xy-Ebene hat die Coordinaten

$$x = x_0\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right); \quad y = y_0\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right); \quad z = 0;$$

sein Ort ist daher für alle Punkte der Ellipse, nach welcher das Ellipsoid von einer der yz-Ebene parallelen Ebene geschnitten wird, eine der y-Axe parallele Gerade; für alle Punkte einer der xz-Ebene parallelen Schnittellipse eine Parallele der x-Axe.

Der ersten und zweiten von den eben gefundenen Gleichungen kann man die Formen

$$\frac{ax}{a^2 - c^2} = \frac{x_0}{a}; \quad \frac{by}{b^2 - c^2} = \frac{y_0}{b}$$

geben. Wenn man dann zum Quadrat erhebt und addiert, erhält man

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - c^2)^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2}$$

oder

$$\frac{x^2}{\left[\frac{(a^2 - c^2)^2 (c^2 - z_0^2)}{a^2 c^2}\right]} + \frac{y^2}{\left[\frac{(b^2 - c^2)^2 (c_2 - z_0^2)}{b_2 c^2}\right]} - 1 = 0$$

und erkennt, dass die Normalen aller Punkte einer der x y-Ebene im Abstande z_0 parallelen Schnittellipse die x y-Ebene in den Punkten einer Ellipse treffen, welche die Halbaxen

$$\frac{a^2 - c^2}{a c}\sqrt{c^2 - z_0^2}; \quad \frac{b^2 - c^2}{b c}\sqrt{c^2 - z_0^2}$$

besitzt.

II. Die Gleichung

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0$$

der Tangentenebene im Punkte P_0 wird offenbar durch Multiplication mit -1 auf die Normalform

$$-\frac{l x_0}{a^2} \cdot x - \frac{l y_0}{b^2} \cdot y - \frac{l z_0}{c^2} \cdot z + l = 0$$

überführt und man erhält für die Stellungscoordinaten:

$$\alpha = -\frac{l x_0}{a^2}; \quad \beta = -\frac{l y_0}{b^2}; \quad \gamma = -\frac{l z_0}{c^2}.$$

Wenn man zum Quadrat erhebt und addiert, folgt daraus

$$\frac{1}{l^2} = \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}.$$

Schreibt man aber

$$a\alpha = -l\frac{x_0}{a}; \quad b\beta = -l\frac{y_0}{b}; \quad c\gamma = -l\frac{z_0}{c},$$

erhebt wieder zum Quadrat und addiert, so wird

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = l^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right),$$

also weil

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

$$l^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2.$$

Auf diese Art ist der Abstand des Nullpunktes (Mittelpunktes) von der Tangentenebene einmal durch die Coordinaten ihres Berührungspunktes, das anderemal durch ihre Stellungscoordinaten ausgedrückt.

III. Schreibt man die Gleichung des Ellipsoides in der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

und beachtet, dass darin die Ausdrücke $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ dasselbe Verhalten zeigen, wie die Coordinaten einer Richtung, so wird man darauf geführt

$$\frac{x}{a}=\lambda;\quad \frac{y}{b}=\mu;\quad \frac{z}{c}=\nu$$

oder

$$x=a\lambda;\quad y=b\mu;\quad z=c\nu$$

zu setzen, so dass die Coordinaten irgend eines Punktes auf dem Ellipsoid mittelst der Parameter λ, μ, ν dargestellt erscheinen, welche durch die Gleichung $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ verbunden sind. Durch diese »Parametergleichungen« ist eine Construction des Ellipsoides ausgesprochen (vgl. III. Th., I. Abth., Art. 53, II): Drei mit den Radien a, b, c um den Mittelpunkt beschriebene Kugelflächen werden von einer mit der Richtung $\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0$ gelegten Geraden in den Punkten L_0, M_0, N_0 getroffen; die drei Ebenen, welche durch diese Punkte gehen und zu der x-, y-, z-Axe senkrecht sind, schneiden sich in einem Punkte P_0 der Fläche, denn es ist $x_0=a\lambda_0$; $y_0=b\mu_0$; $z_0=c\nu_0$. Der dem Punkte P_0 entsprechende Radius des Ellipsoides hat die Länge

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{a^2\lambda^2_0+b^2\mu_0^2+c^2\nu_0^2}$$

und die Richtungscoordinaten

$$\alpha_0=\frac{a\lambda_0}{r_0};\quad \beta_0=\frac{b\mu_0}{r_0};\quad \gamma_0=\frac{c\nu_0}{r_0}.$$

IV. Den drei Punkten P_1, P_2, P_3 entsprechen die Radien r_1, r_2, r_3 und die Hilfsstrahlen h_1, h_2, h_3. Für ihre Coordinaten bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1&=a\lambda_1; & x_2&=a\lambda_2; & x_3&=a\lambda_3;\\ y_1&=b\mu_1; & y_2&=b\mu_2; & y_3&=b\mu_3;\\ z_1&=c\nu_1; & z_2&=c\nu_2; & z_3&=c\nu_3. \end{aligned}$$

Die Richtungscoordinaten der Radien sind:

$$\alpha_1=\frac{a\lambda_1}{r_1};\quad \alpha_2=\frac{a\lambda_2}{r_2};\quad \alpha_3=\frac{a\lambda_3}{r_3};$$

$$\beta_1 = \frac{b\,\mu_1}{r_1};\quad \beta_2 = \frac{b\,\mu_2}{r_2};\quad \beta_3 = \frac{b\,\mu_3}{r_3};$$

$$\gamma_1 = \frac{c\,\nu_1}{r_1};\quad \gamma_2 = \frac{c\,\nu_2}{r_2};\quad \gamma_3 = \frac{c\,\nu_3}{r_3}.$$

Sind die Radien r_1 und r_2 conjugiert, hat man

$$V_{12} \equiv \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\,\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\,\gamma_2}{c^2} = 0,$$

also nach Einsetzung der Werte für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

$$\lambda_1\,\lambda_2 + \mu_1\,\mu_2 + \nu_1\,\nu_2 = 0$$

und ebenso, wenn die Radien r_2 und r_3, r_3 und r_1 conjugiert sind,

$$\lambda_2\,\lambda_3 + \mu_2\,\mu_3 + \nu_2\,\nu_3 = 0;$$
$$\lambda_3\,\lambda_1 + \mu_3\,\mu_1 + \nu_2\,\nu_1 = 0,$$

d. h. die einem Tripel conjugierter Radien entsprechenden Hilfsstrahlen sind zu einander senkrecht. Für die Coordinaten der Endpunkte solcher Radien findet man die Beziehungen (vgl. Art. 19)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2;$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2;$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2,$$

und daraus folgt

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ferner ist (vgl. Art. 19)

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = b\,c \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = b\,c\,\lambda_3;\quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = c\,a \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix} = c\,a\,\mu_3;$$
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = a\,b \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = a\,b\,\nu_3;$$

$$\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} = b\,c \begin{vmatrix} \mu_2 & \nu_2 \\ \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = b\,c\,\lambda_1;\quad \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} = c\,a \begin{vmatrix} \nu_2 & \lambda_2 \\ \nu_3 & \lambda_3 \end{vmatrix} = c\,a\,\mu_1;$$
$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = a\,b \begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix} = a\,b\,\nu_1;$$

$$\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = b\,c \begin{vmatrix} \mu_3 & \nu_3 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} = b\,c\,\lambda_2;\quad \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} = c\,a \begin{vmatrix} \nu_3 & \lambda_3 \\ \nu_1 & \lambda_1 \end{vmatrix} = c\,a\,\mu_2;$$
$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = a\,b \begin{vmatrix} \lambda_3 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \mu_1 \end{vmatrix} = a\,b\,\nu_2,$$

also (Art. 8)

$$4\,\overline{O P_1 P_2}^2 = b^2 c^2 \lambda_3^2 + c^2 a^2 \mu_3^2 + a^2 b^2 \nu_3^2;$$
$$4\,\overline{O P_2 P_3}^2 = b^2 c^2 \lambda_1^2 + c^2 a^2 \mu_1^2 + a^2 b^2 \nu_1^2;$$
$$4\,\overline{O P_3 P_1}^2 = b^2 c^2 \lambda_2^2 + c^2 a^2 \mu_2^2 + a^2 b^2 \nu_2^2$$

und

$$4\,(\overline{O P_1 P_2}^2 + \overline{O P_2 P_3}^2 + \overline{O P_3 P_1}^2) = b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2$$

oder auch

$$r_1^2 r_2^2 \sin^2 12 + r_2^2 r_3^2 \sin^2 23 + r_3^2 r_1^2 \sin^2 31 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2.$$

Endlich ist

$$6\,O P_1 P_2 P_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = a\,b\,c \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix},$$

oder, weil die Determinante rechts den Wert 1 hat:

$$6\,O P_1 P_2 P_3 = a\,b\,c.$$

Anmerkung. Wenn speciell $r_1 = a'$, $r_2 = b'$ die Halbaxen der Ellipse sind, nach welcher das Ellipsoid von einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene von der Stellung $\alpha : \beta : \gamma$ geschnitten wird, ist $6\,O P_1 P_2 P_3 = a' b' l$, wenn man unter l den Abstand der zu jener Ebene parallelen Tangentenebene in P_3 vom Mittelpunkte (Nullpunkte) versteht, daher hat man (abgesehen vom Vorzeichen)

$$a' b' l = a\,b\,c$$

und

$$a' b' = \frac{a\,b\,c}{l} = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2}};$$

mithin ergibt sich der Flächeninhalt der Schnittellipse

$$F = \pi\, a' b' = \frac{\pi\, a\,b\,c}{\sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2}}.$$

V. Das Ellipsoid als allseitig begrenzte, geschlossene Fläche kann von Ebenen nur nach realen oder imaginären Ellipsen oder Kreisen geschnitten werden.

Für die Bestimmung des nach dem Mittelpunkte verlegten realen Paares von Kreisschnittebenen sei $a > b > c$ vorausgesetzt, so dass $\frac{1}{b^2}$, wie man sich leicht überzeugt, die (im Sinne der Zahlenreihe) mittlere Wurzel der cubischen Gleichung wird. Dann geht die Gleichung (vgl. Art. 62)

$$Q - \rho_2 (x^2 + y^2 + z\ ) = 0$$

dieses Ebenenpaares in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

oder

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{c^2} z^2 = 0$$

über und stellt die realen Ebenen

$$\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}\, x + \frac{1}{c} \sqrt{b^2 - c^2}\, z = 0;$$

$$\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}\, x - \frac{1}{c} \sqrt{b^2 - c^2}\, z = 0,$$

welche durch die y-Axe (den der Halbaxe b entsprechenden Hauptdurchmesser) gehen.

65. Die Hyperboloide. Die auf ihre Hauptdurchmesser bezogenen Hyperboloide werden durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \mp 1 = 0$$

repräsentiert, wo das obere Vorzeichen für das eintheilige, das untere für das zweitheilige gilt. Durch Auflösung nach x, y, z erhält man

$$x = a\sqrt{\pm 1 - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}; \; y = b\sqrt{\pm 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}};$$

$$z = c\sqrt{\mp 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

und leitet daraus für reale Punkte folgende Beziehungen ab:

Beim eintheiligen Hyperboloid:

$$1 + \frac{z^2}{c^2} \geqq \frac{y^2}{b^2}; \; 1 + \frac{z^2}{c^2} \geqq \frac{x^2}{a^2}; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geqq 1;$$

demnach können x, y, z alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, x und y jedoch nur in solcher Combination, dass der von ihnen bestimmte Punkt der xy-Ebene nicht innerhalb der Kehlellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ liegt.

Beim zweitheiligen Hyperboloid:

$$1 + \frac{y^2}{b^2} \leqq \frac{z^2}{c^2}; \; 1 + \frac{x^2}{a^2} \leqq \frac{z^2}{c^2};$$

demnach muss (absolut genommen) $z \gtreqless c$ sein, während x und y jeden beliebigen Wert erhalten dürfen.

Wenn der Radius $OP = r$ die Richtung $\alpha : \beta : \gamma$, also P die Coordinaten $x = r\alpha$, $y = r\beta$, $z = r\gamma$ besitzt, ergibt sich durch Einsetzung in die Gleichung der Fläche

$$\left(\frac{\alpha^2}{a_2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right) r^2 \mp 1 = 0$$

und

$$\frac{1}{r^2} = \pm \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$

so dass durch die Substitution $\beta^2 = 1 - \alpha^2 - \gamma^2$ beim eintheiligen, $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$ beim zweitheiligen Hyperboloid die Gleichungen

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\alpha^2 - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\gamma^2;$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\alpha^2 - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\beta^2$$

folgen, welche erkennen lassen, dass beim ersten ($a > b$ vorausgesetzt) b der kleinste Radius, beim zweiten c der kleinste Radius ist, in beiden Fällen aber die Radien auch unendlich groß werden können.

I. Die Tangentenebene im Punkte P_0 hat (Art. 45) die Gleichung

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} \pm 1 = 0;$$

also ist

$$\frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} : -\frac{z_0}{c^2}$$

das Richtungsverhältnis der Normalen in demselben Punkte und

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)} + \frac{y - y_0}{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)} = \frac{z - c_0}{\left(-\frac{z_0}{c^2}\right)}$$

oder

$$\frac{a^2}{x^0}(x - x_0) = \frac{b^2}{y_0}(y - y_0) = -\frac{c^2}{z_0}(z - z_0)$$

deren Gleichungssystem. Für die Schnitte der Flächen, ihrer Tangentenebenen und Normalen mit einer Hauptebene (Coordinatenebene) bestehen ähnliche Beziehungen wie beim Ellipsoid.

II. Um die Gleichung

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} \mp 1 = 0$$

der Tangentenebene im Punkte P_0 auf die Normalform überzuführen, multipliciert man mit ∓ 1 und erhält

$$\mp \frac{l x_0}{a^2} x \mp \frac{l y_0}{b^2} y \pm \frac{l z_0}{c^2} + l = 0,$$

so dass

$$\alpha = \mp \frac{l x_0}{a^2}; \quad \beta = \mp \frac{l y_0}{b^2}; \quad \gamma = \pm \frac{l z_0}{c^2}$$

wird. Daraus folgt, wenn man zum Quadrat erhebt und addiert

$$\frac{1}{l^2} = \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}$$

wie beim Ellipsoid; wenn man aber

$$a\alpha = \mp l \frac{x_0}{a}; \quad b\beta = \mp l \frac{y_0}{b}; \quad c\gamma = \pm l \frac{z_0}{c}$$

schreibt, erhält man

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^2\gamma^2 = l^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right) = l^2 . (\pm 1)$$

oder

$$l^2 = \pm (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^2\gamma^2).$$

III. Die in Betrachtung gezogenen Hyperboloide haben den gemeinsamen, realen Asymptotenkegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

welcher auch der Tangentenkegel der Fläche aus dem Mittelpunkte ist, also mit ihr einen unendlich fernen Kegelschnitt gemein hat. Eine beliebige Ebene schneidet die Flächen nach einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem eine zu ihr parallele Ebene durch den Mittelpunkt den Asymptotenkegel nach einem imaginären, realen vereinigten oder realen getrennten Geradenpaar schneidet; denn die zwei unendlich fernen Punkte, welche sie mit der Fläche gemein hat, sind dann imaginär, real vereinigt oder real getrennt.

Die zu der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \mp 1 = 0$$

gehörige cubische Gleichung hat die Wurzeln

$$\frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{b^2}, \quad -\frac{1}{c^2};$$

wird daher $a > b$ vorausgesetzt, dann nimmt unter ihnen $\frac{1}{a^2}$ die mittlere Stelle in der Zahlenreihe ein, so dass die Gleichung

$$Q - \rho_2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

für das reale Paar Kreisschnittebenen beider Hyperboloide die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

oder

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} y^2 - \frac{a^2 + c^2}{c^2} z^2 = 0$$

annimmt, welche in die Gleichungen

$$\frac{1}{b}\sqrt{a^2 - b^2}\, y + \frac{1}{c}\sqrt{a^2 + c^2}\, z = 0;$$

$$\frac{1}{b}\sqrt{a^2 - b^2}\, y - \frac{1}{c}\sqrt{a^2 + c^2}\, z = 0$$

zerlegt werden kann u. s. w.

66. Die Paraboloide. Die auf die Scheitelebene und die beiden Hauptebenen bezogenen Paraboloide werden durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} - 2z = 0; \; (p > 0; \; q > 0)$$

repräsentiert, wo das obere Vorzeichen für das elliptische, das untere für das hyperbolische gilt. Durch Auflösung nach z findet man

$$z = \frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q}$$

und erkennt, dass für reale Punkte beim elliptischen Paraboloid $z \geqq 0$ sein muss, beim hyperbolischen $z \gtreqless 0$ sein darf, während x und y in beiden Fällen jeden beliebigen Wert annehmen können.

I. Die Tangentenebene in dem Punkte P_0 hat die Gleichung (Art. 45)

$$\frac{x_0 x}{p} \pm \frac{y_0 y}{q} - (z + z_0) = 0,$$

also ist

$$\frac{x_0}{p} : \pm \frac{y_0}{q} : -1$$

das Richtungsverhältnis der Normalen in demselben Punkte und

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{x_0}{p}\right)} = \frac{y - y_0}{\left(\pm \frac{y_0}{q}\right)} = \frac{z - z_0}{(-1)}$$

oder

$$\frac{p}{x_0}(x - x_0) = \pm \frac{q}{y_0}(y - y_0) = -(z - z_0)$$

deren Gleichungssystem. Ein Paraboloid und seine Tangentenebene werden von der xz-Ebene (einer Hauptebene) nach der Parabel

$$x^2 - 2pz = 0$$

und der Geraden

$$x_0 x - p(z_0 + z) = 0$$

geschnitten; diese ist also die Polare der orthogonalen Projection P_{0y} des Punktes P_0 auf die xz-Ebene in Bezug auf die Schnittparabel. Der Schnittpunkt der Normalen mit der xz-Ebene hat die Coordinaten

$$x = x_0\left(1 \mp \frac{q}{p}\right); \; y = 0; \; z = z_0 \pm q;$$

sein Ort ist daher für alle Punkte der Parabel, nach welcher das Paraboloid von einer der yz-Ebene parallelen Ebene geschnitten wird, eine der z-Axe parallele Gerade; für alle Punkte einer der xy-Ebene parallelen Schnittlinie (Ellipse oder Hyperbel) eine Parallele der x-Axe.

Gibt man der ersten und dritten von den eben gefundenen Gleichungen die Formen

$$\frac{x}{\sqrt{p}\left(1 \mp \frac{q}{p}\right)} = \frac{x_0}{\sqrt{p}}; \quad 2(z \mp q) = 2z_0,$$

so wird

$$\frac{x^2}{p\left(1 \mp \frac{q}{p}\right)^2} - 2(z \mp q) = \frac{x_0^2}{p} - 2z_0 = \mp \frac{y_0^2}{q}$$

oder

$$\frac{x^2}{p\left(1 \mp \frac{q}{p}\right)^2} - 2z \pm \frac{2q^2 - y_0^2}{q} = 0,$$

d. h. die Normalen aller Punkte einer der xz-Ebene im Abstande y_0 parallelen Schnittparabel treffen die xz-Ebene in Punkten einer Parabel, deren Axe die z-Axe ist, deren Scheitelpunkt in der letzteren im Abstande $z_s = \pm \frac{2q^2 - y_0^2}{2q}$ vom Nullpunkte liegt, und deren Parameter $p\left(1 \mp \frac{q}{p}\right)^2$ unabhängig ist von y_0.

II. Die Gleichung

$$\frac{x_0 x}{p} \pm \frac{y_0 y}{q} - (z + z_0) = 0$$

der Tangentenebene im Punkte P_0 wird durch Division mit z_0 und Multiplication mit $-l$ auf die Normalform

$$-\frac{l x_0}{p z_0} x \mp \frac{l y_0}{q z_0} y + \frac{l}{z_0} z + l = 0$$

überführt und man erhält für die Stellungscoordinaten:

$$\alpha = -\frac{l x_0}{p z_0}; \quad \beta = \mp \frac{l y_0}{q z_0}; \quad \gamma = \frac{l}{z_0}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{z_0^2}\left(\frac{x_0^2}{p^2} + \frac{y_0^2}{q^2} + 1\right);$$

von den Formen

$$l \frac{x_0}{\sqrt{p}} = -z_0 \sqrt{p} \,.\, \alpha; \quad l \frac{y_0}{\sqrt{q}} = \mp z_0 \sqrt{q} \,.\, \beta$$

der beiden ersten Gleichungen hingegen ausgehend, findet man

$$l^2\left(\frac{x_0^2}{p} \pm \frac{y_0^2}{q}\right) = 2 l^2 z_0 = z_0^2 (p\alpha^2 \pm q\beta^2)$$

oder

$$l^2 = \frac{z_0}{2}(p\alpha^2 \pm q\beta^2)$$

und da $z_0 = \frac{l}{\gamma}$, schließlich

$$l = \frac{p\alpha^2 \pm q\beta^2}{2\gamma}.$$

III. Die nach dem Nullpunkte (Scheitelpunkte) verlegte Richtfläche

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 0$$

ist ein imaginäres Ebenenpaar bei dem elliptischen, ein reales bei dem hyperbolischen Paraboloid. Ihre unendlich fernen Punkte bilden als Schnitt mit der unendlich fernen Ebene ein imaginäres oder reales unendlich fernes Geradenpaar, welches sie mit dem Paraboloid gemein hat. Die Axe der Richtfläche ist immer real und fällt im vorliegenden Falle mit der Axe der Fläche (z-Axe) zusammen. Ebenen, welche parallel sind dieser Axe, haben mit dem Paraboloid bloß einen unendlich fernen Punkt, nämlich den (immer realen) Schnittpunkt des unendlich fernen Geradenpaares gemein, schneiden also die Fläche nach Parabeln. Alle anderen Ebenen hingegen enthalten zwei getrennte (imaginäre oder reale) Punkte des unendlich fernen Geradenpaares, daher wird von solchen das elliptische Paraboloid nach Ellipsen, das hyperbolische nach Hyperbeln geschnitten, die aber in beiden Fällen zu Geradenpaaren degenerieren können.

Kreisschnitte können daher nur bei dem elliptischen Paraboloid existieren. Setzt man $p > q$ voraus, dann nimmt unter den Wurzeln $0, \frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ der cubischen Gleichung $\frac{1}{p}$ die mittlere Stelle in der Zahlenreihe ein, so dass die Gleichung

$$Q - \rho_2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

für das reale Paar Kreisschnittebenen die Form

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - \frac{1}{p}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

oder

$$(p - q)\, y^2 - q\, z^2 = 0$$

annimmt, sich demnach in die linearen Gleichungen

$$\sqrt{p-q}\; y + \sqrt{q}\, z = 0; \quad \sqrt{p-q}\; y - \sqrt{q}\, z = 0$$

zerlegen lässt.



